Voici des démonstrations de dérivation de produit de fonctions, quotients, composition et réciproque selon une méthode classique trouvée par Caratheodory en 1950, qui est bien meilleure que les démonstrations classiques.

Formulation de la dérivée selon Caratheodory, (1950 p.121), que j'ai trouvée dans l'excellent livre de E. Hairer et G.Wanner, "L'analyse au fil de l'histoire" ed. springer.
La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable au point d'abscisse "a", si et seulement si il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en au point d'abscisse "a", telle que $f(x) = f(a) + \varphi(x) \cdot (x-a)$.
La valeur $\varphi(a)$ est la dérivée $f'(a)$ de la fonction "f" en "a".
Pour $x \neq a$, on a $\varphi(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

<u>Montrons que $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$</u>
Par hypothèse,
$f(x) = f(a) + \varphi(x) \cdot (x-a)$ et $g(x) = g(a) + \psi(x) \cdot (x-a)$. Donc
$(f \cdot g)(x) = (f(a) + \varphi(x) \cdot (x-a)) \cdot (g(a) + \psi(x) \cdot (x-a))$
$= f(a) \cdot g(a) + (f(a) \cdot \psi(x)) + \varphi(x) \cdot g(a) + \varphi(x) \cdot \psi(x) \cdot (x-a)) \cdot (x-a)$
Le facteur qui multiplie $(x-a)$ est continue et en $x=a$, il vaut $f(a) \cdot g'(a) + f'(a) \cdot g(a)$. CQFD

<u>Montrons que $(f / g)' = (f' \cdot g - f \cdot g') / g^2$.</u>
Par hypothèse,
$f(x) = f(a) + \varphi(x) \cdot (x-a)$ et $g(x) = g(a) + \psi(x) \cdot (x-a)$. Donc

$$\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a) = \frac{f(a)+\varphi(x)\cdot(x-a)}{g(a)+\psi(x)\cdot(x-a)} - \frac{f(a)}{g(a)}$$

$$= \frac{f(a)\cdot g(a)+\varphi(x)\cdot(x-a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g(a)-\psi(x)\cdot(x-a)\cdot f(a)}{(g(a)+\psi(x)\cdot(x-a))\cdot g(a)}$$

$$= \frac{\varphi(x)\cdot g(a)-\psi(x)\cdot f(a))}{(g(a)+\psi(x)\cdot(x-a))\cdot g(a)} \cdot (x-a)$$

Le facteur en $(x-a)$ est continue et en $x=a$, il vaut $\dfrac{f'(a)\cdot g(a)-g'(a)\cdot f(a))}{g^2(a)}$ CQFD

<u>Montrons que $(g°f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$</u>
Par hypothèse,
$f(x) = f(a) + \varphi(x) \cdot (x-a)$ et $g(y) = g(f(a)) + \psi(y) \cdot (y - f(a))$, avec $\psi(f(a)) = g'(f(a))$.
En remplaçant "y" par $f(x)$, on a:
$(g°f)(x) = g(f(x)) = g(f(a)) + \psi(f(x)) \cdot (f(x) - f(a)) = g(f(a)) + \psi(f(x)) \cdot \varphi(x) \cdot (x-a)$
De nouveau, le facteur qui multiplie $(x-a)$ est continue,
et en $x=a$, il vaut $g'(f(a)) \cdot f'(a)$ CQFD

<u>Montrons que ${}^{r}f'(y) = 1 / f'(f(y)$ ou ${}^{r}f$ est la fonction réciproque de f.</u>
Par hypothèse,
$f(x) = f(a) + \varphi(x) \cdot (x-a)$ et $\varphi(a) = f'(a) \neq 0$.
Si $y = f(x)$ et $b = f(a)$, alors $x = {}^{r}f(y)$ et $a = {}^{r}f(b)$. Donc
$y = b + \varphi({}^{r}f(y)) \cdot ({}^{r}f(y) - {}^{r}f(b))$ donc
${}^{r}f(y) = {}^{r}f(b) + (y - b) / \varphi({}^{r}f(y))$.
Le facteur qui multiplie $(y - b)$ est continue et vaut $1 / f'(f(a))$ en $y = b$. CQFD

Ce document se trouve sur mes pages web sur :
http://www.perso.ch/Bernard.Gisin/math/Caratheodory.html