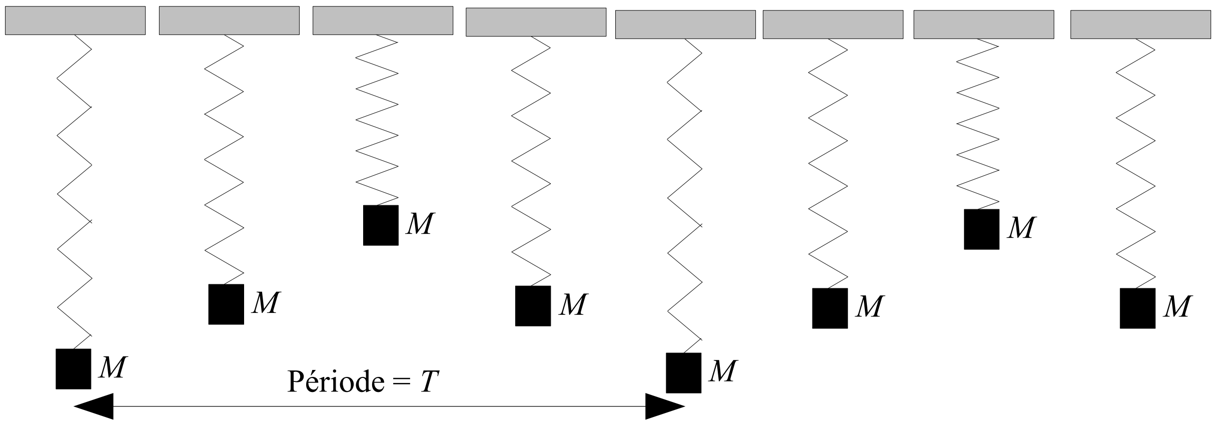
But

Le **but** des pages qui suivent est de déterminer la **période d'oscillation** d'un ressort en fonction de divers paramètres connus, tels que la masse M suspendue au ressort, la masse m et la constante d'élasticité k du ressort.



Introduction

La majorité des livres indiquent que la **période d'oscillation** d'un ressort de constante d'élasticité k suspendu verticalement et ayant une masse M attachée à l'extrémité du bas est :

$$T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{M}{k}}$$

Cette relation n'est valable que si on néglige la masse m du ressort devant M.
Nous allons montrer comment la formule ci-dessus est obtenue.

Une formule moins approximative est : $T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{M+m/3}{k}}$ où m est la masse du ressort.
Elle est valable si la masse m du ressort est plus petite que M (i.e. si $m<M$)

La relation correcte est plus compliquée. La voici :

$$\boxed{T=\frac{2\cdot\pi}{\Omega}\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}} \quad \text{où } \Omega \text{ satisfait la relation : } \boxed{\Omega\cdot\tan(\Omega)=\frac{m}{M}}$$

Pratiquement le T correct peut s'obtenir ainsi :

$$T_c=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{M+m/3}{k}}\cdot\left(\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\pi}-\frac{0,10264+0,062\cdot m/M}{1+0,6016\cdot m/M+0,11271\cdot m^2/M^2}+err\right) \quad |err|<2\cdot10^{-5}.$$

On peut aussi obtenir Ω en itérant $\Omega=\arctan\left(\frac{m}{M\cdot\Omega}\right)$, en commençant par : $\Omega_0=\sqrt{\frac{m}{M+m/3}}$.

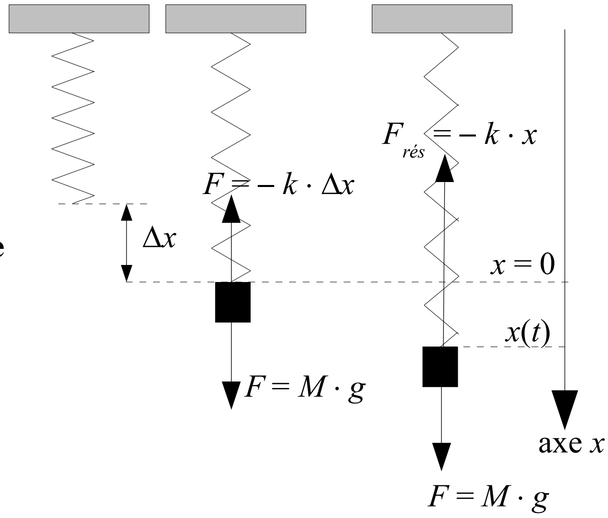
Remarquons que si $\frac{m}{M}$ est petit, alors Ω est petit et $\tan(\Omega)\approx\Omega$

Dans ce cas, $\Omega=\sqrt{\frac{m}{M}}$ et on retrouve la première formule.

On verra que la "formule moins approximative" est plus proche de la relation correcte.

Pour terminer cette introduction, notons encore que ces relations ont été testées expérimentalement et que c'est même à cause d'une différence notable entre la théorie et l'expérience que la relation correcte a été recherchée.

Théorie simplifiée



On constate expérimentalement que la force F exercée par un ressort est proportionnelle à son élongation Δx et de sens opposé.

$$F = -k \cdot \Delta x$$

La constante de proportionnalité k s'appelle la **constante élastique** du ressort ou la **raideur** du ressort.

La théorie simplifiée suppose que la même force s'applique sur une masse M attachée à l'extrémité du ressort, lorsque celui-ci oscille. C'est une approximation correcte si la masse m du ressort peut être négligée devant celle de la masse M.

Dans ce cas, on a : $M \cdot a = F_{résultante} = M \cdot g - k \cdot \Delta x$

En choisissant l'origine de l'axe x à l'endroit où la force résultante est nulle, on a :

$$\boxed{M \cdot a = -k \cdot x}$$

Sous forme d'équation différentielle on a : $M \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$

On cherche une fonction $x(t)$ telle que l'accélération correspondante $a(t) = \ddot{x}(t)$ satisfasse l'égalité ci-dessus. On montre que la fonction est de la forme :

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot (t - t_0))$$

A est l'amplitude maximale d'oscillation.
t_0 est un instant où la vitesse est maximale dirigée vers le bas et la force résultante est nulle.

Dans ce cas, la vitesse en fonction du temps est : $v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot (t - t_0))$
et l'accélération en fonction du temps est : $a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot (t - t_0))$

Pour que l'équation soit satisfaite, il faut que $M \cdot \omega^2 = k$, donc $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$

La période T est le temps pour faire exactement une oscillation. Il faut donc que :
T soit le plus petit nombre positif telle que : $x(0) = x(T)$ et $v(0) = v(T)$ donc il faut que :

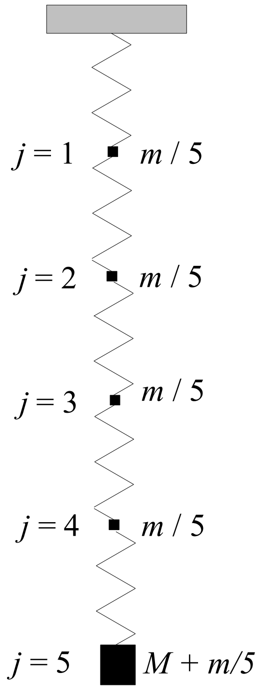
$\sin(\omega \cdot (T + t - t_0)) = \sin(\omega \cdot (t - t_0))$ et $\cos(\omega \cdot (T + t - t_0)) = \cos(\omega \cdot (t - t_0))$.

Cela est satisfait si $\omega \cdot T = 2 \cdot \pi$.

La période vaut donc : $\boxed{T = \dfrac{2 \cdot \pi}{\omega} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{M}{k}}}$

Cette formule est valable si la masse du ressort m est négligeable devant M.

Théorie améliorée



Exemple avec $N = 5$

Pour tenir compte de la masse du ressort, on peut le décomposer en beaucoup de petits ressorts avec de nombreuses petites masses. Dans l'exemple ci-contre, le ressort a été décomposé en $N = 5$ parties, avec chaque petite masse valant $m / 5$.

Vu que pour une même force qui s'applique sur le ressort, l'élongation d'un cinquième du ressort est 5 fois plus petite que celle de tout le ressort, la constante d'élasticité d'un cinquième de ressort est 5 fois plus grande que celle du ressort.

Si on décompose le ressort en N parties, la masse de chaque partie sera de m / N et sa constante élastique sera de $N \cdot k$.

La théorie améliorée tient compte de la masse du ressort, mais suppose que lors de l'oscillation, l'amplitude d'oscillation de chaque partie est proportionnelle à j, où $j = 1$ pour la première partie, $j = 2$ pour la deuxième partie, ..., $j = N$ pour la dernière partie.

Considérons l'énergie totale du système, qui doit être conservée.

Notons $x_j(t)$ la position de la $j^{\text{ème}}$ masse en fonction du temps.
Notons $x_N(t)$ la position de la masse M en fonction du temps.
Choisissons l'origine du temps ($t = 0$) et de l'axe x lorsque $x_N(0)$ = la position au repos de M.

L'énergie cinétique de la $j^{\text{ème}}$ masse est : $\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{N}\cdot\left(v_j(t)\right)^2$

L'énergie potentielle de la $j^{\text{ème}}$ masse est : $-\frac{m}{N}\cdot g\cdot x_j(t)+constante_j$

L'énergie cinétique de la masse M est : $\frac{1}{2}\cdot M\cdot\left(v_N(t)\right)^2$

L'énergie potentielle de la masse M est : $-M\cdot g\cdot x_N(t)+constante_N$

L'énergie due à la tension dans le ressort est : $\frac{1}{2}\cdot k\cdot\left(x_N(t)+x_{réf}\right)^2$

$\frac{1}{2}\cdot k\cdot\left(x_{réf}\right)^2$ est l'énergie de tension dans le ressort lorsqu'il n'oscille pas.

On fait l'hypothèse que l'amplitude d'oscillation de chaque partie est proportionnelle à sa position j.
Donc $x_j(t)=\frac{1}{N}\cdot j\cdot x_N(t)$ et $v_j(t)=\frac{1}{N}\cdot j\cdot v_N(t)$

L'énergie potentielle de toutes les petites masses est : $E_{pot}=-\sum_{j=1}^{N}\frac{m}{N}\cdot g\cdot x_j(t)+constante$

$$E_{pot}=-\frac{1}{N}\cdot\frac{m}{N}\cdot g\cdot\sum_{j=1}^{N} j\cdot x_N(t)+constante$$

$E_{pot}=-\frac{1}{2}\cdot m\cdot g\cdot x_N(t)+constante$ On a utilisé : $\sum_{j=1}^{N} j = \frac{N\cdot(N+1)}{2}=\frac{N^2}{2}$ si N est très grand.

L'énergie cinétique de toutes les petites masses est : $E_{cin} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{N} \cdot \left(v_j(t) \right)^2$

$= E_{cin} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{N} \cdot \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{N} \cdot j \cdot v_N(t) \right)^2$

$= E_{cin} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{N} \cdot \left(\frac{1}{N} \cdot v_N(t) \right)^2 \cdot \sum_{j=1}^{N} j^2$

$= E_{cin} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{N} \cdot \left(\frac{1}{N} \cdot v_N(t) \right)^2 \cdot \frac{N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)}{6}$

$= E_{cin} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(v_N(t) \right)^2$ pour N très grand. On néglige les termes en $\frac{1}{N}$.

Finalement, l'énergie totale du système qui est conservée est : Energie totale =

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot m + M \right) \cdot \left(v_N(t) \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot m + M \right) \cdot g \cdot x_N(t) + \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(x_N(t) + x_{réf} \right)^2 + constante_1 = constante_2$$

Cherchons une solution du type : $x_N(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$
Donc $v_N(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$

L'équation devient :

$$A^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot m + M \right) \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) - A \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m + M \right) \cdot g \cdot \sin(\omega \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(A \cdot \sin(\omega \cdot t) + x_{réf} \right)^2 = constante$$

En développant, il faut que les deux termes suivants soient constant.

$$A^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{m}{3} + M \right) \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) + k \cdot \sin^2(\omega \cdot t) \right] \text{ et } A \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \left[x_{réf} \cdot k - \left(\frac{m}{2} + M \right) \cdot g \right]$$

Ces deux termes sont constants si :

$$\left(\frac{m}{3} + M \right) \cdot \omega^2 = k \quad \text{et} \quad x_{réf} \cdot k = \left(\frac{m}{2} + M \right) \cdot g$$

Donc : $\omega = \sqrt{\frac{k}{M + m/3}}$

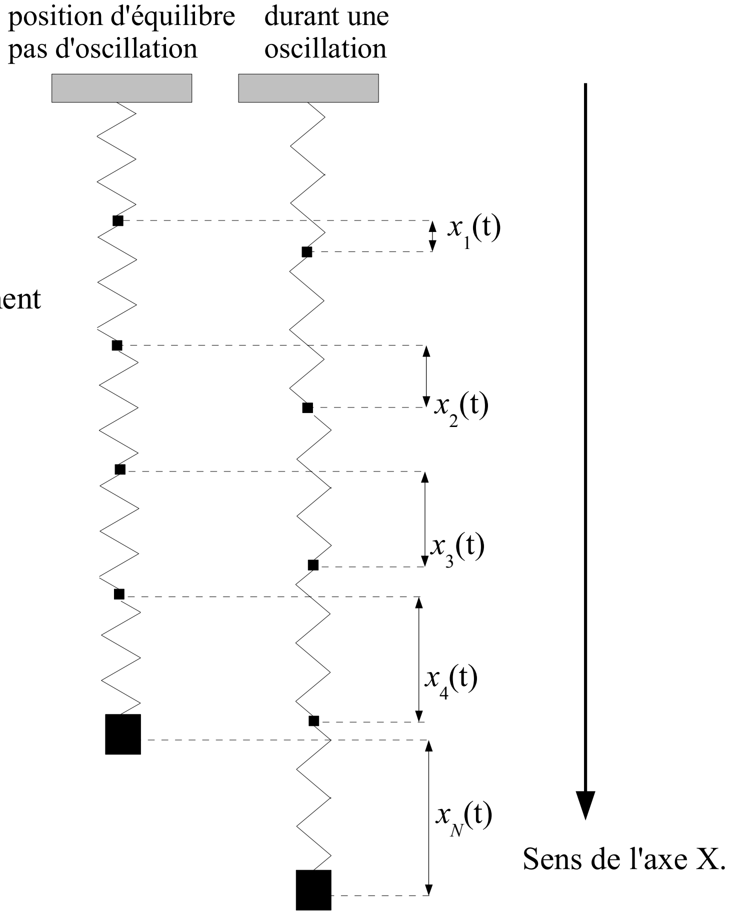
La période est donc : $\boxed{T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{M + m/3}{k}}}$

Théorie pour aboutir à la relation correcte

Comme précédemment décomposons le ressort en beaucoup de petites parties.
On le décompose en N parties de masse m / N chacune et de constante d'élasticité $N \cdot k$.

Notations :
N = nombre de partie du ressort (5 sur l'exemple)
m = la masse du ressort.
M = masse attachée en bas du ressort.
m / N = masse d'une partie.
k = constante élastique du ressort.
$N \cdot k$ = constante élastique de chaque partie.

$x_j(t) =$	déplacement de la $j^{\text{ème}}$ partie relativement à sa position d'équilibre.
$x_N(t) =$	déplacement de la masse M relativement à sa position d'équilibre.
$v_j(t) =$	vitesse de la $j^{\text{ème}}$ partie.
$a_j(t) =$	accélération de la $j^{\text{ème}}$ partie.
$x_0(t) =$	0, le haut du ressort ne bouge pas.



Pour simplifier l'écriture, écrivons x_j au lieu de $x_j(t)$.
La force résultante sur la $j^{\text{ème}}$ partie provient de l'élongation du bas et du haut, donc :

$$F_{rés,\,j} = N \cdot k \cdot (x_{j+1} - x_j) - N \cdot k \cdot (x_j - x_{j-1})$$

$$= F_{rés,\,j} = \frac{m}{N} \cdot a_j = N \cdot k \cdot (x_{j+1} - 2 \cdot x_j + x_{j-1})$$

Pour j allant de 1 à $N-1$

Pour la masse M, $\left(\frac{m}{N} \text{ est négligé devant } M \right)$, on a : $F_{rés,\,N} = M \cdot a_N = N \cdot k \cdot (x_{N-1} - x_N)$

En résumé :

$\boxed{x_0 = 0}$ et $\boxed{\frac{m}{N} \cdot a_j = N \cdot k \cdot (x_{j+1} - 2 \cdot x_j + x_{j-1})}$ et $\boxed{M \cdot a_N = N \cdot k \cdot (x_{N-1} - x_N)}$ $j = 1..N-1$.

L'accélération $a_j = a_j(t)$ est la dérivée seconde de $x_j = x_j(t)$.

Une solution particulière de ce système d'équations est : $\boxed{x_j(t) = A_j \cdot \sin(\omega \cdot t)}$
On a : $v_j(t) = \dot{x}_j(t) = A_j \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$
On a : $a_j(t) = \ddot{x}_j(t) = -A_j \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$

Avec cette solution particulière, les équations deviennent :

$\boxed{A_0=0}$ et $\boxed{-\frac{m}{N}\cdot A_j\cdot\omega^2=N\cdot k\cdot(A_{j+1}-2\cdot A_j+A_{j-1})}$ et $\boxed{-M\cdot A_N\cdot\omega^2=N\cdot k\cdot(A_{N-1}-A_N)}$

$A_{j+1}-2\cdot A_j+A_{j-1}$ ressemble à une dérivée seconde.
$A_{N-1}-A_N$ ressemble à moins une dérivée.

Ces deux remarques mène à chercher une solution pour A_j de la forme : $\boxed{A_j=B\cdot\sin\left(\frac{\Omega}{N}\cdot j\right)}$

La "condition aux limites" $A_0=0$ est satisfaite.

Développons en série :

$$\frac{A_{j+1}}{B}=\sin\left(\frac{\Omega}{N}\cdot(j+1)\right)=\sin\left(\frac{\Omega}{N}\cdot j\right)+\frac{\Omega}{N}\cdot\cos\left(\frac{\Omega}{N}\cdot j\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Omega^2}{N^2}\cdot\sin\left(\frac{\Omega}{N}\cdot j\right)+\frac{\Omega^3}{N^3}\cdot(...)$$
$$-2\cdot\frac{A_j}{B}=-2\cdot\sin\left(\frac{\Omega}{N}\cdot j\right)$$
$$\frac{A_{j-1}}{B}=\sin\left(\frac{\Omega}{N}\cdot(j-1)\right)=\sin\left(\frac{\Omega}{N}\cdot j\right)-\frac{\Omega}{N}\cdot\cos\left(\frac{\Omega}{N}\cdot j\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Omega^2}{N^2}\cdot\sin\left(\frac{\Omega}{N}\cdot j\right)+\frac{\Omega^3}{N^3}\cdot(...)$$

En additionnant on obtient :

Donc $A_{j+1}-2\cdot A_j+A_{j-1}=-\frac{\Omega^2}{N^2}\cdot B\cdot\sin\left(\frac{\Omega}{N}\cdot j\right)+\frac{\Omega^3}{N^3}\cdot(...)$

Il faut donc satisfaire la condition : $\frac{m}{N}\cdot\omega^2=N\cdot k\cdot\left[\frac{\Omega^2}{N^2}+\frac{\Omega^3}{N^3}\cdot(...)\right]$

Après simplification : $m\cdot\omega^2=k\cdot\left[\Omega^2+\frac{\Omega^3}{N}\cdot(...)\right]$

Vu que N est très grand, le terme $\frac{\Omega^3}{N}$ est négligeable.

Finalement, il faut satisfaire la condition : $m\cdot\omega^2=k\cdot\Omega^2$

Donc : $\boxed{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\Omega}$ et $\boxed{T=\frac{2\cdot\pi}{\omega}=\frac{2\cdot\pi}{\Omega}\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}}$

Il faut encore satisfaire la condition : $-M\cdot A_N\cdot\omega^2=N\cdot k\cdot(A_{N-1}-A_N)$
Développons en série :

$$\frac{A_{N-1}}{B}=\sin\left(\frac{\Omega}{N}\cdot(N-1)\right)=\sin(\Omega)-\frac{\Omega}{N}\cdot\cos(\Omega)-\frac{\Omega^2}{N^2}\cdot(...)\quad\text{et}\quad\frac{A_N}{B}=\sin(\Omega)$$

Donc $A_{N-1}-A_N=-\frac{\Omega}{N}\cdot B\cdot\cos(\Omega)+\frac{\Omega^2}{N^2}\cdot(...)$

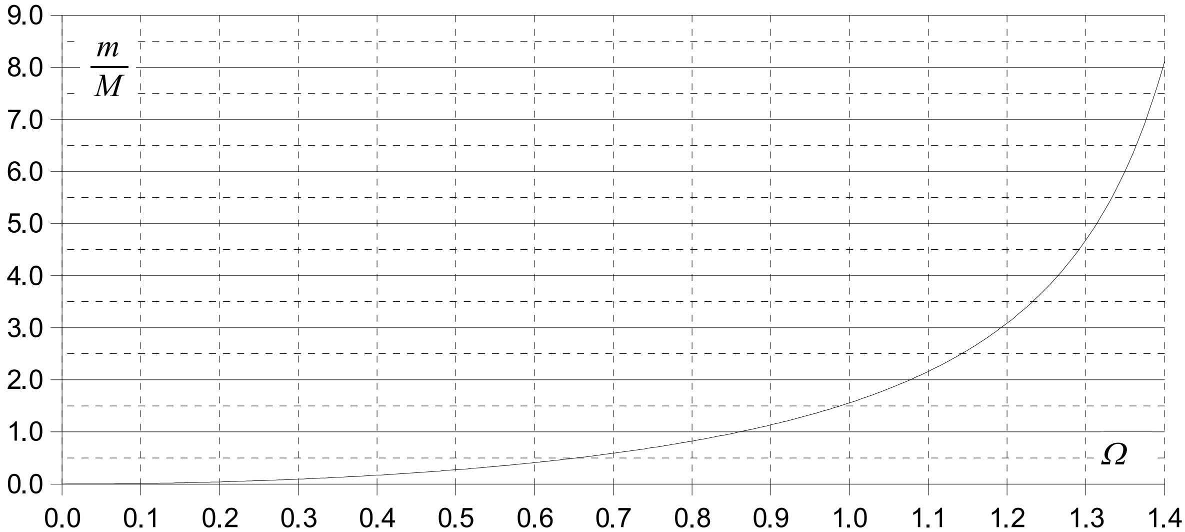
Il faut satisfaire : $-M\cdot\sin(\Omega)\cdot\omega^2=\Omega\cdot\cos(\Omega)\cdot k$, le terme en $1/N$ a été négligé.

Finalement, puisque $m\cdot\omega^2=k\cdot\Omega^2$ la condition à satisfaire est : $\boxed{\Omega\cdot\tan(\Omega)=\frac{m}{M}}$

Cette égalité provient de la deuxième "condition aux limites" à satisfaire.

En résumé, la période d'oscillation est : $\boxed{T=\frac{2\cdot\pi}{\omega}=\frac{2\cdot\pi}{\Omega}\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}}$ où $\boxed{\Omega\cdot\tan(\Omega)=\frac{m}{M}}$.

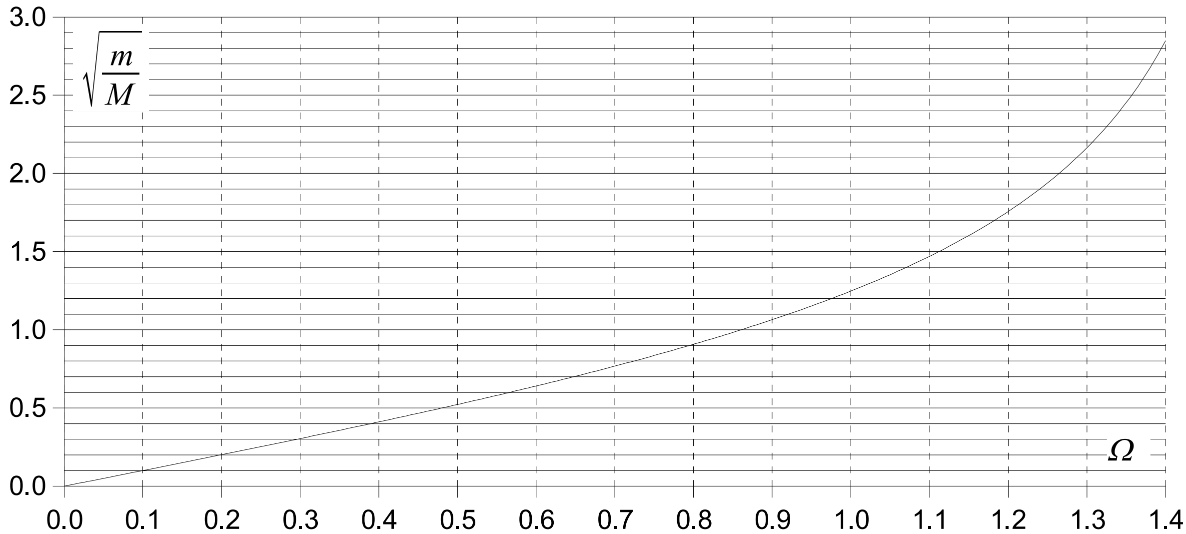
Le graphique de $\frac{m}{M}$ en fonction de Ω est :



Ce graphique montre que pour chaque valeur de m / M, il existe une valeur de Ω.

A la limite, lorsque la masse m du ressort est beaucoup plus grande que la masse M, $\Omega=\frac{\pi}{2}$

Graphique de $\sqrt{\frac{m}{M}}$ en fonction de Ω.



On remarque que tant que m est nettement plus petit que M, le graphique est linéaire et donc $\Omega\approx\sqrt{\frac{m}{M}}$ et donc $T\approx 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{M}{k}}$

Comparaison des trois relations : Période - masses.

Définissions :

$T_s = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{M}{k}}$ théorie simplifiée.

$T_a = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{M+m/3}{k}}$ théorie améliorée.

$T_c = \frac{2\cdot\pi}{\Omega}\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}$ théorie correcte. $\Omega\cdot\tan(\Omega) = \frac{m}{M}$. On sait que : $0<\Omega<\frac{\pi}{2}$

M est la masse du suspendue au bas du ressort.
m est la masse du ressort.
k est la constante élastique du ressort.

Voici quelques développement en série permettant des comparaisons.

$$T_c = T_s\cdot\left(1+\frac{1}{6}\cdot\frac{m}{M}-\frac{1}{360}\cdot\frac{m^2}{M^2}-\frac{11}{5'040}\cdot\frac{m^3}{M^3}+\frac{1'357}{1'814'400}\cdot\frac{m^4}{M^4}+\frac{353}{1'360'800}\cdot\frac{m^5}{M^5}+...\right)$$

Lorsque $M=m$, on a : $T_c = T_s\cdot 1,1627$ et $\frac{T_c - T_s}{T_c} = 0,140$

Dans ce cas, il y a 14% de différence entre la théorie simplifiée et l'expérience.

$$T_a = T_s\cdot\sqrt{1+\frac{1}{3}\cdot\frac{m}{M}}$$

$$T_c = T_a\cdot\left(1+\frac{1}{90}\cdot\frac{m^2}{M^2}-\frac{2}{315}\cdot\frac{m^3}{M^3}+\frac{277}{113'400}\cdot\frac{m^4}{M^4}-\frac{4'073}{10'886'4000}\cdot\frac{m^5}{M^5}+...\right)$$

Le terme en m / M disparaît !

Lorsque $M=m$, on a : $T_c = T_a\cdot 1,00683$ et $\frac{T_c - T_a}{T_c} = 0,0068$

Dans ce cas, il y a 0,68% de différence entre la théorie améliorée et l'expérience.
La différence est difficile à constater expérimentalement.

Lorsque $M=m/2$, on a : $T_c = T_a\cdot 1,0208$ et $\frac{T_c - T_a}{T_c} = 0,0204$

Dans ce cas, il y a 2,0% de différence entre la théorie améliorée et l'expérience.
On commence à constater une différence entre la théorie simplifiée et l'expérience.

Voici encore trois relations, par curiosité.

$$T_a^2 = T_s^2\cdot\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{m}{M}\right)$$

$$T_c^2 = T_s^2\cdot\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{m}{M}+\frac{1}{45}\cdot\frac{m^2}{M^2}-\frac{1}{189}\cdot\frac{m^3}{M^3}+\frac{11}{14'175}\cdot\frac{m^4}{M^4}+\frac{4'247}{5'443'200}\cdot\frac{m^5}{M^5}+...\right)$$

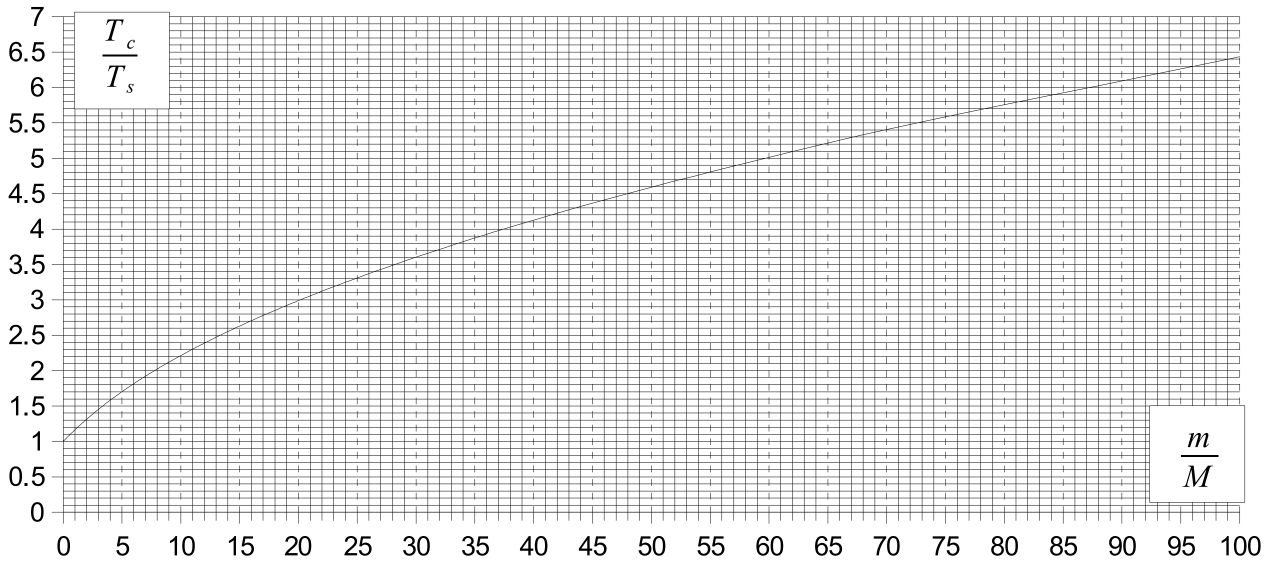
$$\Omega = \sqrt{\frac{m}{M}}\cdot\left(1-\frac{1}{6}\cdot\frac{m}{M}+\frac{11}{360}\cdot\frac{m^2}{M^2}-\frac{17}{5'040}\cdot\frac{m^3}{M^3}-\frac{281}{604'800}\cdot\frac{m^4}{M^4}+\frac{44'029}{119'750'400}\cdot\frac{m^5}{M^5}+...\right)$$

c.f. annexe pour plus d'information.

Quelques graphiques.

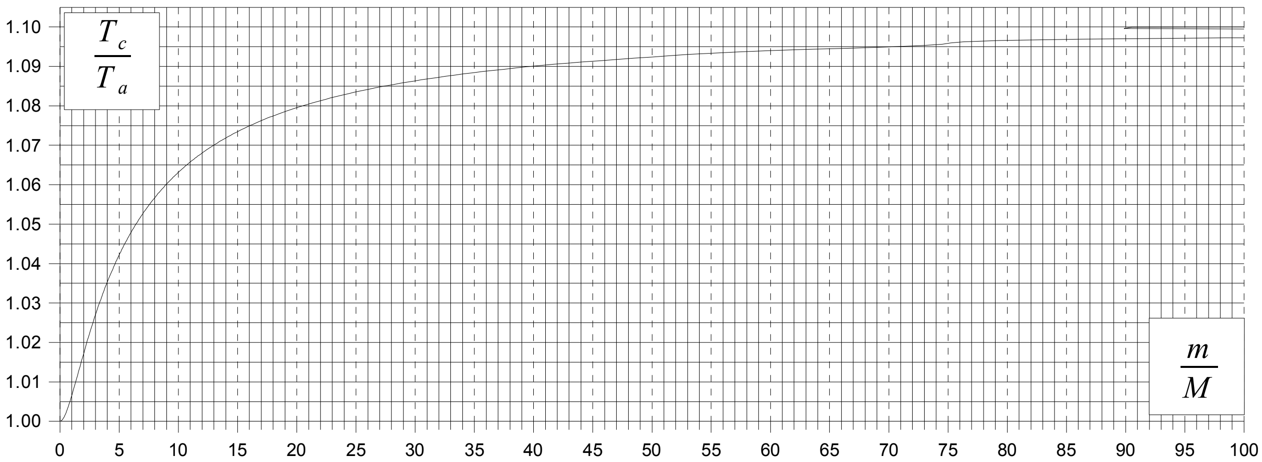
$\frac{T_c}{T_s}=\sqrt{\frac{m}{M}}\cdot\frac{1}{\Omega(m/M)}$ est une fonction qui ne dépend que de $\frac{m}{M}$.

Graphique de $\frac{T_c}{T_s}$ en fonction de $\frac{m}{M}$. Pour $\frac{m}{M}$ grand, $\frac{T_c}{T_s}\approx\frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{\frac{m}{M}}$.



$\frac{T_c}{T_a}=\sqrt{\frac{1}{\frac{M}{m}+\frac{1}{3}}}\cdot\frac{1}{\Omega(m/M)}$ est une fonction qui ne dépend que de $\frac{m}{M}$.

Graphique de $\frac{T_c}{T_a}$ en fonction de $\frac{m}{M}$. Pour $\frac{m}{M}$ grand, $\frac{T_c}{T_a}\approx\sqrt{3}\cdot\frac{2}{\pi}\approx 1{,}1026578$.



Voici une formule pour des calculs pratiques de T_c :

$$T_c=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{M+m/3}{k}}\cdot\left(\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\pi}-\frac{0{,}10264+0{,}062\cdot m/M}{1+0{,}6016\cdot m/M+0{,}11271\cdot m^2/M^2}+err\right)$$

avec $|err|<2\cdot10^{-5}$.

Ceci se vérifie en choisissant des valeurs Ω entre 0 et $\pi/2$, en déduisant la valeur de $m/M=\Omega\cdot\tan(\Omega)$ et de $T_c/T_a=\sqrt{(m/M)/(1+m/(3M))}\ /\ \Omega$, puis en comparant avec l'approximation ci-dessus.

Comparaison avec des résultats expérimentaux.

Voici les résultats d'une *première expérience* :
masse du ressort : $m = 0{,}1040 \pm 0{,}0002$ [kg]
constante élastique : $k = 3{,}920 \pm 0{,}005$ [N / m]

M = masse attachée en bas du ressort.
T_{exp} = période mesurée expérimentalement.
T_c = période théorique selon la théorie ci-dessus.
T_a = période théorique approximative selon la théorie ci-dessus.
T_s = période théorique simplifiée selon la théorie ci-dessus.

M [kg]	T_{exp} $\pm 0{,}005$ [s]	T_c [s]	$\left\lvert\frac{T_c - T_{exp}}{T_c}\right\rvert$	T_a [s]	$\left\lvert\frac{T_a - T_{exp}}{T_a}\right\rvert$	T_s [s]	$\left\lvert\frac{T_s - T_{exp}}{T_s}\right\rvert$
0,000	0,655	0,652	0,46%	0,591	10%	0	/
0,050	0,942	0,940	0,21%	0,923	2,1%	0,710	33 %
0,100	1,170	1,173	0,26%	1,165	0,43%	1,004	16,5%
0,150	1,368	1,369	0,07%	1,364	0,29%	1,229	11,3%
0,200	1,533	1,541	0,52%	1,537	0,26%	1,419	8,0%

Conclusion :
La théorie (T_c) développée ci-dessus est bien vérifiée expérimentalement.
La théorie (T_a) approximative est très bonne à partir du moment où $m < M$.
La théorie (T_s) simplifiée, de la majorité des livres n'est pas bonne lorsque m est comparable à M.

Voici les résultats d'une *deuxième expérience* :
masse du ressort : $m = 0{,}0515 \pm 0{,}0002$ [kg]
constante élastique : $k = 7{,}67 \pm 0{,}005$ [N / m]

M [kg]	T_{exp} $\pm 0{,}005$ [s]	T_c [s]	$\left\lvert\frac{T_c - T_{exp}}{T_c}\right\rvert$	T_a [s]	$\left\lvert\frac{T_a - T_{exp}}{T_a}\right\rvert$	T_s [s]	$\left\lvert\frac{T_s - T_{exp}}{T_s}\right\rvert$
0,000	0,329	0,328	0,30%	0,297	10%	0	/
0,020	0,456	0,447	2,0%	0,437	4,4%	0,321	42 %
0,050	0,595	0,592	0,51%	0,588	1,2%	0,507	17,4%
0,100	0,781	0,778	0,38%	0,777	0,52%	0,717	8,9%
0,150	0,930	0,929	0,11%	0,928	0,22%	0,879	5,8%
0,200	1,054	1,058	0,38%	1,057	0,28%	1,042	1,2%

Il semble que la mesure avec $M = 0{,}020$ [kg] soit douteuse.

Conclusion :
Identique à la précédente.

Travail effectué par Bernard Gisin, après une surprise expérimentale au laboratoire.

Annexe en page suivante...

Annexe :

Rappels : $T_a = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{M+m/3}{k}}$ théorie améliorée.

$T_c = \frac{2\cdot\pi}{\Omega}\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}$ théorie correcte. $\Omega\cdot\tan(\Omega) = \frac{m}{M}$. On sait que : $0<\Omega<\frac{\pi}{2}$

$$\frac{T_c}{T_a} = \sqrt{\frac{1}{\frac{M}{m}+\frac{1}{3}}}\cdot\frac{1}{\Omega(m/M)}$$

M est la masse suspendue au bas du ressort.
m est la masse du ressort.
k est la constante élastique du ressort.

On peut obtenir Ω en itérant $\Omega = \arctan\left(\frac{m}{M\cdot\Omega}\right)$,

en commençant par : $\Omega_0 = \sqrt{\frac{m}{M+m/3}}$. En radians !

$$\frac{1}{\Omega} = \sqrt{\frac{M}{m}+\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\pi} - \frac{0{,}10264\cdot M^2/m^2 + 0{,}062\cdot M/m}{M^2/m^2 + 0{,}6016\cdot M/m + 0{,}11271} + err\right)$$

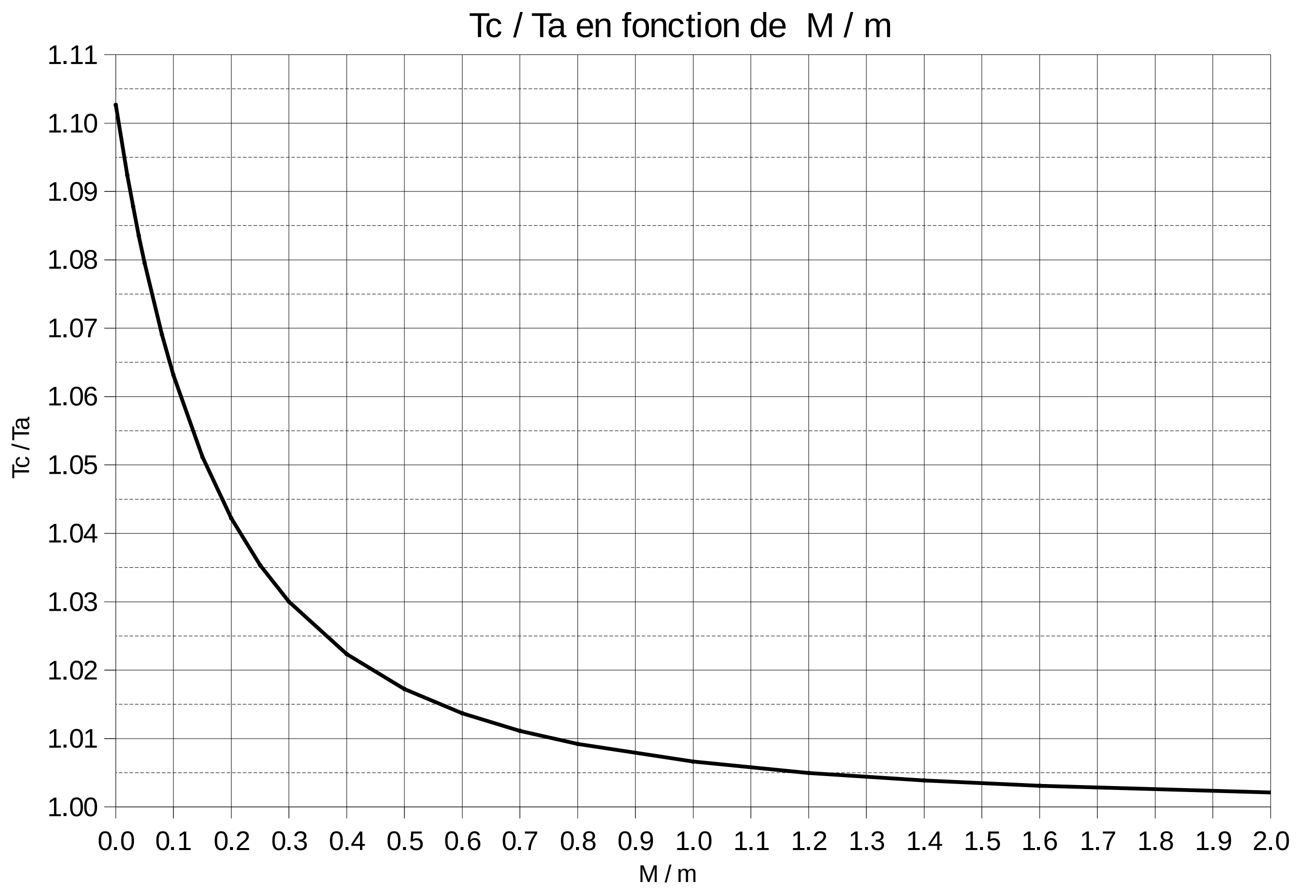
c.f. page 9

$$T_c = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{M+m/3}{k}}\cdot\left(\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\pi} - \frac{0{,}10264\cdot M^2/m^2 + 0{,}062\cdot M/m}{M^2/m^2 + 0{,}6016\cdot M/m + 0{,}11271} + err\right)$$

$|err| < 2\cdot 10^{-5}$

Tableau de valeurs de T_c / T_a en fonction de M / m

Oméga	M / m	Tc / Ta
1.57080	0.0000	1.1027
1.54001	0.0200	1.0924
1.52508	0.0300	1.0878
1.51045	0.0400	1.0835
1.49613	0.0500	1.0796
1.45492	0.0800	1.0691
1.42887	0.1000	1.0632
1.36835	0.1500	1.0512
1.31384	0.2000	1.0422
1.26459	0.2500	1.0354
1.21995	0.3000	1.0300
1.14223	0.4000	1.0223
1.07687	0.5000	1.0172
1.02111	0.6000	1.0137
0.97291	0.7000	1.0111
0.93076	0.8000	1.0092
0.86034	1.0000	1.0066
0.80357	1.2000	1.0050
0.75662	1.4000	1.0039
0.71697	1.6000	1.0031
0.65327	2.0000	1.0021



Annexe suite.

Formule pour calculer Tc / Ta en fonction de M / m

M / m	Tc / Ta	1/Oméga	Oméga
0.0000	1.1027	0.63662	1.57080
0.0100	1.0974	0.64299	1.55523
0.0200	1.0924	0.64936	1.53999
0.0300	1.0878	0.65571	1.52506
0.0400	1.0835	0.66206	1.51044
0.0500	1.0796	0.66839	1.49612
0.0750	1.0707	0.68417	1.46162
0.1000	1.0631	0.69985	1.42889
0.2000	1.0422	0.76112	1.31386
0.3000	1.0300	0.81971	1.21995
0.4000	1.0224	0.87549	1.14221
0.5000	1.0173	0.92863	1.07685
0.6000	1.0137	0.97934	1.02110
0.7000	1.0111	1.02786	0.97290
0.8000	1.0092	1.07441	0.93075
0.9000	1.0078	1.11918	0.89351
1.0000	1.0066	1.16234	0.86033
1.1000	1.0057	1.20405	0.83053
1.2000	1.0050	1.24443	0.80358
1.3000	1.0044	1.28360	0.77906
1.4000	1.0039	1.32165	0.75663
1.5000	1.0034	1.35867	0.73601
1.6000	1.0031	1.39474	0.71698
1.7000	1.0028	1.42992	0.69934
1.8000	1.0025	1.46428	0.68293
1.9000	1.0023	1.49787	0.66762
2.0000	1.0021	1.53073	0.65328

Autre expérience avec un ressort de masse = 0,0155 [kg]
Constante d'élasticité officielle : k = 3,10 [N/m]

Élongation pour une masse de 0,2000 [kg] : 0,625 +- 0,001 [m]
On en déduit la constante d'élasticité : k = 0,2000 * 9,81 / 0,625 = 3,139 +- 0,005 [N/m]
Ce résultat n'est pas compatible avec la valeur officielle. Laquelle est plus fiable ???

Mesures de temps d'oscillations : **Masse du ressort [kg]** **0.0155**

Masse	50*T	T	T²	k classique	k amélioré	M / M_ressoot	K correct
[kg]	[s]	[s]	[s²]	[N/m]	[N/m]		[N/m]
0.0000	14.21	0.2842	0.0808	0.000	2.525	0.0000	3.070
0.0100	22.23	0.4446	0.1977	1.997	3.029	0.6452	3.105
0.2000	80.14	1.6028	2.5690	3.073	3.153	12.9032	3.153

Incertitude sur 50*T = +-0.1 [s]
incertitude sur T = +-0.002 [s]
incertitude sur la mesure des masses : +-0,2 [

La mesure de la durée de 100 oscillations pour une masse nulle est de 28,52 [s], qui confirme une faible incertitude sur la mesure de la durée.
Pour une masse nulle, on trouve k = 3,07 +- 0,02 [N/m], qui est presque compatible avec la mesure officielle, pas trop avec la mesure statique.

Les résultats sont hors incertitudes, pourquoi ?
Peut-être pas, l'incertitude sur la masse du ressort a une importance non négligeable !
Peut-être que le ressort a une masse de 0.0159 [kg], ce qui donnerait des résultats beaucoup plus cohérents, autour de 3,14 [N/m]
cohérent avec la mesure statique.