

❶ Sachant que $\int_0^1 f(x) dx = 3$, $\int_1^2 f(x) dx = 4$ et $\int_2^3 f(x) dx = -8$, calculez :

1. $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = 3 + 4 = 7$

2. $\int_0^1 3 \cdot f(x) dx = 3 \cdot \int_0^1 f(x) dx = 3 \cdot 3 = 9$

3.

$\int_0^3 8 \cdot f(x) dx = 8 \cdot \int_0^3 f(x) dx = 8 \cdot \left[\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx \right] = 8 \cdot [3 + 4 + (-8)] = -8$

4.

$\int_3^1 2 \cdot f(x) dx = 2 \cdot \int_3^1 f(x) dx = 2 \cdot \left[-\int_1^3 f(x) dx \right] = -2 \left[\int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx \right] = -2 \cdot (4 - 8) = 8$

❷ Comme il a été vu que $\int_0^b x^2 dx = \frac{1}{3}b^3$ et $\int_0^b x dx = \frac{1}{2}b^2$, on peut en déduire :

1. $\int_0^1 4x^2 dx = 4 \cdot \int_0^1 x^2 dx = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

2. $\int_0^1 (7 - 2x) dx = \int_0^1 7 dx + \int_0^1 -2x dx = 7 \cdot \int_0^1 dx - 2 \cdot \int_0^1 x dx = 7 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 6$

3. $\int_0^1 (x^2 - 3x + 6) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 -3x dx + \int_0^1 6 dx = \frac{1}{3} - 3 \cdot \int_0^1 x dx + 6 \cdot \int_0^1 dx =$

$\frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot 1 = \frac{2 - 9 + 36}{6} = \frac{29}{6}$

4. $\int_0^1 (x - 2)^2 dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 4) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 -4x dx + \int_0^1 4 dx = \frac{1}{3} - 4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 1 = \frac{7}{3}$

❸ Rappel : $\int_0^b x^2 dx = \frac{1}{3}b^3$ et $\int_0^b x dx = \frac{1}{2}b^2$, on peut en déduire les intégrales définies suivantes dans lesquelles a , b , c , α , β , γ sont des nombres réels, avec la seule condition $a < b$.

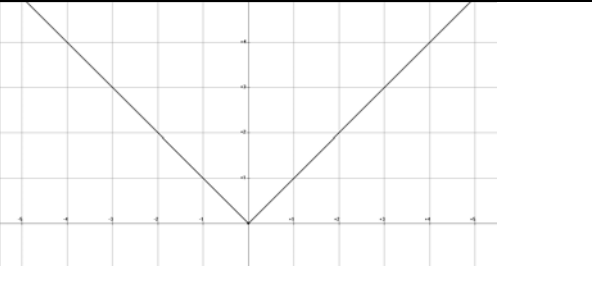
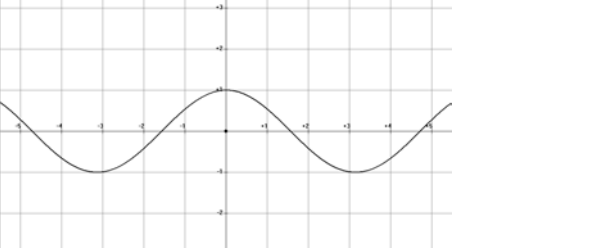
1. $A_1 = \int_a^b c dx = c \cdot (b - a)$

2. $A_2 = \int_a^b c \cdot x dx = c \frac{b^2}{2} - c \frac{a^2}{2}$

3. $A_3 = \int_a^b c \cdot x^2 dx = c \cdot \frac{b^3}{3} - c \cdot \frac{a^3}{3}$

4. $A_4 = \int_a^b \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma dx = \alpha \cdot \frac{b^3}{3} - \alpha \cdot \frac{a^3}{3} + \beta \cdot \frac{b^2}{2} - \beta \cdot \frac{a^2}{2} + \gamma \cdot (b - a) =$

$A_4 = \frac{\alpha}{3} \cdot (b^3 - a^3) + \frac{\beta}{2} \cdot (b^2 - a^2) + \gamma \cdot (b - a)$

<p>5.</p> $A_5 = \int_a^b x dx = \begin{cases} \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} & \text{si } 0 \leq a \leq b \\ \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2} & \text{si } a \leq 0 \leq b \\ \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} & \text{si } a \leq b \leq 0 \end{cases}$	
<p>6.</p> $A_6 = \int_0^\pi \cos(x) dx = 0$ <p>par raison de symétrie</p>	

4. Vérifiez l'inégalité donnée par comparaison avec une autre fonction (sans calculer les intégrales) :

1. $\int_0^{0,1} x^4 dx < 10^{-5}$ car sur $[0 ; 0,1]$ on a l'inégalité $f(x) = x^4 \leq 0,0001 = 10^{-4}$

$$\Rightarrow \int_0^{0,1} x^4 dx < \int_0^{0,1} 10^{-4} dx = 10^{-4} \cdot 0,1 = 10^{-5}$$

2. $\int_0^1 e^x dx \geq 1$ car sur $[0 ; 1]$ on a l'inégalité $f(x) = e^x \geq 1$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^x dx > \int_0^1 1 dx = 1 \cdot (1 - 0) = 1$$

3. $\int_0^1 \sqrt{x} dx > 0,5$ car sur $[0 ; 1]$ on a l'inégalité $\sqrt{x} \geq x$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{x} dx > \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = 0,5$$

4.

$$0,5 \cdot \pi < \int_0^\pi \sin(x) dx < \pi \text{ car sur}$$

$$[0 ; \pi] \text{ on a l'inégalité } \sin(x) \leq 1$$

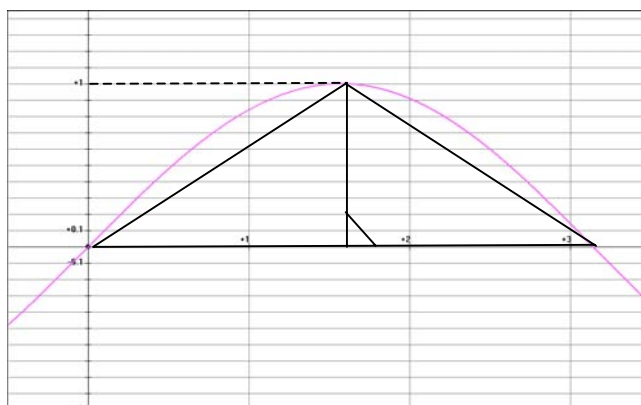
$$\Rightarrow \int_0^\pi \sin(x) dx < \int_0^\pi 1 \cdot dx < \pi$$

et d'autre part, le triangle isocèle

minorant, de sommet $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$

a pour aire $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} < \int_0^\pi \sin(x) dx \text{ d'où finalement } \frac{\pi}{2} < \int_0^\pi \sin(x) dx < \pi$$



5 Exprimez en une seule intégrale :

$$1. \int_5^1 f(x) dx + \int_{-3}^5 f(x) dx = \int_{-3}^5 f(x) dx + \int_5^1 f(x) dx = \int_{-3}^1 f(x) dx$$

$$2. \int_4^1 f(t) dt + \int_6^4 f(t) dt = \int_6^4 f(t) dt + \int_4^1 f(t) dt = \int_6^1 f(t) dt$$

3.

$$\int_{-2}^6 f(x) dx - \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^6 f(x) dx + \int_2^{-2} f(x) dx = \int_2^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^6 f(x) dx = \int_2^6 f(x) dx$$

$$4. \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^a f(t) dt + \int_a^{x+h} f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt$$
