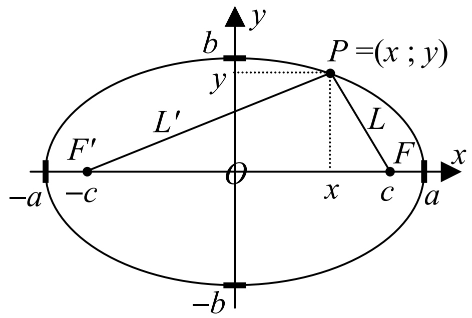
Ce qui suit va donner une définition de l'ellipse, indiquer plusieurs propriétés et les démontrer.

Référence : Le cours de M. Gerhard Wanner, disponible sur :
http://www.unige.ch/~wanner/Geo.html et plus précisément :
http://www.unige.ch/~wanner/teaching/Geo/Geo1.pdf pages 29, 30.

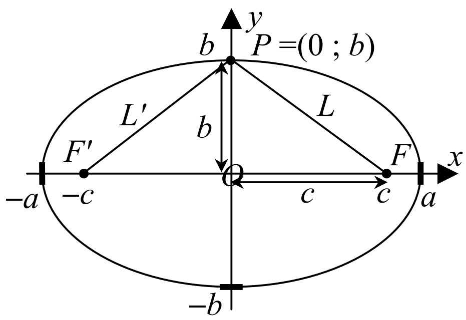
Définition :
Soit F' et F deux points du plan, placés sur l'axe des x pour simplifier.
Soit a un nombre réel positif.
Une ellipse est l'ensemble des points P telles que :

$$\boxed{\text{distance de } F' \text{ à } P \text{ plus distance de } F \text{ à } P \text{ égale } 2\cdot a} \quad \boxed{L' + L = 2\cdot a}$$



Quelques conventions, notations et remarques :

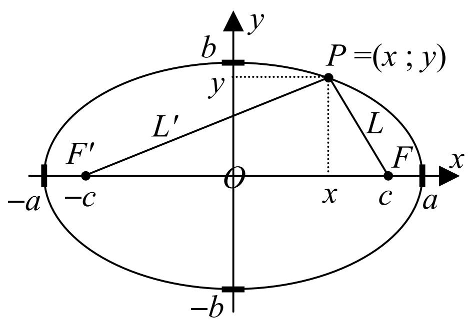
- La distance de F' à P sera notée L' par la suite.
- La distance de F à P sera notée L par la suite.
- On placera un repère d'origine O au milieu entre F' et F.
- Les coordonnées de F' sont : $F' = (-c\ ;\ 0)$.
- Les coordonnées de F sont : $F = (\ c\ ;\ 0)$.
- On notera $P = (x\ ;\ y)$ les coordonnées de P.
- L'abscisse minimale de P est $-a$.
- L'abscisse maximale de P est a.
- L'ordonnée minimale de P est $-b$.
- L'ordonnée maximale de P est b.
- Notons $\boxed{e \overbrace{=}^{\text{définition}} \frac{c}{a}}$, qui s'appelle l'**excentricité**.
  Pour un cercle, $c = 0$; $e = 0$; $a = b =$ rayon.
  Pour une ellipse, $e < 1$.



Quand $x = 0$, on a : $L = L' = a$ par symétrie.
Par Pythagore : $\boxed{b^2 + c^2 = a^2}$

Propriété 1 : $\boxed{L' + L = 2\cdot a}$ par définition.

Propriété 2 : $\boxed{L' - L = 2\cdot e\cdot x}$, car :



Par Pythagore : $\underline{\underline{L^2 = (x-c)^2 + y^2}}$ et $\underline{\underline{L'^2 = (x+c)^2 + y^2}}$

Donc : $L'^2 - L^2 = (x+c)^2 + y^2 - \left[(x-c)^2 + y^2\right]$

$\Leftrightarrow \quad L'^2 - L^2 = \cancel{x^2} + 2\cdot c\cdot x + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} - \left[\cancel{x^2} - 2\cdot c\cdot x + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}\right]$

$\Leftrightarrow \quad L'^2 - L^2 = 4\cdot c\cdot x$

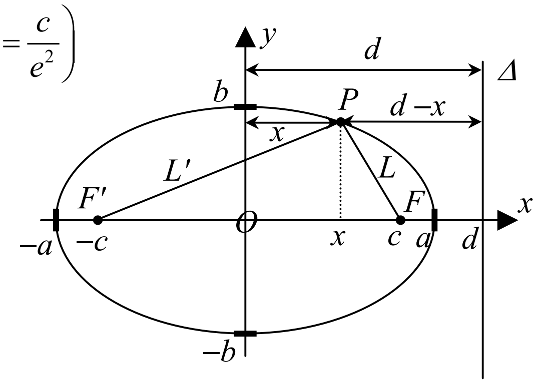
$\Leftrightarrow \quad (L' + L)\cdot(L' - L) = 4\cdot c\cdot x$

$\Leftrightarrow \quad (2\cdot a)\cdot(L' - L) = 4\cdot c\cdot x$

$\Leftrightarrow \quad L' - L = \dfrac{2\cdot c\cdot x}{a} = 2\cdot e\cdot x$, on a utilisé la définition $e = \dfrac{c}{a}$. CQFD

Propriété 3 :

Plaçons une droite Δ verticale d'équation $x = \dfrac{a}{e} \overbrace{=}^{\text{notation}} d$. $\left(d = \dfrac{c}{e^2} \right)$



La distance de P à la droite Δ égale la distance de P à F, divisé par e.

C'est-à-dire : $\boxed{d - x = \dfrac{L}{e}}$ ou encore $L = a - e \cdot x$.

Montrons-le :

Par la propriété 1, on a : $L' = 2 \cdot a - L$

Par la propriété 2, on a : $\dfrac{L' - L}{e} = 2 \cdot x$

Eliminons L' : $\dfrac{2 \cdot a - L - L}{e} = 2 \cdot x \Leftrightarrow \dfrac{2 \cdot a - 2 \cdot L}{e} = 2 \cdot x \Leftrightarrow \dfrac{a}{e} - \dfrac{L}{e} = x \Leftrightarrow d - x = \dfrac{L}{e}$. CQFD

Propriété 4 :

Les coordonnées (x ; y) de P satisfont l'équation de l'ellipse qui est : $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$

Montrons-le :

Par Pythagore : $L^2 = (x - c)^2 + y^2 = (x - a \cdot e)^2 + y^2$ on a utilisé : $c = a \cdot e$.

D'autre part on a vu que : $L = a - e \cdot x$.

Donc : $(a - e \cdot x)^2 = (x - a \cdot e)^2 + y^2$

Développons et simplifions :

$a^2 - 2 \cdot a \cdot e \cdot x + e^2 \cdot x^2 = x^2 - 2 \cdot a \cdot e \cdot x + a^2 \cdot e^2 + y^2$

$a^2 \cdot (1 - e^2) = x^2 \cdot (1 - e^2) + y^2$ On utilise : $1 - e^2 = 1 - \dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{a^2 - c^2}{a^2} = \dfrac{b^2}{a^2}$

Donc : $b^2 = x^2 \cdot \dfrac{b^2}{a^2} + y^2$

Ce qui donne : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ CQFD.

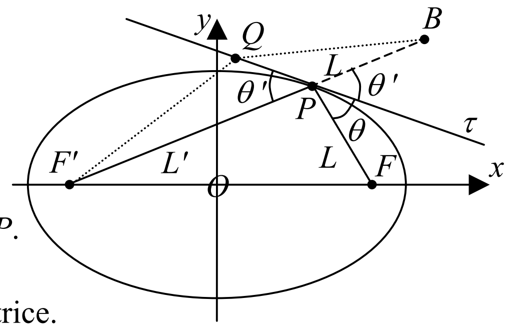
En conséquence, l'équation paramétrique de l'ellipse est :

$\begin{matrix} x = a \cdot \cos(t) \\ y = b \cdot \sin(t) \end{matrix}$, car $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

Propriété 5 :
Si l'ellipse était un miroir, un rayon issu de F serait réfléchi sur F'.
Formulation équivalente : si l'ellipse était une table de billard, une balle lancée depuis F rebondirait pour passer par F', quelle que soit sa direction de départ !
Cette propriété peut être utilisée pour construire un bâtiment dont le toit aurait la forme d'un ellipsoïde de révolution. Une personne en F' entendrait très bien une autre personne chuchotant en F.

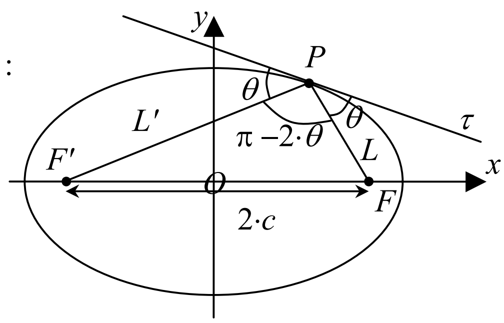
Mathématiquement, cela signifie que l'angle θ entre le segment $[FP]$ et la tangente à l'ellipse en P est égale à l'angle θ' entre le segment $[F'P]$ et la tangente à l'ellipse en P. (c.f. dessin.)
En abrégé : $\boxed{\theta = \theta'}$.

Montrons-le :



Plaçons un point B sur la droite $(F'P)$ qui se trouve à une distance L de P.
Définissons la bissectrice τ de l'angle $\widehat{FPB}$.
Donc $\theta = \theta'$.
Il reste à montrer que la bissectrice τ est la tangente à l'ellipse en P.
Prenons un point Q sur τ.
La distance $\overline{QB}$ égale la distance $\overline{QF}$, par définition de la bissectrice.
Notons $\overline{F'Q}$ la distance de F' à Q.
On a : $\overline{F'Q} + \overline{QF} = \overline{F'Q} + \overline{QB} > \overline{F'B} = L' + L = 2 \cdot a$
L'inégalité vient du fait que la ligne droite est le chemin le plus court entre F' et B.
En conséquence, puisque $\overline{F'Q} + \overline{QF} > 2 \cdot a$, le point Q se trouve en dehors de l'ellipse. La bissectrice τ touche l'ellipse en P et ne la croise pas. C'est donc la tangente à l'ellipse en P.
CQFD.

Propriété 6 :



L'angle θ entre la tangente et le segment $[FP]$ satisfait la relation :
$\frac{b^2}{L^2 \cdot \sin^2(\theta)} - \frac{2 \cdot a}{L} = -1$ équivalente à $\boxed{L' \cdot L \cdot \sin^2(\theta) = b^2}$
Ceci est utile pour montrer la première loi de Kepler affirmant que les trajectoires des planètes sont des ellipses.

Montrons-le :
Nous utiliserons le théorème du cosinus, qui dit que : $2 \cdot L' \cdot L \cdot \cos(\pi - 2 \cdot \theta) = L'^2 + L^2 - (2 \cdot c)^2$
Nous utiliserons aussi les relations trigonométriques :
$\cos(\pi - 2 \cdot \theta) = -\cos(2 \cdot \theta) = 2 \cdot \sin^2(\theta) - 1$.
Par le théorème du cosinus, on sait que : $2 \cdot L' \cdot L \cdot \cos(\pi - 2 \cdot \theta) = L'^2 + L^2 - (2 \cdot c)^2$

$\Leftrightarrow \quad 2 \cdot L' \cdot L \cdot (2 \cdot \sin^2(\theta) - 1) = L'^2 + L^2 - 4 \cdot c^2$

$\Leftrightarrow \quad 4 \cdot L' \cdot L \cdot \sin^2(\theta) = L'^2 + L^2 + 2 \cdot L' \cdot L - 4 \cdot c^2 = (L' + L)^2 - 4 \cdot c^2 = (2 \cdot a)^2 - 4 \cdot c^2$

$\Leftrightarrow \quad L' \cdot L \cdot \sin^2(\theta) = a^2 - c^2 = b^2$, CQFD (1)

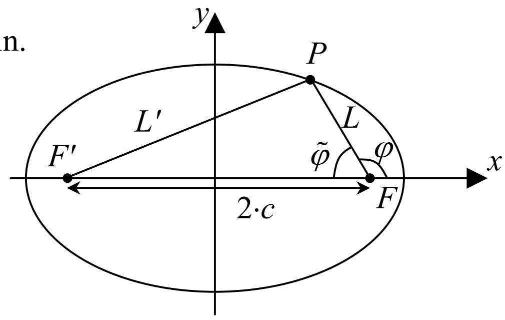
Montrons l'équivalence annoncée : $\frac{b^2}{L^2 \cdot \sin^2(\theta)} - \frac{2 \cdot a}{L} = -1$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b^2}{L^2 \cdot \sin^2(\theta)} = \frac{2 \cdot a}{L} - 1 = \frac{2 \cdot a - L}{L} = \frac{L'}{L}$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2 = \frac{L'}{L} \cdot L^2 \cdot \sin^2(\theta) = L' \cdot L \cdot \sin^2(\theta) \quad \text{CQFD.}$$

Propriété 7 :

Notons "φ" l'angle entre le segment $[FP]$ et l'axe des x. c.f. dessin.
Notons "$\tilde{\varphi}$" l'autre angle entre le segment $[FP]$ et l'axe des x.



L et φ sont liés par la relation : $\boxed{L = \dfrac{b^2}{a + c \cdot \cos(\varphi)} = \dfrac{b^2}{a - c \cdot \cos(\tilde{\varphi})}}$

Cette relation se note souvent : $L = \dfrac{p}{1 + e \cdot \cos(\varphi)}$,

avec : $p = \dfrac{b^2}{a}$. Rappelons que : $e = \dfrac{c}{a}$ et $a^2 - c^2 = b^2$.

Montrons-le :

$\cos(\varphi) = -\cos(\tilde{\varphi})$, car $\varphi = \pi - \tilde{\varphi}$. C'est une propriété simple du cosinus.

Nous utiliserons le théorème du cosinus, qui dit que : $2 \cdot (2 \cdot c) \cdot L \cdot \cos(\tilde{\varphi}) = L^2 + (2 \cdot c)^2 - L'^2$

Eliminons L' à l'aide de $L' + L = 2 \cdot a$

On obtient : $2 \cdot (2 \cdot c) \cdot L \cdot \cos(\tilde{\varphi}) = L^2 + (2 \cdot c)^2 - (2 \cdot a - L)^2 = \cancel{L^2} + (2 \cdot c)^2 - 4 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot L - \cancel{L^2}$

$\Leftrightarrow \quad 4 \cdot c \cdot L \cdot \cos(\tilde{\varphi}) = 4 \cdot c^2 - 4 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot L$

$\Leftrightarrow \quad c \cdot L \cdot \cos(\tilde{\varphi}) = c^2 - a^2 + a \cdot L$

$\Leftrightarrow \quad c \cdot L \cdot \cos(\tilde{\varphi}) = -b^2 + a \cdot L$

$\Leftrightarrow \quad b^2 = \left(a - c \cdot \cos(\tilde{\varphi})\right) \cdot L$

$\Leftrightarrow \quad L = \dfrac{b^2}{a - c \cdot \cos(\tilde{\varphi})}$ CQFD

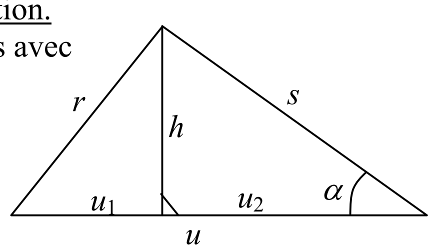
Remarquons encore quelques liens entre les grandeurs variables L, L', φ, θ et x.

$L' + L = 2 \cdot a$; $L = a - e \cdot x$; $L' = a + e \cdot x$; $e = \dfrac{c}{a}$; $a^2 - c^2 = b^2$

$-\cos(\varphi) = \cos(\tilde{\varphi}) = \dfrac{c - x}{L} = \dfrac{c - x}{a - e \cdot x}$; $L' \cdot L \cdot \sin^2(\theta) = b^2$.

Si le théorème du cosinus vous est inconnu, voici une démonstration.

J'ai pris d'autres lettres que a, b et c, pour éviter les confusions avec ce qui précède.



A partir des 4 relations :

1) $\cos(\alpha) = \dfrac{u_2}{s}$

2) $u_1^2 + h^2 = r^2$

3) $u_2^2 + h^2 = s^2$

4) $u_1 + u_2 = u$

On élimine les inconnues u_1, u_2 et h, pour obtenir la formule du théorème du cosinus.

2)–3) : $u_1^2 - u_2^2 = r^2 - s^2 \quad \Leftrightarrow \quad (u_1 + u_2) \cdot (u_1 - u_2) = r^2 - s^2 \quad \Leftrightarrow \quad u \cdot (u - 2 \cdot u_2) = r^2 - s^2$

$\Leftrightarrow \quad u^2 - 2 \cdot u \cdot s \cdot \cos(\alpha) = r^2 - s^2$

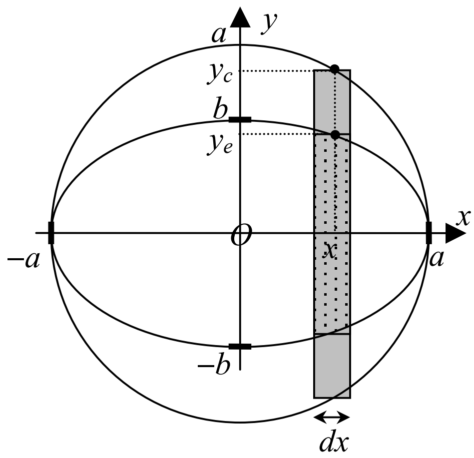
$\Leftrightarrow \quad u^2 + s^2 - r^2 = 2 \cdot u \cdot s \cdot \cos(\alpha)$, α est l'angle opposé au coté r.

Une autre écriture est : $u^2 + s^2 - 2 \cdot u \cdot s \cdot \cos(\alpha) = r^2$.

Ce théorème généralise le théorème de Pythagore, qui représente le cas particulier avec $\alpha = 90°$.

<u>Propriété 8 :</u>

L'aire de l'ellipse est : $\boxed{Aire = \pi \cdot a \cdot b}$.



Montrons-le :

Traçons un disque de rayon a centré en O.

Prenons une bande très étroite de largeur dx, autour de l'abscisse x. c.f. dessin.

La coordonnée positive y_c du cercle correspondant à x est :

$y_c = \sqrt{a^2 - x^2}$

La coordonnée positive y_e de l'ellipse correspondant à x est :

$y_e = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b}{a} \cdot y_c$.

Donc le rectangle gris avec les points très étroit centré en x, de largeur dx et de hauteur $2 \cdot y_e$ est d'aire égale à $\frac{b}{a}$ fois l'aire du rectangle gris très étroit centré en x, de largeur dx et de hauteur $2 \cdot y_c$.

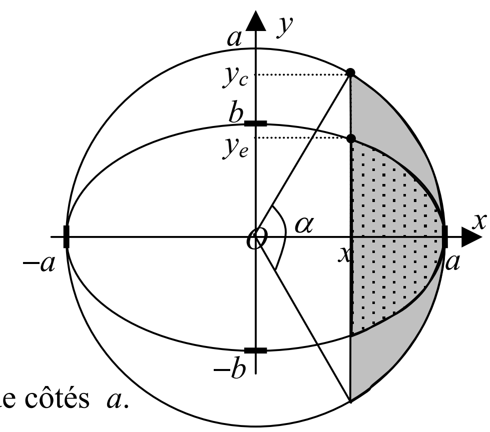
L'aire de l'ellipse est une limite de somme d'aires de rectangles gris avec les points très étroits.

L'aire du disque est une limite de somme d'aires de rectangles gris très étroits.

Conséquence, l'aire de l'ellipse égale $\frac{b}{a}$ fois l'aire du cercle.

Aire de l'ellipse $= \frac{b}{a} \cdot (\pi \cdot a^2) = \pi \cdot a \cdot b$. CQFD.

<u>Propriété 8$_{\text{bis}}$ d'aire de segment.</u>



Cette démonstration fournit également l'indication suivante :

L'aire grise avec les points égale

$\frac{b}{a}$ fois l'aire du grise du segment circulaire.

L'aire du segment circulaire d'angle α vaut

l'aire du secteur d'angle α moins l'aire du triangle d'angle α et de côtés a.

$= \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot a^2 \; - \; \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin(\alpha) \; = \; \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot (\alpha - \sin(\alpha))$.

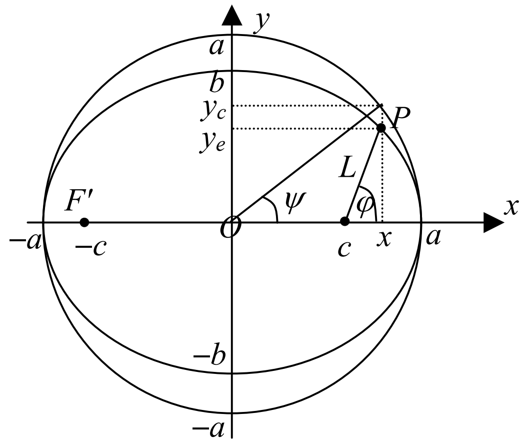
<u>En résumé :</u>

Aire du segment circulaire d'angle α vaut : $\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot (\alpha - \sin(\alpha))$

Aire grise avec les points d'angle α vaut : $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot (\alpha - \sin(\alpha))$

$\frac{\alpha}{2}$ s'appelle l'**anomalie excentrique**. On en rediscute à la page suivante.

Anomalie excentrique et aire de l'ellipse.



L'**anomalie excentrique** est l'angle ψ définit sur le dessin.
On trace un cercle de rayon a, centré à l'origine O.
On projette le point $P = (x\,;\,y_e)$ de l'ellipse verticalement sur le cercle, pour obtenir le point de coordonnées $(x\,;\,y_c)$ sur le cercle.

φ s'appelle l'**anomalie vraie**.
c.f. http://fr.wikipedia.org/wiki/Anomalie_vraie

Voici quelques relations entre différentes grandeurs.

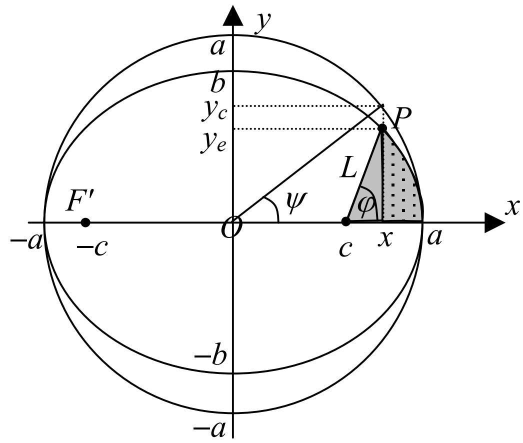
$$\sin(\psi) = \frac{y_c}{a} \quad ; \quad \cos(\psi) = \frac{x}{a} \quad ; \quad \tan(\psi) = \frac{y_c}{x} \quad ; \quad y_e = \frac{b}{a} \cdot y_c$$

$$\sin(\varphi) = \frac{y_e}{L} \quad ; \quad \cos(\varphi) = \frac{x-c}{L} \quad ; \quad \tan(\varphi) = \frac{y_e}{x-c} \quad ;$$

Par manipulations algébriques, en utilisant $L = a - e \cdot x$; $\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$, avec $\alpha = \psi$ et $\alpha = \varphi$,

on montre que : $\tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1+e}{1-e} \cdot \tan^2\left(\frac{\psi}{2}\right)$.

Calcule d'aire de "secteur" de l'ellipse.
La loi des aires de Kepler incite à considérer l'aire grise représentée sur le dessin ci-contre.



L'aire grise avec les points vaut la moitié de l'aire obtenue pour $\alpha = 2 \cdot \psi$. C.f. propriété 8_{bis}.

Aire grise avec les points $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot (2 \cdot \psi - \sin(2 \cdot \psi))$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot (2 \cdot \psi - 2 \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\psi)) = \underline{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot (\psi - \sin(\psi) \cdot \cos(\psi))}$$

L'aire grise sans les points égale l'aire d'un triangle $= \frac{1}{2} \cdot (x-c) \cdot y_e$

$$= \frac{1}{2} \cdot (a \cdot \cos(\psi) - c) \cdot \frac{b}{a} y_c = \frac{1}{2} \cdot (a \cdot \cos(\psi) - c) \cdot \frac{b}{a} \cdot a \cdot \sin(\psi)$$

$= \underline{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \cos(\psi) \cdot \sin(\psi) - \frac{1}{2} \cdot b \cdot a \cdot e \cdot \sin(\psi)}$. On a utilisé $a \cdot e = c$ et les relations indiquées ci-dessus.

En additionnant ces deux aires, le terme $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \cos(\psi) \cdot \sin(\psi)$ s'élimine et donc :

$$\boxed{\text{Aire grise} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot (\psi - e \cdot \sin(\psi))}$$

Bernard Gisin août 2006
Modifié en mai 2007 (http://www.juggling.ch/gisin/physique/physique.html)