Solutions de quelques exercices du livre de Hecht Ch. 28

Réponses du QCM :

1d	2d	3c	4b	5b	6a	7a	8e	9e	10a
11c	12d	13a	14d	15d	16a	17c	18b.		

7a : $E_0 = m_0 \cdot c^2$ est l'énergie au repos, qui est une indépendante de la vitesse.

8e : trop irréaliste. Pratiquement les trois voient la même longueur de fusée (8a).
13a : irréaliste. Il est impossible de mesurer pratiquement une variation de masse.

Δt_M = temps mesuré sur l'horloge en **mouvement** (temps impropre).

Δt_S = temps mesuré sur l'horloge **stationnaire** (temps propre) $\Delta t_M = \gamma \cdot \Delta t_S$.

L_M = longueur mesurée dans le référentiel en **mouvement** (longueur impropre).

L_S = longueur mesurée dans le référentiel **stationnaire** (longueur propre) $L_M = L_S / \gamma$.

1. Si, lors du déplacement parallèle, L est remplacé par : $L \cdot \sqrt{1-\beta^2}$, alors le nouveau temps mesuré lors du déplacement parallèle est :

$$\tilde{t}_{//} = \frac{2 \cdot L \cdot \sqrt{1-\beta^2}}{c} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} = \frac{2 \cdot L}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = t_\perp .$$

Il n'y a donc plus de différence entre les deux mesures de temps.

2. Une minute lumière est la distance parcourue par la lumière en une minute.
Elle vaut : $60[s] \cdot 2.998 \cdot 10^8 [m/s] = 1.799 \cdot 10^{10} [m]$. C'est une longueur.

4. Temps mesuré par la personne extérieur : $\Delta t_M = \dfrac{\Delta t_S}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{2,00[\mu s]}{\sqrt{1-0,998^2}} = 31,6[\mu s]$.

5. $\Delta t_M = \gamma \cdot \Delta t_S = 2 \cdot 45 = 90[s]$ = temps mesuré par l'observateur terrestre.
Le temps mesuré par l'astronaute est de 45 [s], car son horloge est stationnaire relativement à lui.

9. $\Delta t_M = \gamma \cdot \Delta t_S = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \Delta t_S$, donc $\beta = \sqrt{1 - \left(\dfrac{\Delta T_S}{\Delta T_M}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{52,0}{60,0}\right)^2} = 0,499$ (sans unités)

La vitesse de l'astéroïde mesurée depuis la Terre est la moitié de la vitesse de la lumière.

10. $L_S = \gamma \cdot L_M = 5/3 \cdot 6\, années \cdot c = 10\, années \cdot c$ = 10 années lumières.

13. Longueur vue par l'électron : $L_M = \dfrac{1}{\gamma} \cdot L_S = \sqrt{1-0.9998^2} \cdot 3.2[km] = 64.0[m]$

16. formule d'addition des vitesses : $V_{PO} = \dfrac{V_{PO'} + V_{O'O}}{1 + \dfrac{V_{PO'} \cdot V_{O'O}}{c^2}}$.

Les vitesses sont dans le même sens, donc elles s'additionnent. $V_{PO} = \dfrac{0.70+0.40}{1+0.70 \cdot 0.40} \cdot c = 0.86 \cdot c$

18. Dans ce cas, les vitesses sont de sens opposé, donc elles se soustraient.

$$V_{PO} = \frac{0.70-0.40}{1-0.70 \cdot 0.40} \cdot c = 0.417 \cdot c .$$

19. Vitesse d'approche : $V_{PO} = \dfrac{0.992+0.981}{1+0.992 \cdot 0.981} \cdot c = 0.99992 \cdot c$

24. $\beta=\sqrt{1-\left(\frac{L_M}{L_S}\right)^2}=\sqrt{1-\left(\frac{6.11}{8.33}\right)^2}=0,680$ sans unités.

La vitesse du vaisseau relativement à la Terre est de 0,680 *c*.

25. $\beta=\sqrt{1-\left(\frac{\Delta T_S}{\Delta T_M}\right)^2}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=0,943$. La vitesse de croisière de Lisa était de 0,943 *c*.

27. La longueur de la tige vue par l'observateur : $L_M=\frac{1}{\gamma}\cdot L_S=\sqrt{1-0.600^2}\cdot 1.000[m]=0.800[m]$

Temps de défilement : $\Delta t=\frac{L_M}{0.600\cdot c}=\frac{0.800[m]}{0.600\cdot 0.2998[m/ns]}=4.45[ns]$.

29. formule d'addition des vitesses : $V_{PO}=\frac{V_{PO'}+V_{O'O}}{1+\frac{V_{PO'}\cdot V_{O'O}}{c^2}}$. Si $V_{PO'}=c$, alors :

$V_{PO}=\frac{c+V_{O'O}}{1+\frac{c\cdot V_{O'O}}{c^2}}=c\cdot\frac{c+V_{O'O}}{c+V_{O'O}} = c$, indépendant de $V_{O'O}$.

<u>Dynamique relativiste.</u>

Vitesse de la lumière dans le vide : c = 2,99792458 · 10^8 [m/s]   1 [MeV] = 1,60218 · 10^{-13} [J]
Masse de l'électron · c^2 = 9,10939 · 10^{-31} [kg] = 0,510999 [MeV / c^2]   c.f. page 1077
Masse du proton · c^2 = 1,672623 · 10^{-27} [kg] = 938,272 [MeV / c^2]
Masse du neutron · c^2 = 1,674929 · 10^{-27} [kg] = 939,566 [MeV / c^2]
Masse du deutéron · c^2 = 3,343584 · 10^{-27} [kg] =1'875,612 [MeV / c^2]
Masse d'atomes : c.f. page 1077
Hydrogène (^1_1H) · c^2 = 1,673534 · 10^{-27} [kg] = 938,783 [MeV / c^2]
Deutérium (^2_1H) · c^2 = 3,344497 · 10^{-27} [kg] = 1'876,12 [MeV / c^2]
Tritium (^3_1H) · c^2 = 5,008270 · 10^{-27} [kg] = 2'809,43 [MeV / c^2]
Hélium-3 $\left({}^3_2He\right)$ · c^2 = 5,008237 · 10^{-27} [kg] = 2'809,41 [MeV / c^2]
Hélium-4 $\left({}^4_2He\right)$ · c^2 = 6,646482 · 10^{-27} [kg] = 3'728,40 [MeV / c^2]

34. Masse : m = 9,10939 · 1031 [kg]. Vitesse : $V=\beta\cdot c$ où β = 0,866

Quantité de mouvement : $p=m\cdot\gamma\cdot c$ où $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-0,866^2}}=2,00$.

$p=m\cdot\gamma\cdot c=9,11\cdot 10^{-31}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-0,866^2}}\cdot 0,866\cdot 2,9979\cdot 10^8=4,730\cdot 10^{-22}\left[\frac{kg\cdot m}{s}\right]$

35. Masse : 1,674929 · 10^{-27} [kg]. Vitesse : $V=\beta\cdot c$ où β = 0,50

Quantité de mouvement : $p=m\cdot\gamma\cdot c$ où $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-0,50^2}}=1,15$.

$p=m\cdot\gamma\cdot c=1,67\cdot 10^{-27}\cdot 1,15\cdot 0,50\cdot 3,00\cdot 10^8=2,9\cdot 10^{-19}\left[\frac{kg\cdot m}{s}\right]$

37. Energie totale : $E_{tot}=m\cdot\gamma\cdot c^2$ où $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Energie au repos : $E_0=m\cdot c^2$.

Energie cinétique : $E_{cin}=m\cdot(\gamma-1)\cdot c^2$.

Si l'énergie totale est le double de cette au repos, alors $\gamma = 2$.

Donc $\beta=\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}$ = 0,866.

Sa vitesse est donc de 0,866 · c et son énergie cinétique égale son énergie au repos de 1'000 [MeV]

38. Energie au repos : $E_0=m\cdot c^2$ = 0,511 [MeV].

Energie cinétique : $E_{cin}=m\cdot(\gamma-1)\cdot c^2$ = 0,089 [MeV].

Energie totale : $E_{tot}=m\cdot\gamma\cdot c^2=E_0+E_{cin}$ = 0,600 [MeV]

$\gamma=\frac{E_{tot}}{E_0}=0,600/0,511=1,174$

Donc $\beta=\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}$ = 0,523.

Sa vitesse est donc de 0,523 · c, un peu plus que la moitié de la vitesse de la lumière.

39. Energie au repos : $E_0=m\cdot c^2$ = 0,511 [MeV].

Energie cinétique : $E_{cin}=E_{tot}-E_0$ = 106,7 – 105,7 = 1,0 [MeV].

43. Energie au repos du deutéron : 1'875,612 [MeV], sa masse = 3,343584 · 10^{-27} [kg] c.f. page 1077
Energie au repos du proton : 938,272 [MeV]
Energie au repos du neutron : 939,566 [MeV]
Energie libérée lors de la fusion du proton et du neutron pour former le deutéron :
E = 938,272 + 939,566 – 1'875,612 = 1'877,838 + 939,566 – 1'875,612 = 2,226 [MeV].
= $2,226\cdot 1,602\cdot 10^{-13}=3,566\cdot 10^{-13}[J]$

1 [kg] de deutéron contient : $\frac{1}{3,343584\cdot 10^{-27}}$ = 2,911 · 10^{26} deutérons.

Lors de la fusion d'un [kg] de deutéron, l'énergie dégagée est de :

$3,566\cdot 10^{-13}[J]\cdot 2,911\cdot 10^{26}=1,038\cdot 10^{14}[J]$.

Une tonne équivalent pétrole vaut : 1 tep = 4,19 · 10^{10} [J]

Donc la fusion pour créer un [kg] de deutéron, correspond à une énergie de

$\frac{1,038\cdot 10^{14}[J]}{4,19\cdot 10^{10}[J]}=$2'477 tonnes de pétroles !

45. Augmentation de l'énergie ce l'horloge :

$\Delta m=\frac{\Delta E}{c^2}=\frac{89,88[J]}{(2,9979\cdot 10^8[m/s])^2}=1,000\cdot 10^{-15}[kg]$.

Même pour une horloge de 10 grammes, cette augmentation de masse n'est pas mesurable !

Solutions de quelques exercices du livre de Hecht Ch. 28

46. Energie au repos du deutérium : 1'876,12 [MeV] c.f. page 1077
Energie au repos du proton : 938,272 [MeV]
Energie au repos du neutron : 939,566 [MeV]
Energie au repos de l'électron : 0,511 [MeV]
Energie de liaison du deutérium :
$E = 938{,}272 + 939{,}566 + 0{,}511 - 1'876{,}12 = 2{,}23$ [MeV].
$= 2{,}23 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-13} = 3{,}57 \cdot 10^{-13} [J]$
C'est plus de 4 fois l'énergie au repos de l'électron !

47. Energie au repos de l'hélium-3 ${}^{3}_{2}He$: 2'809,41 [MeV], sa masse = $5{,}008237 \cdot 10^{-27}$ [kg]
Energie au repos du deutérium : 1'876,12 [MeV]
Energie au repos du neutron : 939,566 [MeV]
Energie libérée lors de la fusion pour former de l'hélium-3 :
$E = 2 \cdot 1'876{,}12 - 2'809{,}41 - 939{,}566 = 3{,}26$ [MeV].
$= 3{,}26 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-13} = 5{,}22 \cdot 10^{-13} [J]$

1 [kg] d'hélium-3 contient : $\dfrac{1}{5{,}008237 \cdot 10^{-27}} = 2{,}00 \cdot 10^{26}$ atomes d'hélium-3.

Lors de la fusion pour former un [kg] d'hélium-3, l'énergie dégagée est de :
$5{,}22 \cdot 10^{-13} [J] \cdot 2{,}00 \cdot 10^{26} = 10{,}44 \cdot 10^{13} [J]$.
Une tonne équivalent pétrole vaut : 1 tep = $4{,}19 \cdot 10^{10}$ [J]
Donc la fusion pour créer un [kg] d'hélium-3, correspond à une énergie de
$\dfrac{10{,}44 \cdot 10^{13} [J]}{4{,}19 \cdot 10^{10} [J]} = 2'490$ tonnes de pétroles !

48. Energie au repos de l'hélium-4 $\left({}^{4}_{2}He\right)$: 3'728,40 [MeV], sa masse = $6{,}646482 \cdot 10^{-27}$ [kg]
Energie au repos du deutérium (${}^{2}_{1}H$) : 1'876,12 [MeV]
Energie au repos du tritium (${}^{3}_{1}H$) : 2'809,43 [MeV]
Energie au repos du neutron (n) : 939,566 [MeV]
Energie libérée lors de la fusion pour former de l'hélium-4 :
$E = 1'876{,}12 + 2'809{,}43 - 3'728{,}40 - 939{,}566 = 17{,}58$ [MeV].
$= 17{,}58 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-13} = 2{,}817 \cdot 10^{-12} [J]$

1 [kg] d'hélium-4 contient : $\dfrac{1}{6{,}6465 \cdot 10^{-27}} = 1{,}50 \cdot 10^{26}$ atomes d'hélium-4.

Lors de la fusion pour former un [kg] d'hélium-4, l'énergie dégagée est de :
$2{,}817 \cdot 10^{-12} [J] \cdot 1{,}50 \cdot 10^{26} = 4{,}23 \cdot 10^{14} [J]$.
Une tonne équivalent pétrole vaut : 1 tep = $4{,}19 \cdot 10^{10}$ [J]
Donc la fusion pour créer un [kg] d'hélium-4, correspond à une énergie de
$\dfrac{4{,}23 \cdot 10^{12} [J]}{4{,}19 \cdot 10^{10} [J]} = 10'100$ tonnes de pétroles !

51. Quantité de mouvement classique : $p_c = m \cdot v$.

Quantité de mouvement relativiste : $p_r = m \cdot \gamma \cdot v$.

Erreur relative introduite en utilisant la quantité de mouvement classique au lieu de relativiste.

$$\frac{p_r - p_c}{p_r} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} .$$

Pour β = 0,006, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0,600^2}} = 1,25$.

Donc l'erreur relative vaut : $\frac{1,25-1}{1},25 = 0,20$ = 20%.

56. L'énergie au repos d'un électron est de : E_0 = 0,510999 [MeV]
Si son énergie cinétique est de 0,2000 [MeV], alors son énergie totale est de :
$E_{total} = 0,5110 + 0,2000 = 0,7110 [MeV] = \gamma \cdot 0,5110 [MeV]$.

Donc : $\gamma = \frac{0.7110}{0.5110} = 1,391$.

Donc : $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{1,391^2}} = 0,695$.

La vitesse de l'électron est de V = $\beta \cdot c = 208'000 [km/s]$.

Classiquement on aurait : $\frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 = 0,2000 \cdot 1,602 \cdot 10^{-13} = 3,204 \cdot 10^{-14} [J]$

$V = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,2000 \cdot 1,602 \cdot 10^{-13}}{9,11 \cdot 10^{-31}}}$ = 265'000 [km/s]

Remarque : $m_0 \cdot (\gamma - 1) \cdot c^2 = m_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \cdot c^2 = \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v^2 \cdot \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \beta^2 + \frac{5}{8} \cdot \beta^4 + \frac{35}{64} \cdot \beta^6 + \ldots \right)$

Ce développement en série montre la différence entre l'énergie cinétique classique et relativiste.

57. L'énergie au repos d'un électron est de : E_0 = 0,510999 [MeV]
Son énergie cinétique après accélération est de $e \cdot U = 1,50 [MeV]$.
Son énergie totale est de :
$E_{total} = 0,511 + 1,50 = 2,01 [MeV] = \gamma \cdot 0,5110 [MeV]$.

Donc : $\gamma = \frac{2.01}{0.5110} = 3,93$.

Donc : $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{3,93^2}} = 0,967$.

La vitesse de l'électron est de V = $\beta \cdot c = 290'000 [km/s]$.

Classiquement on aurait : $\frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 = 1,50 \cdot 1,602 \cdot 10^{-13} = 2,40 \cdot 10^{-13} [J]$

$V = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,50 \cdot 1,602 \cdot 10^{-13}}{9,11 \cdot 10^{-31}}}$ = 726'000 [km/s] = 2,42 · c.

Le résultat est nettement plus grand que la vitesse de la lumière.

61. Pour que l'énergie cinétique égale l'énergie au repos, il faut que $\gamma = 2$.

$$\beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{2^2}} = 0{,}866 \ .$$

Sa vitesse doit être de $0{,}866 \cdot c = 260'000$ [km/s].

Annexes sur la force.

Montrons que si on se limite à une dimension, la force définie par $F = m \cdot \frac{d}{dt}(\gamma \cdot V)$ est indépendante du référentiel choisi.

1) Plaçons-nous dans un référentiel S_S dans lequel la vitesse est nulle au moment de la mesure de la force.

On a : $F_S = m \cdot \frac{d}{dt}(\gamma \cdot V) = m \cdot \frac{d\gamma}{dt} \cdot V + m \cdot \gamma \cdot \frac{dV}{dt}$.

Dans ce référentiel S_S, $V = V_S = 0$ et $\gamma = 1$, donc $F_S = m \cdot a_S$ où

$a_S = \frac{dV}{dt}$ est l'accélération mesurée dans le référentiel S_S.

C'est la force classique. $F_S = m \cdot a_S = m \cdot \frac{dV}{dt}$

2) Plaçons-nous dans un référentiel S_M se déplaçant à vitesse constante $-V_r$ relativement à S_S. Par addition des vitesse, la vitesse de l'objet dans ce référentiel S_M vaut :

$V_M = \frac{V_S + V_r}{1 + V_S \cdot V_r / c^2}$. A l'instant de la mesure, on a $V = V_S = 0$, $V_M = V_r$, $a_S = \frac{dV_S}{dt}$

Mais pour calculer sa dérivée il faut garder l'expression complète.

On a aussi : $dt_M = \gamma_M \cdot dt_S$

Dans S_M, la force vaut :

$$F_M = m \cdot \frac{d}{dt_M}(\gamma_M \cdot V_M) = m \cdot \frac{d\gamma_M}{dt_M} \cdot V_M + m \cdot \gamma_M \cdot \frac{dV_M}{dt_M} = m \cdot \frac{d\gamma_M}{dV_M} \cdot \frac{dV_M}{dt_M} \cdot V_M + m \cdot \gamma_M \cdot \frac{dV_M}{dt_M} \ .$$

$$F_M = m \cdot \left(V_M \cdot \frac{d\gamma_M}{dV_M} + \gamma_M \right) \cdot \frac{dV_M}{dt_M} \ .$$

$$V_M \cdot \frac{d\gamma_M}{dV_M} = V_M \cdot \frac{d}{dV_M}\left(1 - \frac{V_M^2}{c^2}\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2} \cdot V_M \cdot \left(1 - \frac{V_M^2}{c^2}\right)^{-3/2} \cdot \frac{-2 \cdot V_M}{c^2} = \frac{V_M^2}{c^2} \cdot \gamma_M^3$$

$$\frac{dV_M}{dt_M} = \frac{1}{\gamma_M} \cdot \frac{d}{dt_S}\left(\frac{V_S + V_r}{1 + V_S \cdot V_r / c^2}\right) = \frac{1}{\gamma_M} \cdot \frac{a_S \cdot (1 + V_S \cdot V_r / c^2) - (V_S + V_r) \cdot a_S \cdot V_r / c^2}{(1 + V_S \cdot V_r / c^2)^2}$$

A l'instant de la mesure, $V_S = 0$, donc l'expression se simplifie en : $\frac{dV_M}{dt_M} = \frac{a_S}{\gamma_M} \cdot \left(1 - \frac{V_r^2}{c^2}\right) = \frac{a_S}{\gamma_M^3}$

$$F_M = m \cdot \left(\frac{V_M^2}{c^2} \cdot \gamma_M^3 + \gamma_M \right) \cdot \frac{a_0}{\gamma_M^3} = m \cdot \left(\frac{V_M^2}{c^2} + \gamma_M^{-2} \right) \cdot a_S = m \cdot \left(\frac{V_M^2}{c^2} + 1 - \frac{V_M^2}{c^2} \right) \cdot a_S = m \cdot a_S = F_S$$

La force dans le référentielle S_M est la même que dans le référentielle S_S qui est tous simplement la force classique.

Une force constante signifie que l'accélération mesurée dans le référentiel de l'objet en mouvement est constante.

64. La page qui précède, montre que si la force F est constante depuis un référentiel qui se déplace dans la même direction que l'objet accéléré, alors :

i) elle est constante et égale à F quel que soit le référentiel se déplaçant dans la direction de l'objet ;

ii) l'accélération a_S de l'objet mesurée dans le référentiel de l'objet est constante ;

iii) l'accélération $a_M(t)$ mesurée depuis un référentiel se déplaçant à vitesse $V_M = V_r$ par rapport à l'objet vaut : $a_M(t) = \frac{dV_M}{dt_M} = \frac{a_S}{\gamma_M^3} = \frac{F}{m} \cdot \left(1 - \frac{V_M^2}{c^2}\right)^{3/2}$. Elle n'est pas constante.

Calculons d'une autre manière l'accélération d'un objet depuis un référentiel S_M sachant que l'accélération a_S de l'objet mesurée depuis un référentiel S_S lié à l'objet est constante.

S_S = référentiel **S**tationnaire (depuis lequel la vitesse de l'objet = 0). a_S = constant.
S_M = référentiel en **M**ouvement.

Donc dans le référentiel S_S, on utilise la mécanique classique :
la vitesse initiale $V_{S0} = 0$ et après un temps Δt_S la vitesse vaut : $V_{S1} = \beta_{S1} \cdot c = a_S \cdot \Delta t_S$

Dans le référentiel S_M allant à vitesse $-\beta \cdot c$ relativement à S_S, l'objet va a vitesse $\beta \cdot c$.

Après un très petit temps $\Delta t_M = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \Delta t_S$, l'objet va à vitesse / c = $\beta_{M1} = \frac{\beta_{S1} + \beta}{1 + \beta_{S1} \cdot \beta}$

Dans S_M, l'accélération divisée par c vaut :

$$\frac{a}{c} = \alpha_M = \frac{\beta_{M1} - \beta}{\Delta t_M} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\Delta t_S} \cdot \left(\frac{\beta_{S1} + \beta}{1 + \beta_{S1} \cdot \beta} - \beta\right)$$

$$\alpha_M = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\Delta t_S} \cdot \left(\frac{\beta_{S1} + \beta - \beta - \beta_{S1} \cdot \beta^2}{1 + \beta_{S1} \cdot \beta}\right)$$

$$\alpha_M = \frac{\sqrt{1-\beta^2} \cdot \beta_{S1}}{\Delta t_S} \cdot \left(\frac{1-\beta^2}{1 + \beta_{S1} \cdot \beta}\right)$$

$\alpha_M = \alpha_S \cdot \left(1 - \beta^2\right)^{(3/2)} \cdot \frac{1}{1 + \beta_{S1} \cdot \beta}$. Il faut remarquer que $\beta_{S1} = \frac{a_S}{c} \cdot \Delta t_S$ est infiniment petit.

Donc pour finir on a bien : $\boxed{a_M(\beta) = a_S \cdot \left(1 - \beta^2\right)^{(3/2)}}$ $\beta_0 \cdot c$ = la vitesse de l'objet au temps t.

Une autre approche est de considérer que dans S_M, la force est constante et donc :

$\frac{d}{dt_M}(\gamma_M \cdot V_M) = \frac{F}{m} = a_0 = \alpha_0 \cdot c$ = constante. La vitesse de l'objet vaut : $V_M = \beta \cdot c$

Donc $\frac{d\gamma_M}{dt_M} \cdot V_M + \gamma_M \cdot \frac{dV_M}{dt_M} = a_0$ $\left(\frac{d\gamma_M}{dV_M} \cdot V_M + \gamma_M\right) \cdot \frac{dV_M}{dt_M} = a_0$ $\left(\frac{d\gamma_M}{dV_M} \cdot V_M + \gamma_M\right) \cdot a_M = a_0$

De là on en déduit de nouveau que : $\boxed{a_M(\beta) = a_S \cdot \left(1 - \beta^2\right)^{(3/2)}}$.

65. A partir du résultat de l'exercice 64, on a : $a_M(\beta)=c\cdot\frac{d\beta}{dt_M}=a_S\cdot\left(1-\beta^2\right)^{(3/2)}$.

C'est une équation différentielle pour $\beta(t_M)$.

Sa solution est : $\beta_M(t_M)=\frac{\alpha_0\cdot t_M}{\sqrt{1+\alpha_0^2\cdot t_M^2}}$,

$\alpha_0=\frac{a_S}{c}$ = l'accélération divisée par c vue depuis le référentiel de l'objet.

<u>Une autre approche</u> est de considérer que dans S_M, la force F est constante et donc :
$\frac{d}{dt_M}(\gamma_M\cdot V_M)=\frac{F}{m}=a_0=\alpha_0\cdot c$ = constante. La vitesse de l'objet vaut : $V_M=\beta\cdot c$

Donc $\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}=\alpha_0\cdot t_M$. Au temps $t_M = 0$, la vitesse est nulle selon l'énoncé.

De là on en déduit : $\beta_M(t_M)=\frac{\alpha_0\cdot t_M}{\sqrt{1+\alpha_0^2\cdot t_M^2}}$ ou $V_M(t_M)=\frac{a_0\cdot t_M}{\sqrt{1+\frac{a_0^2\cdot t_M^2}{c^2}}}$

Il est intéressant de remarquer qu'au début, $a_0^2\cdot t_M^2\ll c^2$ et donc $V_M(t_M)=a_0\cdot t_M$ est égale à la vitesse classique.
Après suffisamment de temps, $a_0^2\cdot t_M^2\gg c^2$ et donc $V_M(t_M)\approx c$. La vitesse est presque égale à la vitesse de la lumière, mais légèrement inférieure.

Annexe sur la quantité de mouvement

<u>1) Comment change la quantité de mouvement lors d'un changement de référentiel ?</u>

Supposons que dans un référentiel S_1 la quantité de mouvement d'un corps soit de : $\boxed{p_1=\frac{m\cdot\beta_1\cdot c}{\sqrt{1-\beta_1^2}}}$

Soit un référentiel S_2 se déplaçant à vitesse $u\cdot c$ relativement au référentiel S_1, dans la même direction que le corps. Déterminons la quantité de mouvement p_2 dans ce référentiel S_2.

Dans S_2, la vitesse du corps est : $\beta_2\cdot c=\frac{\beta_1\cdot c-u\cdot c}{1-\beta_1\cdot u}$.

La quantité de mouvement est : $p_2=\frac{m\cdot\beta_2\cdot c}{\sqrt{1-\beta_2^2}}=\frac{m\cdot c\cdot(\beta_1-u)}{(1-\beta_1\cdot u)\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\beta_1-u}{1-\beta_1\cdot u}\right)^2}}=\frac{m\cdot c\cdot(\beta_1-u)}{\sqrt{(1-\beta_1\cdot u)^2-(\beta_1-u)^2}}$

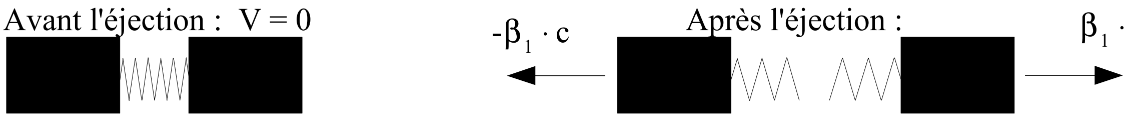
$p_2=\frac{m\cdot c\cdot(\beta_1-u)}{\sqrt{1+\beta_1^2\cdot u^2-\beta_1^2-u^2}}=\boxed{p_2=\frac{m\cdot c\cdot(\beta_1-u)}{\sqrt{1-\beta_1^2}\cdot\sqrt{1-u^2}}}$.

L'expression de la quantité de mouvement dans S_2 reste raisonnablement simple.

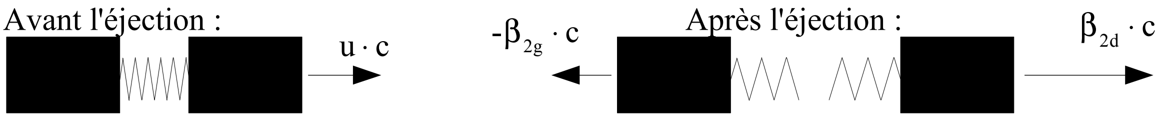
Exercice d'application de la conservation de la quantité de mouvement.

Dans un référentiel S_S, prenons deux corps immobiles de masses identiques reliés entre eux par un ressort contracté.
Notons M la masse de l'ensemble avant éjection.

Laissons le ressort se détendre, pour éjecter les deux masses. Notons m leur masse après éjection.
Classiquement, on a $M = 2 \cdot m$, mais la masse n'est plus conservée en relativité comme nous allons le voir.
Chacune d'elle part avec la même vitesse $\beta_1 \cdot c$ dans des sens opposés.



Décrivons l'expérience depuis un référentiel S_M, allant à vitesse $-u \cdot c$ relativement à S_S.
Dans ce référentielle, la vitesse du corps avant l'éjection est de $u \cdot c$.



Après éjection, le corps de gauche se déplace à vitesse : $\beta_{2g} \cdot c = \dfrac{-\beta_1 \cdot c + u \cdot c}{1 + \beta_1 \cdot u}$,

le corps de droite à vitesse : $\beta_{2d} \cdot c = \dfrac{\beta_1 \cdot c + u \cdot c}{1 - \beta_1 \cdot u}$

La conservation de quantité de mouvement donne : $\dfrac{M \cdot u}{\sqrt{1-u^2}} = \dfrac{m \cdot \beta_{2g}}{\sqrt{1-\beta_{2g}^2}} + \dfrac{m \cdot \beta_{2d}}{\sqrt{1-\beta_{2d}^2}}$

L'annexe sur la quantité de mouvement de la page précédente nous indique comment écrire cette conservation en fonction des vitesses $+\beta_1 \cdot c$ et $-\beta_1 \cdot c$.

$$\frac{M \cdot u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{m \cdot (\beta_1 + u)}{\sqrt{1-\beta_1^2} \cdot \sqrt{1-u^2}} + \frac{m \cdot (-\beta_1 + u)}{\sqrt{1-\beta_1^2} \cdot \sqrt{1-u^2}}$$

Donc : $\boxed{M = \dfrac{2 \cdot m}{\sqrt{1-\beta_1^2}}}$.

La masse de l'ensemble des deux corps reliés par le ressort avant éjection et supérieure à la somme des masses des corps après éjection !

Cette différence de masse correspond à l'énergie stockée dans le ressort tendu !

On vérifie facilement la conservation d'énergie totale dans le référentiel S_S.

Energie initiale : $E_{tot} = M \cdot c^2 = \dfrac{2 \cdot m}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \cdot c^2$ ici $\gamma = 1$, car le système est à l'arrêt.

Energie finale : $E_{tot} = m \cdot \gamma_{1g} \cdot c^2 + m \cdot \gamma_{1d} \cdot c^2 = \dfrac{2 \cdot m}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \cdot c^2$ ici $\gamma_{1g} = \gamma_{1d} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}$.

L'énergie totale est bien conservée.
(Rem. Lors d'un choc élastique, l'énergie cinétique et la masse sont également conservés.)

Exercice d'application de la conservation de mouvement et de l'énergie.

Enoncé : Un proton allant à une vitesse $\beta_1 \cdot c$ heurte de plein fouet un autre proton immobile.
Les deux protons restent collés ensemble après le choc et se déplacent dans la même direction que le proton initial.
(Utiliser un neutron est plus réaliste, mais le but est de simplifier pour que toutes les masses puissent s'exprimer comme un multiple de la masse m_p du proton.)

1) Quelle est la vitesse $\beta_3 \cdot c$ de l'ensemble des deux protons après la collision ?
2) Quelle est la masse m_3 de l'ensemble des deux protons collés, après la collision ?
   Il suffit de l'exprimer en multiple de la masse m_p du proton.
3) Quelle est la perte d'énergie cinétique au cours de cette collision ?
   Il suffit de l'exprimer en multiple de l'énergie au repos du proton.

A aucun endroit il est nécessaire de connaître la masse du proton.

Application numérique avec : $\beta_1 = 0{,}9999$.

Résolution :
Par conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie, on a :

$$\frac{m_p \cdot \beta_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} = \frac{m_3 \cdot \beta_3}{\sqrt{1-\beta_3^2}} \quad \text{et} \quad \frac{m_p \cdot c^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}} + m_p \cdot c^2 = \frac{m_3 \cdot c^2}{\sqrt{1-\beta_3^2}} .$$

Les inconnues sont : m_3 et β_3.

En multipliant la deuxième équation par β_3 et en la divisant par c^2, on obtient :

$$\beta_3 \cdot m_p \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} + 1 \right) = \frac{m_3 \cdot \beta_3}{\sqrt{1-\beta_3^2}} = \frac{m_p \cdot \beta_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} .$$

Donc : $\beta_3 = \dfrac{\beta_1}{1+\sqrt{1-\beta_1^2}}$ donne la vitesse de l'ensemble après collision.

De la deuxième équation : $m_3 = m_p \cdot \sqrt{1-\beta_3^2} \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} + 1 \right)$ donne la masse après collision.

$\beta_1 = 0{,}9999$ donc $\gamma_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}9999^2}} = 70{,}71$

$\beta_3 = \dfrac{0{,}9999}{1+\sqrt{1-0{,}9999^2}} = 0{,}9860 \qquad \gamma_3 = \dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}9860^2}} = 5{,}997$

$m_3 = \dfrac{(\gamma_1 + 1)}{\gamma_3} \cdot m_p = 11{,}96 \cdot m_p$ C'est une élévation de masse irréaliste, donc en réalité d'autres particules doivent être créer.

Energie cinétique avant la collision : $E_{cin\,init} = m_p \cdot c^2 \cdot (\gamma_1 - 1) = m_p \cdot c^2 \cdot 69{,}71$

Energie cinétique après la collision : $E_{cin\,fin} = m_3 \cdot c^2 \cdot (\gamma_3 - 1) = m_p \cdot c^2 \cdot 11{,}96 \cdot 5{,}997 = m_p \cdot c^2 \cdot 59{,}76$

Il y a assez d'énergie pour la création de matière dans de nouvelles particules, telles que des protons, neutrons, électrons, neutrinos etc. et les antiparticules correspondantes.