❶ Justifiez que : $\int_0^b c\,dx = c\cdot b$ et $\int_0^b x\,dx = \frac{1}{2}b^2$ et $\int_0^b x^2\,dx = \frac{1}{3}b^3$.

$\int_0^b c\,dx =$ l'aire d'un rectangle de largeur b et de hauteur c, donc l'intégrale vaut : $c \cdot b$.

$\int_0^b x\,dx =$ l'aire d'un triangle rectangle de largeur de base b et de hauteur b également, donc l'intégrale vaut : $\frac{1}{2}b^2$

$\int_0^b x^2\,dx = \frac{1}{3}b^3$. Cette égalité est plus difficile à justifié. C'est ce qui a été fait dans le cours en page 6, lorsque l'aire sous une parabole a été calculée.

---

❷ Déterminez exactement l'aire limitée par la courbe de $f(x) = x^2 + x$, l'axe Ox, ainsi que par les droites d'équation $x = 0$ et $x = b$, telles que $b \geq 0$.
L'aire cherchée est égale à :

$\int_0^b x^2 + x\,dx =$ propriété (2) des intégrales

$\int_0^b x^2\,dx + \int_0^b x\,dx =$

$\frac{1}{3}\cdot b^3 + \frac{1}{2}\cdot b^2$ selon l'exercice précédent.

---

❸ Comme il a été vu que $\int_0^b x^2\,dx = \frac{1}{3}b^3$ et $\int_0^b x\,dx = \frac{1}{2}b^2$, on peut en déduire :

1. $\int_0^1 4x^2dx = 4\cdot\int_0^1 x^2dx = 4\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$
2. $\int_0^1 (7-2x)\,dx = \int_0^1 7\,dx + \int_0^1 -2x\,dx = 7\cdot\int_0^1 dx - 2\cdot\int_0^1 x\,dx = 7\cdot 1 - 2\cdot\frac{1}{2} = 6$
3. $\int_0^1 \left(x^2-3x+6\right)dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_0^1 -3x\,dx + \int_0^1 6\,dx = \frac{1}{3} - 3\cdot\int_0^1 x\,dx + 6\cdot\int_0^1 dx =$
$\frac{1}{3} - 3\cdot\frac{1}{2} + 6\cdot 1 = \frac{2-9+36}{6} = \frac{29}{6}$
4. $\int_0^1 (x-2)^2\,dx = \int_0^1 \left(x^2-4x+4\right)dx = \int_0^1 x^2dx + \int_0^1 -4x\,dx + \int_0^1 4dx = \frac{1}{3} - 4\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot 1 = \frac{7}{3}$

---

❹ Sachant que $\int_0^1 f(x)dx = 3$, $\int_1^2 f(x)dx = 4$ et $\int_2^3 f(x)dx = -8$, calculez :

1. $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = 3 + 4 = 7$
2. $\int_0^1 3\cdot f(x)dx = 3\cdot\int_0^1 f(x)dx = 3\cdot 3 = 9$
3. $\int_0^3 8\cdot f(x)dx = 8\cdot\int_0^3 f(x)dx = 8\cdot\left[\int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx\right] = 8\cdot[3+4+(-8)] = -8$
4. $\int_3^1 2\cdot f(x)dx = 2\cdot\int_3^1 f(x)dx = 2\cdot\left[-\int_1^3 f(x)dx\right] = -2\left[\int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx\right] = -2\cdot(4-8) = 8$

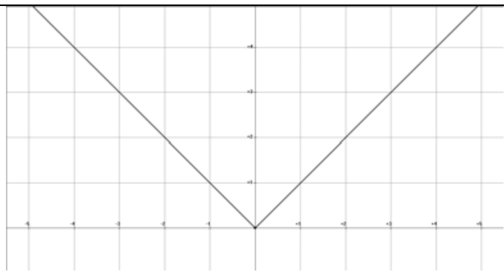
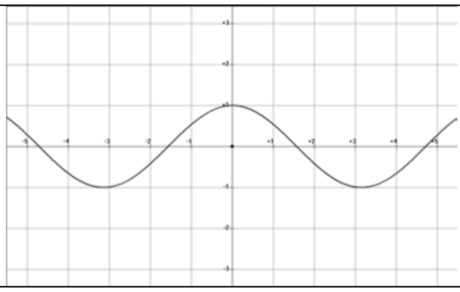
❺ Rappel : $\int_0^b x^2\,dx = \frac{1}{3}b^3$ et $\int_0^b x\,dx = \frac{1}{2}b^2$, on peut en déduire les intégrales définies suivantes dans lesquelles $a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$ sont des nombres réels, avec la seule condition $a < b$.

1. $$A_1 = \int_a^b c\,dx = c\cdot(b-a)$$

2. $$A_2 = \int_a^b c\cdot x\,dx = c\frac{b^2}{2} - c\frac{a^2}{2}$$

3. $$A_3 = \int_a^b c\cdot x^2\,dx = c\cdot\frac{b^3}{3} - c\cdot\frac{a^3}{3}$$

4. $$A_4 = \int_a^b \alpha\cdot x^2 + \beta\cdot x + \gamma\,dx = \alpha\cdot\frac{b^3}{3} - \alpha\cdot\frac{a^3}{3} + \beta\cdot\frac{b^2}{2} - \beta\cdot\frac{a^2}{2} + \gamma\cdot(b-a) =$$
$$A_4 = \frac{\alpha}{3}\cdot\left(b^3 - a^3\right) + \frac{\beta}{2}\cdot\left(b^2 - a^2\right) + \gamma\cdot(b-a)$$

5. $A_5 = \int_a^b \lvert x\rvert\,dx = \begin{cases} \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} & \text{si} \quad 0 \le a \le b \\ \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2} & \text{si} \quad a \le 0 \le b \\ \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} & \text{si} \quad a \le b \le 0 \end{cases}$	
6. $A_6 = \int_0^{\pi} \cos(x)\,dx = 0$ par raison de symétrie	

❻ Vérifiez l'inégalité donnée par comparaison avec une autre fonction (sans calculer les intégrales) :

1. $\int_0^{0,1} x^4\,dx < 10^{-5}$ car sur $[0\ ;\ 0,1]$ on a l'inégalité $f(x) = x^4 \le 0,0001 = 10^{-4}$

$\Rightarrow \int_0^{0,1} x^4\,dx < \int_0^{0,1} 10^{-4}\,dx = 10^{-4}\cdot 0,1 = 10^{-5}$

2. $\int_0^1 e^x\,dx \ge 1$ car sur $[0\ ;\ 1]$ on a l'inégalité $f(x) = e^x \ge 1$

$\Rightarrow \int_0^1 e^x\,dx > \int_0^1 1\,dx = 1\cdot(1-0) = 1$

3. $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx > 0,5$ car sur $[0\ ;\ 1]$ on a l'inégalité $\sqrt{x} \ge x$

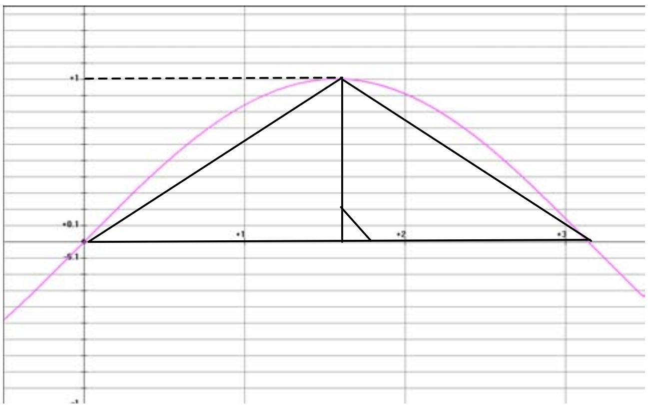
$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{x}\,dx > \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = 0,5$

4.

$0,5\cdot\pi < \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx < \pi$ car sur $[0\ ;\ \pi]$ on a l'inégalité $\sin(x) \le 1$

$\Rightarrow \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx < \int_0^{\pi} 1\cdot dx < \pi$

et d'autre part, le triangle isocèle minorant, de sommet $\left(\frac{\pi}{2};1\right)$ a pour aire $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1$



$\Rightarrow \frac{\pi}{2} < \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$ d'où finalement $\frac{\pi}{2} < \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx < \pi$

---

❼ Exprimez en une seule intégrale :

1. $\int_5^1 f(x)dx + \int_{-3}^5 f(x)dx = \int_{-3}^5 f(x)dx + \int_5^1 f(x)dx = \int_{-3}^1 f(x)dx$

2. $\int_4^1 f(t)dt + \int_6^4 f(t)dt = \int_6^4 f(t)dt + \int_4^1 f(t)dt = \int_6^1 f(t)dt$

3.
$\int_{-2}^6 f(x)dx - \int_{-2}^2 f(x)dx = \int_{-2}^6 f(x)dx + \int_2^{-2} f(x)dx = \int_2^{-2} f(x)dx + \int_{-2}^6 f(x)dx = \int_2^6 f(x)dx$

4. $\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^a f(t)dt + \int_a^{x+h} f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$
