Corrigé de la série 1 : relativité

1.1 $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-(1-\epsilon)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-1+2\cdot\epsilon-\epsilon^2}}\approx\frac{1}{\sqrt{2\cdot\epsilon}}$

1.2 On utilise : $f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x$, ici $\gamma=f(x)=(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot(1-x)^{-\frac{3}{2}}$

$f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x=1+\frac{1}{2}\cdot x$, donc $\gamma\approx 1+\frac{1}{2}\cdot\beta^2$, puisque $x=\beta^2$.

Pour $\frac{1}{\gamma}$, on peut utiliser $\frac{1}{\gamma}=f(x)=(1-x)^{\frac{1}{2}}$, ou l'argument ci-dessous.

$$\frac{1}{\gamma}\approx\frac{1}{1+\frac{1}{2}\cdot\beta^2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2}\cdot\beta^2}{1-\frac{1}{2}\cdot\beta^2}=\frac{1-\frac{1}{2}\cdot\beta^2}{1-\frac{1}{4}\cdot\beta^4}\approx 1-\frac{1}{2}\cdot\beta^2$$

si β^2 est petit, alors β^4 est encore beaucoup plus petit !

1.3 Pour $\beta=0,99999$ on a $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=223.60736$ et $\gamma\approx\frac{1}{\sqrt{2\cdot\epsilon}}=223.60680$

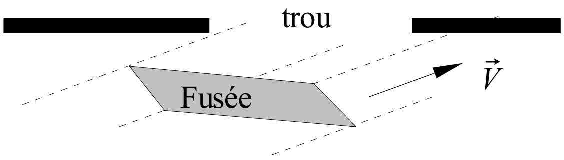
Pour $\beta=0,99$ on a $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=7.0888$ et $\gamma\approx\frac{1}{\sqrt{2\cdot\epsilon}}=7.071$

Pour $\beta=10^{-2}$ on a $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=1,000050004$ et $\gamma\approx 1+\frac{1}{2}\cdot\beta^2=1,00005$

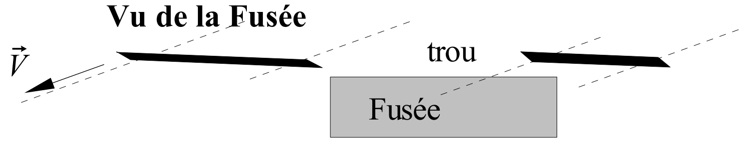
---

2. Le paradoxe de la fusée qui rapetisse pour passer à travers un trou.
L'erreur vient du faite que la contraction des longueur se fait dans la direction de déplacement et non dans une direction choisie arbitrairement. Les dessins ci-dessus ne sont pas corrects si la Fusée se déplace également vers le haut. Voici des dessins corrects.

Vu de la Terre :



Vu de la Fusée



Selon la Terre, la Fusée est déformée par contraction dans la direction de déplacement, mais cela ne lui permettra pas de passer à travers le trou. La longueur perpendiculairement au déplacement reste inchangée.
Selon la Fusée, le trou est déformé par contraction dans la direction de déplacement, mais elle ne passera pas à travers le trou. La taille du trou, perpendiculairement au déplacement reste inchangé.

---

3. La quantité de mouvement est :

$$p'=\frac{m\cdot\beta'\cdot c}{\sqrt{1-\beta'^2}}=\frac{m\cdot c\cdot(\beta-u)}{(1-\beta\cdot u)\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\beta-u}{1-\beta\cdot u}\right)^2}}=p'=\frac{m\cdot c\cdot(\beta-u)}{\sqrt{(1-\beta\cdot u)^2-(\beta-u)^2}}$$

$p'=\frac{m\cdot c\cdot(\beta-u)}{\sqrt{1+\beta^2\cdot u^2-\beta^2-u^2}}=p'=\frac{m\cdot c\cdot(\beta-u)}{\sqrt{1-\beta^2}\cdot\sqrt{1-u^2}}$ qui est l'expression cherchée.

L'expression de la quantité de mouvement dans $\boldsymbol{S'}$ reste raisonnablement simple.

Corrigé de la série 1 : relativité

4.1 Dans un référentiel : $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 - (m_3 \cdot v_3 + m_4 \cdot v_4) = 0$.

Dans un référentiel allant à vitesse V : $m_1 \cdot (v_1 + V) + m_2 \cdot (v_2 + V) - (m_3 \cdot (v_3 + V) + m_4 \cdot (v_4 + V)) = 0$,

donc : $(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 - m_3 \cdot v_3 - m_4 \cdot v_4) + (m_1 + m_2 - m_3 - m_4) \cdot V = 0$

Les quatre premiers termes s'annulent, donc il faut que le dernier terme soit nul, donc la masse doit être conservée.

4.2 L'exercice 3 indique comment se transforme la quantité de mouvement d'un référentiel à un autre.

$p = m \cdot \gamma \cdot \beta \cdot c$, $p' = p \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - m \cdot \gamma \cdot \frac{u \cdot c}{\sqrt{1-u^2}}$ où $u \cdot c$ = vitesse du référentiel ***S'***.

Conservation : $p_1 + p_2 - p_3 - p_4 = 0$ et $p'_1 + p'_2 - p'_3 - p'_4 = 0$.

Donc $(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - (m_1 \cdot \gamma_1 + m_2 \cdot \gamma_2 - m_3 \cdot \gamma_3 - m_4 \cdot \gamma_4) \cdot \frac{u \cdot c}{\sqrt{1-u^2}} = 0$

Le premier terme est nul par conservation de la quantité de mouvement dans le référentiel ***S***, donc le second doit aussi être nul.

Il y a conservation d'énergie totale : $m_1 \cdot \gamma_1 \cdot c^2 + m_2 \cdot \gamma_2 \cdot c^2 - m_3 \cdot \gamma_3 \cdot c^2 - m_4 \cdot \gamma_4 \cdot c^2 = 0$.

---

5. L'énergie cinétique est définie par : $E = m \cdot \gamma \cdot c^2$.

La conservation d'énergie cinétique s'écrit en relativité sous la forme :

$m_1 \cdot (\gamma_1 - 1) \cdot c^2 + m_2 \cdot (\gamma_2 - 1) \cdot c^2 - m_3 \cdot (\gamma_3 - 1) \cdot c^2 - m_4 \cdot (\gamma_4 - 1) \cdot c^2 = 0$

En développant cela devient :

$(m_1 \cdot \gamma_1 \cdot c^2 + m_2 \cdot \gamma_2 \cdot c^2 - m_3 \cdot \gamma_3 \cdot c^2 - m_4 \cdot \gamma_4 \cdot c^2) - (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \cdot c^2 = 0$

On a vu dans l'exercice 4.2 qu'il y a conservation d'énergie totale, c'est à dire que l'expression se trouvant dans la première parenthèse est nulle.

Par conséquent, on a $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0$, c'est-à-dire que la masse est conservée.

---

6. $E_{totale}^2 - p^2 \cdot c^2 = (m \cdot \gamma \cdot c^2)^2 - m \cdot \gamma \cdot \beta^2 \cdot c^2 \cdot c^2 = m^2 \cdot c^4 \cdot \gamma^2 \cdot (1 - \beta^2) = m^2 \cdot c^4$, l'égalité est montrée.

---

7. *Facultatif* : Les transformations de Lorentz donnent :

$\Delta X' = \gamma \cdot (\Delta X - \beta \cdot c \cdot \Delta T)$; $c \cdot \Delta T' = \gamma \cdot (c \cdot \Delta T - \beta \cdot \Delta X)$; $\Delta Y' = \Delta Y$ et $\Delta Z' = \Delta Z$.

Calculons : $\Delta S'^2 = \Delta X'^2 + \Delta Y'^2 + \Delta Z'^2 - c^2 \cdot \Delta T'^2 =$

$\Delta S'^2 = \gamma^2 \cdot (\Delta X - \beta \cdot c \cdot \Delta T)^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2 - \gamma^2 \cdot (c \cdot \Delta T - \beta \cdot \Delta X)^2 =$

$$\begin{aligned} \Delta S'^2 = {} & \gamma^2 \cdot (\Delta X^2 - 2 \cdot \cancel{\beta \cdot c \cdot \Delta T \cdot \Delta X} + \beta^2 \cdot c^2 \cdot \Delta T^2) + \Delta Y^2 + \Delta Z^2 - \\ & \gamma^2 \cdot (c^2 \cdot \Delta T^2 - 2 \cdot \cancel{\beta \cdot \Delta X \cdot c \cdot \Delta T} + \beta^2 \cdot \Delta X^2) \end{aligned} =$$

$\Delta S'^2 = \Delta X^2 \cdot (\gamma^2 - \gamma^2 \cdot \beta^2) + \Delta Y^2 + \Delta Z^2 - c^2 \cdot \Delta T^2 \cdot (\gamma^2 - \gamma^2 \cdot \beta^2) =$

$\Delta S'^2 = \Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2 - c^2 \cdot \Delta T^2 = \Delta S^2$, c'est ce que l'on voulait montrer.
