Objectif

L'objectif est de calculer la somme harmonique ou une somme analogue, dans laquelle tous les nombres contenant le chiffre 9 ont été éliminé.
On verra une astuce numérique, qui permet de calculer efficacement ces sommes.

Notations, conventions, relations, développements

Notons :

$S(i,j)=\sum_{k=10^i}^{10^{i+1}-1}\frac{1}{k^j}$, c'est une somme sur tous les entiers positifs de i chiffres.

Exemple : $S(5,1)=\sum_{k=10000}^{99999}\frac{1}{k} = \sum_{k=1000}^{9999}\frac{1}{(10\cdot k)}+\frac{1}{(10\cdot k+1)}+\frac{1}{(10\cdot k+2)}+\ldots+\frac{1}{(10\cdot k+9)}$

$$S(i+1,j)=\sum_{k=10^i}^{10^{i+1}-1}\frac{1}{(10\cdot k)^j}+\frac{1}{(10\cdot k+1)^j}+\frac{1}{(10\cdot k+2)^j}+\ldots+\frac{1}{(10\cdot k+9)^j}$$

$$S(i+1,j)=\sum_{k=10^i}^{10^{i+1}-1}\frac{1}{(10\cdot k)^j}\cdot\left(1+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{10\cdot k}\right)^j}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{10\cdot k}\right)^j}+\ldots+\frac{1}{\left(1+\frac{9}{10\cdot k}\right)^j}\right)$$

On obtient la relation :

$$S(i+1,j)=\sum_{k=10^i}^{10^{i+1}-1}\frac{1}{(10\cdot k)^j}\cdot\left(\sum_{p=0}^{9}\left(1+\frac{p}{10\cdot k}\right)^{-j}\right)$$

Utilisons le développement en série de : $\frac{1}{\left(1+\frac{p}{10\cdot k}\right)^j} = \left(1+\frac{p}{10\cdot k}\right)^{-j}$

$$\left(1+\frac{p}{10\cdot k}\right)^{-1} = 1-\frac{p}{10\cdot k}+\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^2-\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^3+\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^4-\ldots$$

$$\left(1+\frac{p}{10\cdot k}\right)^{-2} = 1-2\cdot\frac{p}{10\cdot k}+3\cdot\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^2-4\cdot\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^3+5\cdot\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^4-\ldots$$

$$\left(1+\frac{p}{10\cdot k}\right)^{-3} = 1-3\cdot\frac{p}{10\cdot k}+6\cdot\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^2-10\cdot\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^3+90\cdot\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^4-\ldots$$

$$\left(1+\frac{p}{10\cdot k}\right)^{-j} = 1+c(1,j)\cdot\frac{p}{10\cdot k}+c(2,j)\cdot\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^2+c(3,j)\cdot\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^3+c(4,j)\cdot\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^4-\ldots,$$ avec

$$c(1,j)=-j\ ;\ c(2,j)=\frac{j\cdot(j+1)}{2!}\ ;\ c(3,j)=-\frac{j\cdot(j+1)\cdot(j+2)}{3!}\ ;\ c(r+1,j)=-c(r,j)\cdot\frac{r+j}{r+1}$$

Donc : $\left(1+\frac{p}{10\cdot k}\right)^{-j} = 1+\sum_{r=1}^{\infty}c(r,j)\cdot\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^r$

$$\left(1+\frac{p}{10\cdot k}\right)^{-j} = \sum_{r=0}^{\infty}c(r,j)\cdot\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^r\ ;\ c(0,j)=1\ ;\ 0^0=1$$

Ces développements en série nous permettent d'écrire :

$$S(i+1,j)=\sum_{k=10^i}^{10^{i+1}-1}\frac{1}{(10\cdot k)^j}\cdot\sum_{p=0}^{9}\left(1+\frac{p}{10\cdot k}\right)^{-j}$$

$$S(i+1,j)=\sum_{k=10^i}^{10^{i+1}-1}\frac{1}{(10\cdot k)^j}\cdot\sum_{p=0}^{9}\sum_{r=0}^{\infty}c(r,j)\cdot\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^r$$

$$S(i+1,j)=\sum_{k=10^i}^{10^{i+1}-1}\frac{1}{(10\cdot k)^j}\cdot\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{9}c(r,j)\cdot\left(\frac{p}{10}\right)^r\cdot\frac{1}{k^r}$$

$$S(i+1,j)=\sum_{k=10^i}^{10^{i+1}-1}\frac{1}{10^{j-1}\cdot k^j}\cdot\sum_{r=0}^{\infty}c(r,j)\cdot d(r)\cdot\frac{1}{k^r}\quad\text{avec } d(r)=\frac{1}{10}\cdot\sum_{p=0}^{9}\left(\frac{p}{10}\right)^r\quad;\quad 0^0=1$$

$d(0)=1$; $d(1)=0{,}45$; $d(2)=0{,}285$; $d(3)=0{,}2025$

$$S(i+1,j)=\frac{1}{10^{j-1}}\cdot\sum_{r=0}^{\infty}c(r,j)\cdot d(r)\cdot\sum_{k=10^i}^{10^{i+1}-1}\frac{1}{k^{j+r}}$$ La somme sur r converge rapidement.

$$\boxed{S(i+1,j)=\frac{1}{10^{j-1}}\cdot\sum_{r=0}^{\infty}c(r,j)\cdot d(r)\cdot S(i,r+j)}$$ rappels : $S(i,j)=\sum_{k=10^i}^{10^{i+1}-1}\frac{1}{k^j}$

$c(0,j)=1$; $c(1,j)=-j$; $c(2,j)=\frac{j\cdot(j+1)}{2!}$; $c(3,j)=-\frac{j\cdot(j+1)\cdot(j+2)}{3!}$;

$$c(r+1,j)=-c(r,j)\cdot\frac{r+j}{r+1}$$

<u>Exemples plus explicites :</u>

$$S(i+1,1)=\sum_{r=0}^{\infty}c(r,1)\cdot d(r)\cdot S(i,r+1)$$

$$S(i+1,1)=S(i,1)-0{,}45\cdot S(i,2)+0{,}285\cdot S(i,3)-0{,}2025\cdot S(i,4)+\ldots$$

$$S(i+1,2)=\frac{1}{10}\cdot\sum_{r=0}^{\infty}c(r,2)\cdot d(r)\cdot S(i,r+2)$$

$$S(i+1,2)=0{,}1\cdot\left(S(i,2)-2\cdot 0{,}45\cdot S(i,3)+3\cdot 0{,}285\cdot S(i,4)-4\cdot 0{,}2025\cdot S(i,5)+\ldots\right)$$

$$S(i+1,3)=\frac{1}{10^2}\cdot\sum_{r=0}^{\infty}c(r,3)\cdot d(r)\cdot S(i,r+3)$$

$$S(i+1,3)=0{,}01\cdot\left(S(i,3)-3\cdot 0{,}45\cdot S(i,4)+6\cdot 0{,}285\cdot S(i,5)-10\cdot 0{,}2025\cdot S(i,6)+\ldots\right)$$

$$S(i+1,4)=\frac{1}{10^3}\cdot\sum_{r=0}^{\infty}c(r,4)\cdot d(r)\cdot S(i,r+4)$$

$$S(i+1,4)=0{,}001\cdot\left(S(i,4)-4\cdot 0{,}45\cdot S(i,5)+10\cdot 0{,}285\cdot S(i,6)-20\cdot 0{,}2025\cdot S(i,7)+\ldots\right)$$

Notations, conventions, relations, développements

Notons :

$E_c(i)$ = L'ensemble de tous les nombres entiers positifs, qui écrit en base 10, sont formés de i chiffres et ne contiennent pas le chiffre c.

$S_c(i,j) = \sum_{k \in E_c(i)} \frac{1}{k^j}$, c'est une somme sur tous les entiers positifs de $E_c(i)$.

$$S_c(i+1,j) = \sum_{k \in E_c(i)} \frac{1}{(10\cdot k)^j} + \frac{1}{(10\cdot k+1)^j} + \frac{1}{(10\cdot k+2)^j} + \ldots + \frac{1}{(10\cdot k+9)^j} - \frac{1}{(10\cdot k+c)^j}$$

$$S_c(i+1,j) = \sum_{k \in E_c(i)} \frac{1}{(10\cdot k)^j} \cdot \left(1 + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{10\cdot k}\right)^j} + \frac{1}{\left(1+\frac{2}{10\cdot k}\right)^j} + \ldots + \frac{1}{\left(1+\frac{9}{10\cdot k}\right)^j} - \frac{1}{\left(1+\frac{c}{10\cdot k}\right)^j}\right)$$

On obtient la relation :

$$S_c(i+1,j) = \sum_{k \in E_c(i)} \frac{1}{(10\cdot k)^j} \cdot \left(\sum_{p=0 \quad p\neq c}^{9} \left(1+\frac{p}{10\cdot k}\right)^{-j}\right)$$

Utilisons le développement en série de : $\frac{1}{\left(1+\frac{p}{10\cdot k}\right)^j} = \left(1+\frac{p}{10\cdot k}\right)^{-j}$

$$\left(1+\frac{p}{10\cdot k}\right)^{-1} = 1 - \frac{p}{10\cdot k} + \left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^2 - \left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^3 + \left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^4 - \ldots$$

$$\left(1+\frac{p}{10\cdot k}\right)^{-2} = 1 - 2\cdot\frac{p}{10\cdot k} + 3\cdot\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^2 - 4\cdot\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^3 + 5\cdot\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^4 - \ldots$$

$$\left(1+\frac{p}{10\cdot k}\right)^{-3} = 1 - 3\cdot\frac{p}{10\cdot k} + 6\cdot\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^2 - 10\cdot\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^3 + 90\cdot\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^4 - \ldots$$

$$\left(1+\frac{p}{10\cdot k}\right)^{-j} = 1 + c(1,j)\cdot\frac{p}{10\cdot k} + c(2,j)\cdot\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^2 + c(3,j)\cdot\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^3 + c(4,j)\cdot\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^4 - \ldots, \text{ avec}$$

$$c(1,j) = -j \;;\; c(2,j) = \frac{j\cdot(j+1)}{2!} \;;\; c(3,j) = -\frac{j\cdot(j+1)\cdot(j+2)}{3!} \;;\; c(r+1,j) = -c(r,j)\cdot\frac{r+j}{r+1}$$

Donc : $\left(1+\frac{p}{10\cdot k}\right)^{-j} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} c(r,j)\cdot\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^r$

$$\left(1+\frac{p}{10\cdot k}\right)^{-j} = \sum_{r=0}^{\infty} c(r,j)\cdot\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^r \;;\; c(0,j) = 1 \;;\; 0^0 = 1$$

Ces développements en série nous permettent d'écrire :

$$S_c(i+1,j) = \sum_{k\in E_c(i)} \frac{1}{(10\cdot k)^j} \cdot \sum_{p=0\ \ p\neq c}^{9} \left(1+\frac{p}{10\cdot k}\right)^{-j}$$

$$S_c(i+1,j) = \sum_{k\in E_c(i)} \frac{1}{(10\cdot k)^j} \cdot \sum_{p=0\ \ p\neq c}^{9} \sum_{r=0}^{\infty} c(r,j)\cdot\left(\frac{p}{10\cdot k}\right)^r$$

$$S_c(i+1,j) = \sum_{k\in E_c(i)} \frac{1}{(10\cdot k)^j} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{p=0\ \ p\neq c}^{9} c(r,j)\cdot\left(\frac{p}{10}\right)^r\cdot\frac{1}{k^r}$$

$$S_c(i+1,j) = \sum_{k\in E_c(i)} \frac{1}{10^{j-1}\cdot k^j} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} c(r,j)\cdot d_c(r)\cdot\frac{1}{k^r} \quad \text{avec } d_c(r) = \frac{1}{10}\cdot\sum_{p=0\ \ p\neq c}^{9}\left(\frac{p}{10}\right)^r \quad ; \quad 0^0 = 1$$

$$d_c(0) = 0{,}9 \quad ; \quad d_c(1) = 0{,}45-\frac{c}{100} \quad ; \quad d_c(2) = 0{,}285-\frac{c^2}{1000} \quad ; \quad d_c(3) = 0{,}2025-\frac{c^3}{10000}$$

$$S_c(i+1,j) = \sum_{r=0}^{\infty} c(r,j)\cdot d_c(r)\cdot\frac{1}{10^{j-1}}\cdot\sum_{k\in E_c(i)}\frac{1}{k^{j+r}}$$ La somme sur r converge rapidement.

$$\boxed{S_c(i+1,j) = \frac{1}{10^{j-1}} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} c(r,j)\cdot d_c(r)\cdot S_c(i,r+j)}$$ rappels : $S_c(i,j) = \sum_{k\in E_c(i)} \frac{1}{k^j}$

$$c(0,j) = 1 \quad ; \quad c(1,j) = -j \quad ; \quad c(2,j) = \frac{j\cdot(j+1)}{2!} \quad ; \quad c(3,j) = -\frac{j\cdot(j+1)\cdot(j+2)}{3!} \quad ;$$

$$c(r+1,j) = -c(r,j)\cdot\frac{r+j}{r+1}$$

<u>Exemples plus explicites :</u>

$$S_9(i+1,1) = \sum_{r=0}^{\infty} c(r,1)\cdot d_9(r)\cdot S_9(i,r+1)$$

$$S_9(i+1,1) = 0{,}9\cdot S_9(i,1) - 0{,}36\cdot S_9(i,2) + 0{,}204\cdot S_9(i,3) - 0{,}1296\cdot S_9(i,4) + \ldots$$

$$S_9(i+1,2) = \frac{1}{10}\cdot\sum_{r=0}^{\infty} c(r,2)\cdot d_9(r)\cdot S_9(i,r+2)$$

$$S_9(i+1,2) = 0{,}1\cdot\left(0{,}9\cdot S_9(i,2) - 2\cdot 0{,}36\cdot S_9(i,3) + 3\cdot 0{,}204\cdot S_9(i,4) - 4\cdot 0{,}1296\cdot S_9(i,5) + \ldots\right)$$

$$S_9(i+1,3) = \frac{1}{10^2}\cdot\sum_{r=0}^{\infty} c(r,3)\cdot d_9(r)\cdot S_9(i,r+3)$$

$$S_9(i+1,3) = 0{,}01\cdot\left(0.9\cdot S_9(i,3) - 3\cdot 0{,}36\cdot S_9(i,4) + 6\cdot 0{,}204\cdot S_9(i,5) - 10\cdot 0{,}1296\cdot S_9(i,6) + \ldots\right)$$

$$S_9(i+1,4) = \frac{1}{10^3}\cdot\sum_{r=0}^{\infty} c(r,4)\cdot d_9(r)\cdot S_9(i,r+4)$$

$$S_9(i+1,4) = 0{,}001\cdot\left(0{,}9\cdot S_9(i,4) - 4\cdot 0{,}36\cdot S_9(i,5) + 10\cdot 0{,}204\cdot S_9(i,6) - 20\cdot 0{,}1296\cdot S_9(i,7) + \ldots\right)$$

Approximations, ordre de grandeur.

Pour la somme : $\boxed{S(i,j)=\sum_{k=10^i}^{10^{i+1}-1}\frac{1}{k^j}}$

$$S(i,j)=\sum_{k=10^i}^{10^{i+1}-1}\frac{1}{k^j}\approx\int_{10^i}^{10^{i+1}}\frac{1}{x^j}\,dx=\left.\frac{1}{(j-1)\cdot x^{j-1}}\right]_{10^i}^{10^{i+1}}\approx\frac{1}{(j-1)\cdot 10^{i\cdot(j-1)}}\quad \text{Si } j\geq 1$$

Donc on a l'approximation : $\boxed{S(i,j)\approx\frac{1}{(j-1)\cdot 10^{i\cdot(j-1)}}}$ Si $j>1$

Si $j=1$, on a $S(i,1)\approx \mathrm{Ln}(10)$, indépendamment de i.

Pour $j\geq 1$, la valeur de $S(i,j)$ converge rapidement vers 0, si i et/ou j augmente.

Une formule pour calculer le nombre π.

Sachant que : $\frac{\pi^2}{6}==\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{i=0}^{\infty}S(i,2)$ et que $S(i,2)$ converge rapidement vers 0 pour i tendant vers l'infini, cela donne une manière pratique de calculer des milliers de chiffres de π .

Une formule pour calculer le nombre γ d'Euler-Mascheroni.

Sachant que : $\gamma==\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}-\ln(N)=\lim_{M\to\infty}\sum_{i=0}^{M-1}S(i,1)-M\cdot\ln(10)$, cela donne une manière pratique de calculer des milliers de chiffres du nombre γ d'Euler-Mascheroni.
c.f. : https://fr.wikipedia.org/wiki/Constante_d'Euler-Mascheroni
$\gamma\approx 0{,}577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 860\ 6\ldots$

On peut aussi utiliser :

$$\gamma==\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}-\ln(N)-\frac{1}{2\cdot N}+\frac{1}{12\cdot N^2}-\frac{1}{120\cdot N^4}+\ldots$$

$$\gamma=\sum_{i=0}^{M-1}S(i,1)-M\cdot\ln(10)-\frac{1}{2\cdot 10^M}+\frac{1}{12\cdot 100^M}-\frac{1}{120\cdot 10000^M}+\ldots$$

Le calcul pour M égale à quelques centaines ou quelques milliers est simple. Cela donne une précision de plusieurs milliers de chiffres.

Généralisation

Notons :

$S(B,i,j) = \sum_{k=B^i}^{B^{i+1}-1} \frac{1}{k^j}$, c'est une somme sur tous les entiers positifs de i chiffres.

$$S(B,i+1,j) = \sum_{k=B^i}^{B^{i+1}-1} \frac{1}{(B\cdot k)^j}+\frac{1}{(B\cdot k+1)^j}+\frac{1}{(B\cdot k+2)^j}+\ldots+\frac{1}{(B\cdot k+B-1)^j}$$

$$S(B,i+1,j) = \sum_{k=B^i}^{B^{i+1}-1} \frac{1}{(B\cdot k)^j}\cdot\left(1+\left(1+\frac{1}{B\cdot k}\right)^{-j}+\left(1+\frac{2}{B\cdot k}\right)^{-j}+\ldots+\left(1+\frac{B-1}{B\cdot k}\right)^{-j}\right)$$

On obtient la relation :

$$S(B,i+1,j) = \sum_{k=B^i}^{B^{i+1}-1} \frac{1}{(B\cdot k)^j} \cdot \left(\sum_{p=0}^{B-1}\left(1+\frac{p}{B\cdot k}\right)^{-j}\right)$$

Utilisons le développement en série de : $\left(1+\frac{p}{B\cdot k}\right)^{-j}$

$$\left(1+\frac{p}{B\cdot k}\right)^{-1} = 1-\frac{p}{B\cdot k}+\left(\frac{p}{B\cdot k}\right)^2-\left(\frac{p}{B\cdot k}\right)^3+\left(\frac{p}{B\cdot k}\right)^4-\ldots$$

$$\left(1+\frac{p}{B\cdot k}\right)^{-2} = 1-2\cdot\frac{p}{B\cdot k}+3\cdot\left(\frac{p}{B\cdot k}\right)^2-4\cdot\left(\frac{p}{B\cdot k}\right)^3+5\cdot\left(\frac{p}{B\cdot k}\right)^4-\ldots$$

$$\left(1+\frac{p}{B\cdot k}\right)^{-3} = 1-3\cdot\frac{p}{B\cdot k}+6\cdot\left(\frac{p}{B\cdot k}\right)^2-10\cdot\left(\frac{p}{B\cdot k}\right)^3+90\cdot\left(\frac{p}{B\cdot k}\right)^4-\ldots$$

$$\left(1+\frac{p}{B\cdot k}\right)^{-j} = 1+c(1,j)\cdot\frac{p}{B\cdot k}+c(2,j)\cdot\left(\frac{p}{B\cdot k}\right)^2+c(3,j)\cdot\left(\frac{p}{B\cdot k}\right)^3+c(4,j)\cdot\left(\frac{p}{B\cdot k}\right)^4-\ldots, \text{ avec}$$

$$c(1,j)=-j \;;\; c(2,j)=\frac{j\cdot(j+1)}{2!} \;;\; c(3,j)=-\frac{j\cdot(j+1)\cdot(j+2)}{3!} \;;\; c(r+1,j)=-c(r,j)\cdot\frac{r+j}{r+1}$$

Donc : $\left(1+\frac{p}{B\cdot k}\right)^{-j} = 1+\sum_{r=1}^{\infty} c(r,j)\cdot\left(\frac{p}{B\cdot k}\right)^r$

$$\left(1+\frac{p}{B\cdot k}\right)^{-j} = \sum_{r=0}^{\infty} c(r,j)\cdot\left(\frac{p}{B\cdot k}\right)^r \;;\; c(0,j)=1 \;;\; 0^0=1$$

Ces développements en série nous permettent d'écrire :

$$S(B,i+1,j) = \sum_{k=B^i}^{B^{i+1}-1} \frac{1}{(B\cdot k)^j} \cdot \sum_{p=0}^{B-1} \left(1+\frac{p}{B\cdot k}\right)^{-j}$$

$$S(B,i+1,j) = \sum_{k=B^i}^{10^{i+1}-1} \frac{1}{(B\cdot k)^j} \cdot \sum_{p=0}^{B-1} \sum_{r=0}^{\infty} c(r,j)\cdot\left(\frac{p}{B\cdot k}\right)^r$$

$$S(B,i+1,j) = \sum_{k=B^i}^{B^{i+1}-1} \frac{1}{(B\cdot k)^j} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{B-1} c(r,j)\cdot\left(\frac{p}{B}\right)^r \cdot \frac{1}{k^r}$$

$$S(B,i+1,j) = \sum_{k=B^i}^{B^{i+1}-1} \frac{1}{B^{j-1}\cdot k^j} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} c(r,j)\cdot d(B,r)\cdot\frac{1}{k^r} \quad \text{avec} \quad d(B,r) = \frac{1}{B}\cdot\sum_{p=0}^{B-1}\left(\frac{p}{B}\right)^r \quad ; \quad 0^0 = 1$$

$$S(B,i+1,j) = \frac{1}{B^{j-1}}\cdot\sum_{r=0}^{\infty} c(r,j)\cdot d(B,r)\cdot \sum_{k=B^i}^{B^{i+1}-1} \frac{1}{k^{j+r}} \quad \text{La somme sur } r \text{ converge rapidement.}$$

$$\boxed{S(B,i+1,j) = \frac{1}{B^{j-1}} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} c(r,j)\cdot d(B,r)\cdot S(B,i,r+j)} \quad \text{rappels : } S(B,i,j) = \sum_{k=B^i}^{B^{i+1}-1} \frac{1}{k^j}$$

$$c(0,j) = 1 \;;\; c(1,j) = -j \;;\; c(2,j) = \frac{j\cdot(j+1)}{2!} \;;\; c(3,j) = -\frac{j\cdot(j+1)\cdot(j+2)}{3!} \;;$$

$$c(r+1,j) = -c(r,j)\cdot\frac{r+j}{r+1}$$

Avec la généralisation qui remplace 10 par une base B quelconque on peut encore améliorer la formule en constatant que :

$$S(B^2,i,j) = S(B,2\cdot i,j) + S(B,2\cdot i+1,j)$$

Donc, à partir d'une certaine valeur de i qui reste à déterminer théoriquement, on peut utiliser :

$$S(B^2,i+1,j) = \frac{1}{B^{2j-2}} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} c(r,j)\cdot d(B^2,r)\cdot S(B^2,i,r+j)$$

Pour calculer la somme jusqu'à B^{1000}, au lieu de calculer 1000 valeurs de S , on en calcule que 500.

On peut réitérer avec : $S(B^2,i,j) = S(B,2\cdot i,j) + S(B,2\cdot i+1,j)$ pour calculer $S(B^4,i+1,j)$

Ce qui divise encore une fois le nombre de calculs par 2.

On sait que $\boxed{S(B,i,j)\approx\frac{1}{(j-1)\cdot B^{i\cdot(j-1)}}}$, devient rapidement petit pour i grand et pour j grand.

Si on désire une précision de l'ordre de $\frac{1}{B^{1000}}$, il faut que $i\cdot j > 1000$. Pas valide pour $j = 1$.

Pour calculer $S(B,i+1,1)$ avec la précision désirée, pour un i donné il faut utiliser

$S(B,i,r+j)$ avec $r+j$ variant entre 1 et $\frac{1000}{i}$.

Plus i augmente, moins il faut calculer de termes.

Pour de petites valeurs de i, il est plus efficace de calculer explicitement : $S(B,i,j) = \sum_{k=B^i}^{B^{i+1}-1} \frac{1}{k^j}$

Le calcul explicite demande $B^i \cdot (B-1)$ calculs, pour chaque valeur de j.

Si le calcul est fait explicitement pour i allant de 0 à $I_{\max}$, ensuite on utilise la formule, le nombre de calculs explicites à faire est de : $B^{I_{max}+1} \cdot \frac{1000}{I_{max}+1}$.

Pour le calcul de $S(B^{1000}, 0, j) = \sum_{k=1}^{B^{1000}-1} \frac{1}{k^j}$,

L'utilisation de la formule demande une triple somme :
une sur i allant de $I_{\max}$ à 1000,
une sur j allant de 1 à $\frac{1000}{i+1}$,
une sur r allant de 1 à $\frac{1000}{i+1} - j$.

Sur r cela fait donc $\frac{1000}{i+1} - j$ calculs.

Sur r et j cela fait environ $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1000}{i+1}\right)^2$ calculs.

Au total le nombre de calculs est donc d'environ :

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1000}{I_{max}+1}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1000}{I_{max}+2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1000}{I_{max}+3}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1000}{1000}\right)^2 =$$

$$\frac{1000^2}{2} \cdot \left(\left(\frac{1}{I_{max}+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{I_{max}+2}\right)^2 + \left(\frac{1}{I_{max}+3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{1000}\right)^2 \right) =$$

$$\frac{1000^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \ldots - \frac{1}{I_{max}^2} \right) = \frac{1000^2}{2} \cdot H(I_{max})$$

$H(1) = 0.645$; $H(2) = 0.395$; $H(3) = 0.284$; $H(4) = 0.221$; $H(5) = 0.181$; $H(6) = 0.154$; ...
$H(I_{\max})$ ne diminue pas très vite avec $I_{\max}$, alors que les calculs explicites augmentes rapidement.

Si on remplace la base B par B^2, cela remplace 1000 par 500 et $I_{\max}$ par $\frac{I_{max}}{2}$.

Par exemple, si $I_{\max} = 4$, on remplace le nombre de calculs :

$$\frac{1000^2}{2} \cdot H(4) = \frac{1000^2}{2} \cdot 0{,}221 \quad \text{par}$$

$$\frac{500^2}{2} \cdot H(2) = \frac{500^2}{2} \cdot 0{,}395 = \frac{1000^2}{2} \cdot \frac{0{,}395}{4} = \frac{1000^2}{2} \cdot \frac{0{,}395}{4} = \frac{1000^2}{2} \cdot 0{,}0985$$

Cette substitution est nettement plus avantageuse.

Conclusion, chaque fois que $I_{\max}$ a atteint 4, on remplace la base B par B^2 et $I_{\max} = 4$ par $\frac{I_{max}}{2} = 2$.

Mieux ? à chaque fois que $I_{\max}$ a atteint 2, on remplace la base B par B^2 et $I_{\max} = 2$ par $\frac{I_{max}}{2} = 1$?

Le cas $j = 1$ est spécial, la convergence est lente, à étudier plus précisément.
Probablement que de prendre la base $B = 2$ est optimal.

Conclusion, algorithmes :

Pour le calcul de $S(B^{1024}, 0, j) = \sum_{k=1}^{B^{1000}-1} \frac{1}{k^j}$, Rappel : $S(B, i, j) = \sum_{k=B^i}^{B^{i+1}-1} \frac{1}{k^j}$

Rappel : $S(B^q, i, j) \approx \frac{1}{(j-1) \cdot B^{q \cdot i \cdot (j-1)}}$.

Probablement que $B = 2$ est avantageux. (?)

<u>Variante (A) de l'algorithme :</u>
(a1) On pose $q = 1$, on choisit la base et pow_max = 1024, 1024 peut être remplacé.
On calcule explicitement $S(B, i, j)$ pour $i = 0, 1, 2$, $j=1$.
Pour $i = 2$, j va de 1 à **1024** / 2.

(a2) On utilise : $S(B^q, i+1, j) = \frac{1}{B^{q \cdot (j-1)}} \cdot \sum_{r=0}^{r_{max}} c(r, j) \cdot d(B^q, r) \cdot S(B^q, i, r+j)$; $r_{max} = \frac{1024}{q \cdot i} + 1 - j$.

pour $i = 2 .. 4$; $j = 1$ .. **1024** / $(4 \cdot q)$; $r = 0$ .. **1024** / $(q \cdot i) + 1 - j$
On remplace B^q par $B^{2 \cdot q}$ et on utilise : $S(B^{2 \cdot q}, i, j) = S(B^q, 2 \cdot i, j) + S(B^q, 2 \cdot i+1, j)$,
pour $i = 2$; $j = 1$ .. **1024** / $(4 \cdot q)$
$q := 2 \cdot q$
Ensuite on revient en (a2).

<u>Variante (B) de l'algorithme :</u>
(b1) On pose $q = 1$, on choisit la base et pow_max = 1024, 1024 peut être remplacé.
On calcule explicitement $S(B, i, j)$ pour $i = 0, 1, 2, 3$, $j=1$.
Pour $i = 3$, j va de 1 à **1024** / 3.

(b2) On utilise : $S(B^q, i+1, j) = \frac{1}{B^{q \cdot (j-1)}} \cdot \sum_{r=0}^{r_{max}} c(r, j) \cdot d(B^q, r) \cdot S(B^q, i, r+j)$; $r_{max} = \frac{1024}{q \cdot i} + 1 - j$.

pour $i = 3 .. 6$; $j = 1$ .. **1024** / $(6 \cdot q)$; $r = 0$ .. **1024** / $(q \cdot i) + 1 - j$
On remplace B^q par $B^{2 \cdot q}$ et on utilise : $S(B^{2 \cdot q}, i, j) = S(B^q, 2 \cdot i, j) + S(B^q, 2 \cdot i+1, j)$,
pour $i = 3$; $j = 1$ .. **1024** / $(6 \cdot q)$
$q := 2 \cdot q$
Ensuite on revient en (b2).

<u>Variante (C) de l'algorithme :</u>
(c1) On pose $q = 1$, on choisit la base et pow_max = 1024, 1024 peut être remplacé.
On calcule explicitement $S(B, i, j)$ pour $i = 0, 1, 2, 4$, $j=1$.
Pour $i = 4$, j va de 1 à **1024** / 4.

(c2) On utilise : $S(B^q, i+1, j) = \frac{1}{B^{q \cdot (j-1)}} \cdot \sum_{r=0}^{r_{max}} c(r, j) \cdot d(B^q, r) \cdot S(B^q, i, r+j)$; $r_{max} = \frac{1024}{q \cdot i} + 1 - j$.

pour $i = 4 .. 8$; $j = 1$ .. **1024** / $(8 \cdot q)$; $r = 0$ .. **1024** / $(q \cdot i) + 1 - j$
On remplace B^q par $B^{2 \cdot q}$ et on utilise : $S(B^{2 \cdot q}, i, j) = S(B^q, 2 \cdot i, j) + S(B^q, 2 \cdot i+1, j)$,
pour $i = 4$; $j = 1$ .. **1024** / $(8 \cdot q)$
$q := 2 \cdot q$
Ensuite on revient en (c2).

Dans la variante (A), le nombre de calculs par itération vaut : $\frac{1024}{4 \cdot q} \cdot \frac{1024}{q} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1024^2}{4 \cdot q^2} \cdot 1{,}08$

Dans la variante (B) : $\frac{1024}{6 \cdot q} \cdot \frac{1024}{q} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1024^2}{6 \cdot q^2} \cdot 0{,}95$, c'est moins.

Dans la variante (C) : $\frac{1024}{8 \cdot q} \cdot \frac{1024}{q} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) = \frac{1024^2}{8 \cdot q^2} \cdot 0{,}884$.

Pour le calcule complet, il faut sommer sur les valeurs de q, ce qui ne change presque rien.

Nombre total de calcul : (A) $\frac{1024^2}{4} \cdot 2 \cdot 1{,}08$; (B) $\frac{1024^2}{6} \cdot 2 \cdot 0{,}95$; (C) $\frac{1024^2}{8} \cdot 2 \cdot 0{,}884$

L'algorithme (C) semble donc meilleur.

Le nombre total d'opérations varie donc comme $\mathbf{1024^2}$, c'est-à-dire le **carré** de la précision désirée.

Le **carré** est très dérangeant, car pour doubler la précision, il faut quadrupler le nombre d'opérations, ce qui est décevant.
L'accroissement du nombre d'opérations ne varie pas de façon linéaire avec la précision.

Exemple d'évolution des calculs à faire pour l'algorithme (C) :
On démarre avec une base B, on calcule $S(B, 0..8, j)$
Suite avec une base B^2, on calcule $S(B^2, 4..8,) = S(B, 8..16, 1)$
Suite avec une base B^4, on calcule $S(B^4, 4..8, 1) = S(B, 16..32, 1)$
Suite avec une base B^8, on calcule $S(B^8, 4..8, 1) = S(B, 32..64, 1)$
... 16, 32, 64, ...
Suite avec une base B^{128}, on calcule $S(B^{128}, 4..8, 1) = S(B, 512..1024, 1)$
On a que 7 itérations.