Dobble est un jeu composé de 55 cartes, ayant 8 symboles sur chaque carte. Pour chaque paire de cartes, il existe exactement un symbole se trouvant sur chacune des deux cartes.

Ce texte a été écrit par Bernard Gisin, http://www.juggling.ch/gisin/math/jeux/dobble.html

Le but de ce qui suit est d'étudier le principe mathématique de la création d'un tel jeu.
Liens :
http://fr.wikipedia.org/wiki/Dobble
La référence sur Wikipédia.

http://images.math.cnrs.fr/Dobble-et-la-geometrie-finie.html
Étude mathématique claire et précise. C'est ce lien qui m'a débloqué lors de mes recherches.

http://fr.scribd.com/doc/32602239/Dobble
Montre qu'avec n symboles par carte, il y a au maximum $n \cdot (n-1)+1$ cartes. Pour cela il est nécessaire d'avoir le même nombre de symboles. Avoir plus de symboles est inutile. Il montre également que un même symbole se trouve au plus sur n cartes.
Donc avec 8 symboles par carte, il y a au maximum 57 cartes. On va montrer que ce maximum de 57 cartes peut être réalisé, avec 57 symboles. Dans ce cas, pour chaque symbole, il y a exactement 8 cartes qui contiennent ce symbole.

Dans le jeu d'origine, on pourrait ajouter 2 cartes aux 55 cartes.
A ma connaissance, c'est pour des raisons techniques d'impressions que le jeu est limité à 55 cartes.

On va supposer qu'un même symbole n'apparaît pas sur chaque carte, car sinon, c'est inintéressant.

On va voir deux approches pour réaliser ce genre de jeu, avec n symboles par carte.
Dans le cas où $n-1$ est un nombre premier, une solution optimale existe, contenant $n \cdot (n-1)+1$ cartes, avec autant de symboles et chaque symbole se trouvant sur n cartes.

Une approche un peu abstraite est de voir les cartes comme des points du plan projectif sur le corps à $n-1$ éléments, les symboles étant les droites de ce plan projectif.

L'autre approche est de construire un tableau, où les colonnes correspondent aux symboles et les lignes aux cartes. Les croix indiquent la présence du symbole correspondant sur la carte correspondante.

Les cartes du jeu de Dobble (complété) peuvent être vues comme les points du plan projectif sur le corps à sept éléments, noté $P^2(F_7)$. Les symboles en sont les droites. Par dualité, on peut aussi considérer les symboles comme les points et les cartes comme les droites.

Construction du jeu.
La construction est simple et régulière, si le nombre de symbole par carte moins un est un nombre premier ou une puissance d'un nombre premier. Sinon, je ne connais pas de théorie permettant la construction.

Dans la suite, on notera a, b, c, ... les symboles et 1, 2, 3, ... les cartes.
On ferra des tableaux, chaque colonne correspondra à un symbole, chaque ligne à une carte et la croix dans le tableau indiquera que le symbole se trouve sur la carte.

Cas de 2 symboles par carte, avec 3 symboles et 3 cartes.

	a	b	c
1	x		x
2		x	x
3	x	x	

Cas de 3 symboles par carte, avec 7 symboles et 7 cartes. $7 = 3 \cdot 2 + 1$

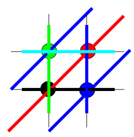
	a	b	c	d	e	f	g
1	x	x					x
2			x	x			x
3					x	x	x
4	x		x			x	
5		x		x		x	
6	x			x	x		
7		x	x		x		

Les lignes 4 à 6 peuvent se noter comme suit :
4 : 112
5 : 222
6 : 121
7 : 211
Le premier chiffre indique le numéro du symbole correspondant à la carte "1"
Le deuxième chiffre indique le numéro du symbole correspondant à la carte "2"
Le troisième chiffre indique le numéro du symbole correspondant à la carte "3"
Il faut que pour chaque paire de lignes, il y ait exactement une colonne ayant un chiffre identique et deux colonnes ayant des chiffres différents.

Ce qui suit est très bien décrit sur le site Web référencé en premier sur la première page :
http://images.math.cnrs.fr/Dobble-et-la-geometrie-finie.html

Construction à l'aide du plan projectif sur le corps à deux éléments, noté $P^2(F_2)$.
L'idée est d'utiliser l'analogie que pour deux points d'un plan, il existe exactement une droite passant par ces deux points.
Les points correspondront aux cartes, les symboles correspondront aux droites.

Dans un plan quadrillé, on ne considère que les points se trouvant sur les intersections du quadrillage.
Chaque point est repéré par un couple de deux nombres entiers (x, y).
De plus, on "recolle" le plan de telle sorte que $x = 2$ est ramené sur $x = 0$; $y = 2$ est ramené sur $y = 0$.
Chaque point (x, y) est ramené sur un des 4 points (0,0) ; (0,1) ; (1,0) ; (1,1), en additionnant ou soustrayant 2 autant de fois que désiré à x et à y.
Cela donne 4 points.



On considère 6 lignes, 2 horizontales, 2 verticales et 2 obliques.
La ligne bleue semble spéciale, car en sortant à droite, elle revient sur la gauche.
Donc, on considère 3 lignes passant par le point noir (0,0) ●
L'horizontale, la verticale l'oblique, passant par le point rouge.
On ajoute encore 3 "points", correspondant à chacune des 3 directions de lignes (horiz. vert. oblique).
On ajoute une dernière "ligne" qui relie les 3 "points" ajoutés précédemment.
Cela fait 4 + 3 = 7 points formant les 7 cartes et 6 + 1 = 7 lignes formant les 7 symboles.
Par chaque "point" passe exactement 3 "droites" et à chaque paire de "points" correspond exactement une "droite".
C'est un peu abstrait, mais cette abstraction mathématique permet de construire un jeu intéressant.
Plus loin, on va refaire cette construction avec plus de points et de droites.

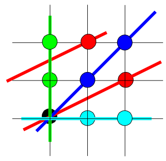
Cas de 4 symboles par carte, avec 13 symboles et 13 cartes. $13 = 4 \cdot 3 + 1$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
1	x	x	x										x
2				x	x	x							x
3							x	x	x				x
4										x	x	x	x
5	x			x			x					x	
6		x			x			x				x	
7			x			x			x			x	
8	x				x				x		x		
9		x				x	x				x		
10			x	x				x			x		
11	x					x		x		x			
12		x		x					x	x			
13			x		x		x			x			

Les lignes 5 à 13 peuvent se noter comme suit :
5 : 1113
6 : 2223
7 : 3333
8 : 1232 A part le dernier chiffre, c'est la diagonale du bloc précédent.
9 : 2312
10 : 3122
11 : 1321 A part le dernier chiffre, c'est la diagonale du bloc précédent.
12 : 2131
13 : 3211
Le premier chiffre indique le numéro du symbole correspondant à la carte "1"
Le deuxième chiffre indique le numéro du symbole correspondant à la carte "2"
Le troisième chiffre indique le numéro du symbole correspondant à la carte "3"
Le quatrième chiffre indique le numéro du symbole correspondant à la carte "4"
Il faut que pour chaque paire de lignes, il y ait exactement une colonne ayant un chiffre identique et les autres colonnes ayant des chiffres différentes.
C'est possible, car 3 est un nombre premier.
Avec 5 on va le voir plus loin.

Construction à l'aide du plan projectif sur le corps à trois éléments, noté $P^2(F_3)$.
L'idée est d'utiliser l'analogie que pour deux points d'un plan, il existe exactement une droite passant par ces deux points.
Les points correspondront aux cartes, les symboles correspondront aux droites.

Dans un plan quadrillé, on ne considère que les points se trouvant sur les intersections du quadrillage.
Chaque point est repéré par un couple de deux nombres entiers (x, y).
De plus, on "recolle" le plan de telle sorte que $x = 3$ est ramené sur $x = 0$; $y = 3$ est ramené sur $y = 0$.
Chaque point (x, y) est ramené sur un des 9 points (0,0) ; (0,1) ; (0,2) ; (1,0) ; (1,1) ; (1,2) ; (2,0) ; (2,1) ; (2,2), en additionnant ou soustrayant 3 autant de fois que désiré à x et à y.
Cela donne 9 points.
On considère 4·3=12 lignes, 3 horizontales, 3 verticales, 3 obliques et 3 de pente 1/2.
La ligne rouge semble spéciale, car en sortant à droite, elle revient sur la gauche.
Donc, on considère 4 lignes passant par le point noir (0,0) ●
Je n'ai pas dessiné les autres lignes, mais il faut considérer les parallèles à celles dessinées, qui passent par les autres points verts ou les autres points cyan.
On ajoute encore 4 "points", correspondant à chacune des 4 directions de lignes.
On ajoute une dernière "ligne" qui relie les 4 "points" ajoutés précédemment.
Cela fait 9 + 4 = 13 points formant les 13 cartes et 12 + 1 = 13 lignes formant les 13 symboles.
Par chaque "point" passe exactement 4 "droites" et à chaque paire de "points" correspond exactement une "droite".
C'est un peu abstrait, mais cette abstraction mathématique permet de construire un jeu intéressant.
Plus loin, on va refaire cette construction avec plus de points et de droites.



Le cas de 5 symboles par carte est un peu différent et est étudié plus loin.

Cas de 6 symboles par carte, avec 31 symboles et 31 cartes. $31 = 6 \cdot 5 + 1$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	A	B	C	D	E
1	x	x	x	x	x																										x
2						x	x	x	x	x																					x
3											x	x	x	x	x																x
4																x	x	x	x	x											x
5																					x	x	x	x	x						x
6																										x	x	x	x	x	x
7	x					x					x					x					x									x	
8		x					x					x					x					x								x	
9			x					x					x					x					x							x	
10				x					x					x					x					x						x	
11					x					x					x					x					x					x	
12	x						x						x						x						x				x		
13		x						x						x						x	x								x		
14			x						x						x	x						x							x		
15				x						x	x						x						x						x		
16					x	x						x						x						x					x		
17	x							x							x		x							x				x			
18		x							x		x							x							x			x			
19			x							x		x							x		x							x			
20				x		x							x							x		x						x			
21					x		x							x		x							x					x			
22	x								x			x								x			x				x				
23		x								x			x			x								x			x				
24			x			x								x			x								x		x				
25				x			x								x			x			x						x				
26					x			x			x								x			x					x				
27	x									x				x				x				x				x					
28		x				x									x				x				x			x					
29			x				x				x									x				x		x					
30				x				x				x				x									x	x					
31					x				x				x				x				x					x					

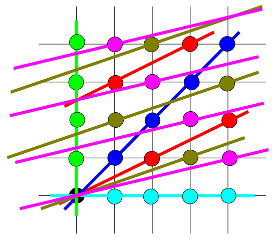
Les lignes 7 à 31 peuvent se noter comme suit :

7 : 111115
8 : 222225
9 : 333335
10 : 444445
<u>11 : 555555</u>
12 : 123454 A part le dernier chiffre, c'est la diagonale du bloc précédent.
13 : 234514
14 : 345124
15 : 451234
<u>16 : 512344</u>
17 : 135243 A part le dernier chiffre, c'est la diagonale du bloc précédent.
18 : 241353
19 : 352413
20 : 413523
<u>21 : 524133</u>
22 : 142532 A part le dernier chiffre, c'est la diagonale du bloc précédent.
23 : 253142
24 : 314252
25 : 425312
<u>26 : 531422</u>
27 : 154321 A part le dernier chiffre, c'est la diagonale du bloc précédent.
28 : 215431
29 : 321541
30 : 432151
<u>31 : 543211</u>

Pour chaque paire de lignes, il y a exactement une colonne ayant un chiffre identique et les autres colonnes ayant des chiffres différents.

Construction à l'aide du plan projectif sur le corps à cinq éléments, noté $P^2(F_5)$.
L'idée est d'utiliser l'analogie que pour deux points d'un plan, il existe exactement une droite passant par ces deux points.
Les points correspondront aux cartes, les symboles correspondront aux droites.

Dans un plan quadrillé, on ne considère que les points se trouvant sur les intersections du quadrillage.
Chaque point est repéré par un couple de deux nombres entiers (x, y).
De plus, on "recolle" le plan de telle sorte que $x = 5$ est ramené sur $x = 0$; $y = 5$ est ramené sur $y = 0$.
Chaque point (x, y) est ramené sur un des 25 points (0,0) ; (0,1) ; (0,2) ; (0,3) ; (0,4) ; (1,0) ; (1,1) ; (1,2) ; ... ; (4,4), en additionnant ou soustrayant 5 autant de fois que désiré à x et à y.
Cela donne 25 points.
On considère 6·5=30 lignes, 5 horizontales, 5 verticales, 5 obliques, 5 de pente 1/2, 5 de pente 1/3 et 5 de pente 1/4.
Les lignes rouge, magenta et brunes semblent spéciales, car en sortant à droite, elles reviennent sur la gauche.
Donc, on considère 6 lignes passant par le point noir (0,0) ●
Je n'ai pas dessiné les autres lignes, mais il faut considérer les parallèles à celles dessinées, qui passent par les autres points verts ou les autres points cyan.
Les lignes d'une couleur ne passent que par le point noir et par les 4 autres points de la même couleur que la ligne. Cela fonctionne, parce que 5 est un nombre premier.
On ajoute encore 6 "points", correspondant à chacune des 6 directions de lignes.
On ajoute une dernière "ligne" qui relie les 6 "points" ajoutés précédemment.
Cela fait 25 + 6 = 31 points formant les 31 cartes et 30 + 1 = 31 lignes formant les 31 symboles.
Par chaque "point" passe exactement 6 "droites" et à chaque paire de "points" correspond exactement une "droite".
C'est un peu abstrait, mais cette abstraction mathématique permet de construire un jeu intéressant.



Le cas de 7 symboles par carte est discuté plus loin.

<u>Cas de 8 symboles par carte, avec 57 symboles et 57 cartes.</u> $57 = 8 \cdot 7 + 1$

Si on a compris le principe des constructions précédentes, on effectue exactement les mêmes constructions avec 8 symboles par carte et 57 symboles.

Les 8 premières cartes sont construites, facilement, en mettant le symbole n°57 sur chacune de ses cartes, et la carte 1 contient aussi les 7 symboles "abcdefg", la carte 2 contient "hijklmn" etc.

La carte 9 contient les 1er symboles de chacune des 7 premières cartes plus le symbole n°56.
La carte 10 contient les 2e symboles de chacune des 7 premières cartes plus le symbole n°56.
...
La carte 15 contient les 7e symboles de chacune des 7 premières cartes plus le symbole n°56.
Ensuite, on peut faire la même construction des lignes que précédemment :

Les lignes 9 à 57 peuvent se noter comme suit :
9 : 11111117
10 : 22222227
...
<u>15 : 77777777</u>
16 : 12345676 A part le dernier chiffre, c'est la diagonale du bloc précédent. suivant = précédent +1
17 : 23456716
...
<u>22 : 71234566</u>
23 : 13572465 A part le dernier chiffre, c'est la diagonale du bloc précédent. suivant = précédent +2
24 : 24613575
25 : 35724615
...
<u>29 : 72461355</u>
30 : 14736254 A part le dernier chiffre, c'est la diagonale du bloc précédent. suivant = précédent +3
31 : 25147364
32 : 36251474
...
<u>36 : 73625144</u>
37 : 15263743 A part le dernier chiffre, c'est la diagonale du bloc précédent. suivant = précédent +4
38 : 26374153
...
<u>43 : 74152633</u>
44 : 16427532 A part le dernier chiffre, c'est la diagonale du bloc précédent. suivant = précédent +5
45 : 27531642
...
<u>50 : 75316422</u>
51 : 17654321 A part le dernier chiffre, c'est la diagonale du bloc précédent. suivant = précédent +6
52 : 21765431
...
<u>57 : 76543211</u>

Dans chaque bloc, les chiffres sont par ordre croissant, sauf la dernière colonne. A la place de 8, on écrit 1, pour 9 on écrit 2, pour 10 on écrit 3, etc.

Construction à l'aide du plan projectif sur le corps à sept éléments, noté $P^2(F_7)$.
L'idée est d'utiliser l'analogie que pour deux points d'un plan, il existe exactement une droite passant par ces deux points.
Les points correspondront aux cartes, les symboles correspondront aux droites.

Dans un plan quadrillé, on ne considère que les points se trouvant sur les intersections du quadrillage.
Chaque point est repéré par un couple de deux nombres entiers (x, y).
De plus, on "recolle" le plan de telle sorte que $x = 7$ est ramené sur $x = 0$; $y = 7$ est ramené sur $y = 0$.
Chaque point (x, y) est ramené sur un des 49 points (0,0) ; (0,1) ; ... ; (0,6) ; (1,0) ; (1,1) ; (1,2) ; ... ; (6,6), en additionnant ou soustrayant 7 autant de fois que désiré à x et à y.
Cela donne 49 points.
On considère $8 \cdot 7=56$ lignes, 7 horizontales, 7 verticales, 7 obliques, 7 de pente 1/2, 7 de pente 1/3, 7 de pente 1/4, 7 de pente 1/5, et 7 de pente 1/6.
Cette fois, le dessin devient embêtant à faire, mais l'idée est la même que précédemment.
Donc, on considère 8 lignes passant par le point (0,0).
Chaque ligne passera exactement par 7 points. Cela fonctionne, parce que 7 est un nombre premier.
On ajoute encore 8 "points", correspondant à chacune des 8 directions de lignes.
On ajoute une dernière "ligne" qui relie les 8 "points" ajoutés précédemment.
Cela fait 49 + 8 = 57 points formant les 57 cartes et 56 + 1 = 57 lignes formant les 57 symboles.
Par chaque "point" passe exactement 8 "droites" et à chaque paire de "points" correspond exactement une "droite".
C'est un peu abstrait, mais cette abstraction mathématique permet de construire le jeu dobble, avec deux cartes de plus que dans le jeu d'origine.
A ma connaissance, c'est pour des raisons techniques d'impression que le jeu est limité à 55 cartes.

Cas de 5 symboles par carte, avec 21 symboles et 21 cartes. $21 = 5 \cdot 4 + 1$

Si on désire des cartes avec 5 symboles par carte, on montre assez facilement qu'il ne peut pas y avoir plus de $5 \cdot 4 + 1 = 21$ cartes et qu'il est inutile d'avoir plus de 21 symboles. Avant que j'apprenne l'existence du corps F_4 à 4 éléments, je pensais qu'il était impossible d'obtenir 21 cartes avec 5 symboles. L'existence de ce corps F_4 permet de construire les 21 cartes, ce qui montre la force de l'approche à l'aide du plan projectif sur un corps fini.

Notons 0, 1, v et w les 4 éléments du corps F_4. (Le groupe additif est celui de $Z_2 \times Z_2$ v=(0;1) w =(1;1))
Voici la table d'addition et celle de multiplication :

addition	0	1	v	w
0	0	1	v	w
1	1	0	w	v
v	v	w	0	1
w	w	v	1	0

multip.	0	1	v	w
0	0	0	0	0
1	0	1	v	w
v	0	v	w	1
w	0	w	1	v

Comme un produit de polynômes à coefficients dans Z_2. ($1 = -1$; $1 + 1 = 0$)
v=x ; w=1+x. Avec $x^2 + x + 1 = 0$, donc $x^2 = x + 1$.
Donc $v \cdot v = x^2 = x + 1 = w$; $w \cdot w = 1 + x^2 = 1 + 1 + x = x = v$; $v \cdot w = x + x^2 = x + 1 + x = 1$.

Les symboles correspondent aux 21 droites suivantes :
Les 16 droites du style : $y = A \cdot x + B$, avec A et B appartenant à F_4.
Les 4 droites du style : $x = B$, avec B appartenant à F_4.
La droite à l'infini, qui contient les 5 points à l'infini.

Les cartes correspondent aux 21 points suivants :
Les 16 points de coordonnées (A ; B), avec A et B appartenant à F_4.
Les 5 points correspondant aux directions pente = 0, pente = 1, pente = v, pente = w, pente = infini.

Cas de 5 symboles par carte.

		pente = 0 $y = 0 \cdot x +$				pente = 1 $y = 1 \cdot x +$				pente = v $y = v \cdot x +$				pente = w $y = w \cdot x +$				pente = ∞ x =				dr. à l'∞
		0	1	v	w	0	1	v	w	0	1	v	w	0	1	v	w	0	1	v	w	
		a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
1	p = 0	x	x	x	x																	x
2	p = 1					x	x	x	x													x
3	p = v									x	x	x	x									x
4	p = w													x	x	x	x					x
5	p = ∞																	x	x	x	x	x
6	0 ; 0	x				x				x				x				x				
7	0 ; 1		x				x				x				x			x				
8	0 ; v			x				x				x				x		x				
9	0 ; w				x				x				x				x	x				
10	1 ; 0	x					x					x					x		x			
11	1 ; 1		x			x							x			x			x			
12	1 ; v			x					x	x					x				x			
13	1 ; w				x			x			x			x					x			
14	v ; 0	x						x					x		x					x		
15	v ; 1		x						x			x		x						x		
16	v ; v			x		x					x						x			x		
17	v ; w				x		x			x						x				x		
18	w ; 0	x							x		x					x					x	
19	w ; 1		x					x		x							x				x	
20	w ; v			x			x						x	x							x	
21	w ; w				x	x						x			x						x	

Les lignes 6 à 21 peuvent se noter comme suit :

6 : 11 11 1
7 : 22 22 1
8 : 33 33 1
9 : 44 44 1
10 : 12 34 2
11 : 21 43 2
12 : 34 12 2
13 : 43 21 2
14 : 13 42 3
15 : 24 31 3
16 : 31 24 3
17 : 42 13 3
18 : 14 23 4
19 : 23 14 4
20 : 32 41 4
21 : 41 32 4

Table de multiplication.
Donne la 1e ligne de chaque bloc.

1	1	1	1	1
2	1	2	3	4
3	1	3	4	2
4	1	4	2	3

Table d'addition.
Donne les colonnes en partant de la 1e ligne du bloc.

1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

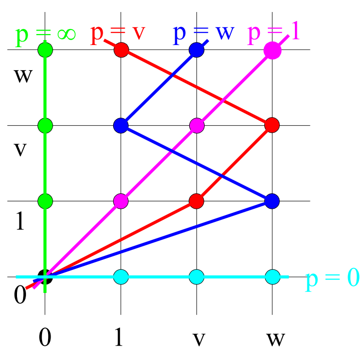
Les colonnes de chaque bloc sont identiques (sauf la dernière colonne).
Construction des cartes :
La première carte contient les 5 premiers symboles, la 2e les 5 suivants, etc. jusqu'à la 5ème carte.
Chacune de ces cartes contient également le dernier (21e) symbole.
Les numéros de gauche de chaque bloc indiquent la carte.
La série de 4 chiffres qui suit, indique les symboles comme suit :
Le 1e chiffre indique le symbole à prendre de la 1e carte.
Le 2e chiffre indique le symbole à prendre de la 2e carte.
Le 3e chiffre indique le symbole à prendre de la 3e carte.
Le 4e chiffre indique le symbole à prendre de la 4e carte.
Le 5e chiffre indique le symbole à prendre de la 5e carte.

Construction à l'aide du plan projectif sur le corps à quatre éléments, noté $P^2(F_4)$.
L'idée est d'utiliser l'analogie que pour deux points d'un plan, il existe exactement une droite passant par ces deux points.
Les points correspondront aux cartes, les symboles correspondront aux droites.

Dans un plan quadrillé, on ne considère que les points se trouvant sur les intersections du quadrillage.
Chaque point est repéré par un couple de deux nombres entiers (x, y).
De plus, on "recolle" le plan de telle sorte que $x = 4$ est ramené sur $x = 0$; $y = 4$ est ramené sur $y = 0$.
Chaque point (x, y) est ramené sur un des 16 points (0,0) ; (0,1) ; (0,2) ; (0,3) ; (1,0) ; (1,1) ; (1,2) ; ... ; (3,3), en additionnant ou soustrayant 4 autant de fois que désiré à x et à y.
Cela donne 16 points.
On considère $5 \cdot 4 = 20$ lignes, 4 horizontales, 4 verticales, 4 obliques, 2 fois 4 d'apparence bizarre.
Donc, on considère 5 lignes passant par le point noir (0,0) ●
Les lignes d'une couleur ne passent que par le point noir et par les 3 autres points de la même couleur que la ligne. Cela fonctionne, parce que F_4 est un corps, c.f. page précédente.
On ajoute encore 5 "points", correspondant à chacune des 5 directions de lignes.
On ajoute une dernière "ligne" qui relie les 5 "points" ajoutés précédemment.
Cela fait 16 + 5 = 21 points formant les 21 cartes et 20 + 1 = 21 lignes formant les 21 symboles.
Par chaque "point" passe exactement 5 "droites" et à chaque paire de "points" correspond exactement une "droite".
C'est très abstrait, mais cette abstraction mathématique permet de construire un jeu intéressant.

Malgré leur apparence, les lignes sont des lignes droites du plan projectif $P^2(F_4)$.

La carte (0 ; 0) contient les 5 symboles représentés par les 5 lignes du schéma ci-contre.



Chaque ligne représente un symbole.
L'équation de chaque ligne est du genre : $y = p \cdot x + b$.
Dans le schéma, $b = 0$.
x ; y ; b sont dans $\{ 0 ; 1 ; v ; w \}$
p est dans $\{ 0 ; 1 ; v ; w ; \infty \}$

Il existe des corps ayant p^n éléments, où p est un nombre premier et n un entier positif.
c.f. http://fr.wikipedia.org/wiki/Corps_fini
Donc avec p^n+1 symboles par carte, on peut construire $(p^n+1) \cdot p^n + 1$ cartes avec autant de symboles.
Avec 10 symboles par carte, on peut construire $10{\cdot}9+1= 91$ cartes, avec 91 symboles.
Avec 12 symboles par carte, on peut construire $12{\cdot}11+1=133$ cartes, avec 133 symboles.
Avec 14 symboles par carte, on peut construire $14{\cdot}13+1=183$ cartes, avec 183 symboles.
etc.

L'optimum est donc atteint avec le nombre suivant de symboles par carte :
2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 17, 18, 20, 24, 26, 28, 30, 32, 33, ...

Pour les autres nombres, je ne sais pas.
Par exemple, avec 7 symboles par carte, combien de cartes différentes peut-on fabriquer ?
La même question se pose pour 11, 13, 15, 16, 19, 21, 22, 23, 25, 27, 29, ... symboles par carte.

Avec 7 symboles par carte, si on veut un nombre maximal de cartes, il est nécessaire et suffisant d'avoir $7 \cdot 6 + 1 = 43$ symboles.
Mais quel est le nombre maximal de cartes possible, je ne sais pas et je crois que la réponse est moins de 43. L'étude de ce cas est tentée plus loin.

<u>Remarques et questions.</u>
Prenons le jeu avec 8 cartes.
Avec 6, 5, 4, 3, 9, 10 cartes des remarques et des questions similaires se posent.
° Pour chaque paire de carte, il existe exactement un symbole en commun.
° Pour chaque paire de symbole, il existe exactement une carte qui contient ces deux symboles.
° Chaque symbole apparaît exactement sur 8 cartes.
? Peut-on éliminer des cartes pour que chaque symbole apparaissent exactement sur 7 cartes ?
La réponse est oui, c'est possible. Il suffit de choisir un symbole, prendre les 8 cartes contenant ce symbole et de les éliminer. Cela éliminera un symbole et rendra le nouveau jeu de 57 - 8 = 49 cartes avec 56 symboles symétriques, aucune carte ni aucun symbole n'est privilégié.
Cela correspondrait à éliminer les cartes 1 à 8.

Faisons le raisonnement avec le jeu de 6 symboles par carte, et le tableau correspondant sous les yeux.
On éliminerait donc les cartes 1 à 6 de mon tableau traitant le cas de 6 symboles par carte.
Sur le tableau, on pourrait éliminer le symbole E.
Il resterait 31 - 6 = 25 cartes et 30 symboles.
En recommençant, On supprime un symbole supplémentaire, pour éliminer 5 cartes.
Sur le tableau, on pourrait éliminer le symbole D.
Il resterait 25 - 5 = 20 cartes et 29 symboles.
À part le symbole C, chaque symbole apparaîtrait sur exactement 4 cartes.
En éliminant le symbole C et les cartes correspondantes,
il resterait 20 - 5 = 15 cartes, et 28 symboles.
À part le symbole B, chaque symbole apparaîtrait sur exactement 3 cartes.
En éliminant le symbole B et les cartes correspondantes,
il resterait 15 - 5 = 10 cartes, et 27 symboles.
À part le symbole A, chaque symbole apparaîtrait sur exactement 2 cartes.
En éliminant le symbole A et les cartes correspondantes,
il resterait 10 - 5 = 5 cartes, et 26 symboles.
Cette suite est moins intéressante, car non symétrique.

<u>Cas de 7 symboles par carte, avec 43 symboles et ?? cartes.</u> $43 = 7 \cdot 6 + 1$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	x	x	x	x	x	x																																					x
2							x	x	x	x	x	x																															x
3													x	x	x	x	x	x																									x
4																			x	x	x	x	x	x																			x
5																									x	x	x	x	x	x													x
6																															x	x	x	x	x	x							x
7																																					x	x	x	x	x	x	x
8	x						x						x						x						x						x											x	
9		x						x						x						x						x						x										x	
10			x						x						x						x						x						x									x	
11				x						x						x						x						x						x								x	
12					x						x						x						x						x						x							x	
13						x						x						x						x						x						x						x	
14	x										x				x					x								x								x					x		
15			x						x							x							x							x	x										x		
16					x					x							x							x	x							x									x		
17		x									x							x	x							x							x								x		
18				x								x	x							x							x							x							x		
19						x	x							x							x							x							x						x		
20	x								x								x		.	x	.		.					x								x				x			
21		x																																						x			
22			x																																					x			
23				x																																				x			
24					x																																			x			
25						x																																		x			
26	x																																										
27		x																																									
28			x																																								
29				x																																							
30					x																																						
31						x																																					
32	x																																										
33		x																																									
34			x																																								
35				x																																							
36					x																																						
37						x																																					
38	x																																										
39		x																																									
40			x																																								
41				x																																							
42					x																																						
43						x																																					

Les lignes 8 à ?? peuvent se noter comme suit :

8 : 111 111 6	20 : 153 462 4	26 : 134253
9 : 222 222 6	21 : 531 624 4	21 : 531 6244
10 : 333 333 6	22 : 315 264 4	
11 : 444 444 6	23 : 264 153 4	
12 : 555 555 6	24 : 641 532 4	
<u>13 : 666 666 6</u>	<u>25 : 415 326 4</u>	
14 : 135 246 5	26 : 124 6353	
15 : 351 462 5	26 : 12	
16 : 513 624 5		
17 : 246 135 5		
18 : 462 351 5		
<u>19 : 624 513 5</u>		
20 : 153 426 4		

?

Pour chaque paire de lignes, il devrait y avoir exactement une colonne ayant un chiffre identique et les autres colonnes ayant des chiffres différents. AUTRE TENTATIVE, C.F. PLUS LOIN, sans succès.

Cas de 9 symboles par carte, avec 73 symboles et 73 cartes. $73 = 9 \cdot 8 + 1$
C'est possible, car $8 = 2^3$, donc un corps à 8 éléments existe.

Notons 0, 1, a, b, i, j, v et w les 8 éléments du corps F_8.
Le groupe additif est celui de $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$ a=(0;1;0) ; b=(1;1;0) ; i=(0;0;1) ; j=(1;0;1) ; v=(0;1;1) ; w=(1;1;1).

Voici la table d'addition :

addition	0	1	a	b	i	j	v	w
0	0	1	a	b	i	j	v	w
1	1	0	b	a	j	i	w	v
a	a	b	0	1	v	w	i	j
b	b	a	1	0	w	v	j	i
i	i	j	v	w	0	1	a	b
j	j	i	w	v	1	0	b	a
v	v	w	i	j	a	b	0	1
w	w	v	j	i	b	a	1	0

Table d'addition utile à la construction des cartes.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	1	4	3	6	5	8	7
3	3	4	1	2	7	8	5	6
4	4	3	2	1	8	7	6	5
5	5	6	7	8	1	2	3	4
6	6	5	8	7	2	1	4	3
7	7	8	5	6	3	4	1	2
8	8	7	6	5	4	3	2	1

Voici la table de multiplication :

mult.	0	1	a	b	i	j	v	w
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	a	b	i	j	v	w
a	0	a	i	v	b	1	w	j
b	0	b	v	j	w	i	1	a
i	0	i	b	w	v	a	j	1
j	0	j	1	i	a	w	b	v
v	0	v	w	1	j	b	a	i
w	0	w	j	a	1	v	i	b

Table de multipl. utile à la construction des cartes.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8
3	1	3	5	7	4	2	8	6
4	1	4	7	6	8	5	2	3
5	1	5	4	8	7	3	6	2
6	1	6	2	5	3	8	4	7
7	1	7	8	2	6	4	3	5
8	1	8	6	3	2	7	5	4

Comme un produit de polynômes à coefficients dans Z_2. ($1 = -1$; $1 + 1 = 0$)
a=x ; b=1+x ; i=x^2 ; j=1+x^2 ; v=x+x^2 ; w=1+x+x^2 . Avec $x^3 + x + 1 = 0$, donc $x^3 = x + 1$.
Donc $a \cdot a = x^2 = i$; $a \cdot b = x+x^2 = v$; $b \cdot b = 1 + x^2 = j$; $a \cdot i = x^3 = b$;
(c.f. http://fr.wikipedia.org/wiki/Arithmétique_des_polynômes#Quotient)
Les symboles correspondent aux 73 droites suivantes :
Les 64 droites du style : $y = A \cdot x + B$, avec A et B appartenant à F_8.
Les 8 droites du style : $x = B$, avec B appartenant à F_8.
La droite à l'infini, qui contient les 9 points à l'infini.

Les cartes correspondent aux 73 points suivants :
Les 64 points de coordonnées (A ; B), avec A et B appartenant à F_8.
Les 9 points correspondant aux directions pente = 0, p=1, p=a, p=b, p=i, p=j, p=v, p=w, p=infini.

Les lignes 10 à 73 peuvent se noter comme suit :

10 : 11 11 11 11 1	26 : 13 57 42 86 3	42 : 15 48 73 62 5	58 : 17 82 64 35 7
11 : 22 22 22 22 1	27 : 24 68 31 75 3	43 : 26 37 84 51 5	59 : 28 71 53 46 7
12 : 33 33 33 33 1	28 : 31 75 24 68 3	44 : 37 26 51 84 5	60 : 35 64 82 17 7
13 : 44 44 44 44 1	29 : 42 86 13 57 3	45 : 48 15 62 73 5	61 : 46 53 71 28 7
14 : 55 55 55 55 1	30 : 57 13 86 42 3	46 : 51 84 37 26 5	62 : 53 46 28 71 7
15 : 66 66 66 66 1	31 : 68 24 75 31 3	47 : 62 73 48 15 5	63 : 64 35 17 82 7
16 : 77 77 77 77 1	32 : 75 31 68 24 3	48 : 73 62 15 48 5	64 : 71 28 46 53 7
17 : 88 88 88 88 1	33 : 86 42 57 13 3	49 : 84 51 26 37 5	65 : 82 17 35 64 7
18 : 12 34 56 78 2	34 : 14 76 85 23 4	50 : 16 25 38 47 6	66 : 18 63 27 54 8
19 : 21 43 65 87 2	35 : 23 85 76 14 4	51 : 25 16 47 38 6	67 : 27 54 18 63 8
20 : 34 12 78 56 2	36 : 32 58 67 41 4	52 : 38 47 16 25 6	68 : 36 81 45 72 8
21 : 43 21 87 65 2	37 : 41 67 58 32 4	53 : 47 38 25 16 6	69 : 45 72 36 81 8
22 : 56 78 12 34 2	38 : 58 32 41 67 4	54 : 52 61 74 83 6	70 : 54 27 63 18 8
23 : 65 87 21 43 2	39 : 67 41 32 58 4	55 : 61 52 83 74 6	71 : 63 18 54 27 8
24 : 78 56 34 12 2	40 : 76 14 23 85 4	56 : 74 83 52 61 6	72 : 72 45 81 36 8
25 : 87 65 43 21 2	41 : 85 23 14 76 4	57 : 83 74 61 52 6	73 : 81 36 72 45 8

Pour chaque paire de lignes, il y a exactement une colonne ayant un chiffre identique et les autres colonnes ayant des chiffres différents. Les colonnes de chaque bloc sont identiques (sauf la dernière colonne).

Construction des cartes :
La première carte contient les 8 premiers symboles, la 2e les 8 suivants, etc. jusqu'à la 9ème carte.
Chacune de ces cartes contient également le dernier (73e) symbole.
Les numéros de gauche de chaque bloc indiquent la carte.
La série de 9 chiffres qui suit, indique les symboles comme suit :
Le premier chiffre indique le symbole à prendre de la première carte.
Le 2e chiffre indique le symbole à prendre de la 2e carte.
Le 3e chiffre indique le symbole à prendre de la 3e carte.
...
Le 8e chiffre indique le symbole à prendre de la 8e carte.
Le 9e chiffre indique le symbole à prendre de la 9e carte.

Table de multiplication
Donne la première ligne de chaque bloc.

1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8
3	1	3	5	7	4	2	8	6
4	1	4	7	6	8	5	2	3
5	1	5	4	8	7	3	6	2
6	1	6	2	5	3	8	4	7
7	1	7	8	2	6	4	3	5
8	1	8	6	3	2	7	5	4

Table d'addition
Donne les colonnes en partant de la 1e ligne du bloc.

1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	1	4	3	6	5	8	7
3	3	4	1	2	7	8	5	6
4	4	3	2	1	8	7	6	5
5	5	6	7	8	1	2	3	4
6	6	5	8	7	2	1	4	3
7	7	8	5	6	3	4	1	2
8	8	7	6	5	4	3	2	1

<u>Cas de 7 symboles par carte, avec 43 symboles et ?? cartes.</u> $43 = 7 \cdot 6 + 1$
Combien de cartes peut-on obtenir au maximum ?

Notons 0, 1, 2, a, b, c les 6 éléments de l'anneau $Z_3 \times Z_2$.
Le groupe additif est celui de $Z_3 \times Z_2$ a=(0;1) ; b=(1;1) ; c=(2;1).

Voici la table d'addition :

addition	0	1	2	a	b	c
0	0	1	2	a	b	c
1	1	2	0	b	c	a
2	2	0	1	c	a	b
a	a	b	c	0	1	2
b	b	c	a	1	2	0
c	c	a	b	2	0	1

Table d'addition utile à la construction des cartes.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	1	5	6	4
3	3	1	2	6	4	5
4	4	5	6	1	2	3
5	5	6	4	2	3	1
6	6	4	5	3	1	2

Voici la table de multiplication :

mult.	0	1	2	a	b	c
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	a	b	c
2	0	2	1	0	2	1
a	0	a	0	b		
b	0	b	2	1	a	
c	0	c	1	b		

Table de mult. utile à la construction des cartes ?

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6
3	1	3				
4	1	4		???		
5	1	5				
6	1	6				

Comme un produit de polynômes ??? Plus de théorie que je connais.
a=x ; b=1+x ; c=2+x . Avec $x^2 + x + 1 = 0$, donc $x^2 = 1 + x$. $x + x = 0$.

(c.f. http://fr.wikipedia.org/wiki/Arithmétique_des_polynômes#Quotient)
Les symboles correspondent aux droites ???

Les lignes 8 à ?? peuvent se noter comme suit : ???

8 : 111 111 1	20 : 1??????	32 : 132 456 14 x 1, 4	signifie conflit en ligne 14 du 1 et 4
9 : 222 222 1	21 : 2	xx : 132 546 15 x 3, 5	
10 : 333 333 1	22 : 3	xx : 132 642 16 x 2, 6	
11 : 444 444 1	23 : 4	xx : 134 256 18 x 4, 2	
12 : 555 555 1	24 : 5	xx : 134 526 15 x 3, 5	
13 : 666 666 1	25 : 6	xx : 134 625 16 x 6, 5	?
14 : 123 456 2	26 : 1	xx : 134 652 14 x 1, 5	
15 : 231 564 2	27 : 2	xx : 135 642 16 x 6, 4	
16 : 312 645 2		xx : 136 245 16 x 4, 5	
17 : 456 123 2		xx : 136 542 15 x 5, 3	
18 : 564 231 2		xx : 142 365 19 x 4, 3	18, pas de symbole correspondant !
19 : 645 312 2		xx : 142 563 15 x 5, 6	
		xx : 142 635 16 x 2, 6	
		xx : 145 263 19 x 4, 5	
		xx : 146 235 18 x 2, 3	
		xx : 146 253 14 x 1, 5	
		xx : 146 523 17 x 6, 2	
		xx : 146 532 19 x 4, 2	
		xx : 152 364 15 x 6, 4	
		xx : 152 634 16 x 2, 6	etc.

Il semble qu'il n'y ait aucune possibilité de continuer. On peut peut-être essayer en enlevant les cartes n° 18 et 19 ???