1. Vitesse du cycliste : V = 30 [km/h] = 8,33 [m/s]
Masse totale : m_{tot} = 80 [kg]

1.1 Energie cinétique de translation du cycliste :

$$E_{cin,\,translation} = 0.5 \cdot m \cdot V^2 = 0.5 \cdot 80 \cdot 8.33^2 = 2'775[J]$$

1.2 Le rayon d'une roue est de : $r = 0.5 \cdot 26[pouces] \cdot 0.0254[m/pouces] = 0.330[m]$

Moment d'inertie d'une roue : $I = m_{roue} \cdot r^2 = 1,6[kg] \cdot 0.33^2[m^2] = 0.174[kg \cdot m^2]$.

La vitesse de rotation d'une roue vaut : $\omega = V/r = 8.33/0.330 = 25.2[rad/s]$.

Energie cinétique de rotation des deux roues :

$$E_{cin,\,rotation} = 2 \cdot 0.5 \cdot I \cdot \omega^2 = 0.174 \cdot 25.2^2 = 110[J].$$

1.3 L'énergie cinétique totale vaut environ : $E_{cin,\,tot} = 2'775 + 110 = 2'885[J]$.

La proportion d'énergie cinétique de rotation relativement à l'énergie cinétique totale vaut :

Proportion = $\dfrac{110}{2'885} = 3,8\%$. C'est peu mais non négligeable.

Cette proportion est indépendante de la vitesse du cycliste !

Littéralement, on obtient : Proportion = $\dfrac{\text{masse des deux roues}}{\text{masse totale + masse des deux roues}}$.

2.1 Moment d'inertie du gyroscope : $I = 0.50 \cdot m \cdot r^2 = 0.50 \cdot 0.100 \cdot 0.03^2 = 4.5 \cdot 10^{-5}[kg \cdot m^2]$

Sa vitesse de rotation vaut : $\omega = 2 \cdot \pi \cdot 12'000/60 = 1'260[rad/s]$

Son énergie cinétique de rotation vaut :

$$E_{cin,\,rotation} = 0.5 \cdot I \cdot \omega^2 = 0.5 \cdot 4.5 \cdot 10^{-5} \cdot 1'260^2 = 36[J].$$

2.2 Ceci correspond à l'énergie cinétique qu'il aurait à une vitesse de translation de :

$$V = \sqrt{\frac{36}{0.5 \cdot 0.100}} = 27[m/s] = 97[km/h] \ !$$

2.3 Ceci correspond à l'énergie potentiel qu'il aurait à $\dfrac{36}{9.81 \cdot 0.100}$ = 37 mètres de hauteur !

---

3. Le moment d'inertie de l'anneau vaut : $I = m \cdot r^2 = 0.030 \cdot 0.50^2 = 7.5 \cdot 10^{-3}[kg \cdot m^2]$.

L'énergie de rotation est : $E_{cin} = \dfrac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$. $\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu$, ν = la fréquence de rotation.

3.1 On a donc : $E_{cin} = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega^2$, d'où $\omega = \sqrt{\dfrac{2 \cdot E_{cin}}{m}} \cdot \dfrac{1}{r}$

Numériquement cela donne : $\omega = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 9'000}{0.030}} \cdot \dfrac{1}{0.50} = 1'550[rad/sec]$.

La fréquence de rotation est donc de $\nu = \dfrac{1'550}{2 \cdot \pi} = 245[Hz]$.

Ceci correspond à 60 · 245 = 14'700 tours par minutes, ce qui est beaucoup !
L'accélération subie par les points matériels formant l'anneau vaut :

$a = \omega^2 \cdot r = 1'550^2 \cdot 0.50 = 120'000 \cdot g$, c'est énorme ! En formule : $a = \dfrac{2 \cdot E_{cin}}{m} \cdot \dfrac{1}{r}$

3.2 En doublant le rayon de l'anneau, on diminue de moitié la vitesse de rotation nécessaire pour obtenir la même énergie. On diminue également de moitié l'accélération centripète.

3.3 Le stockage dans un anneau ou disque tournant n'est concurrentielle à des accumulateurs que pour de grand systèmes ayant des rayons de plusieurs mètres.
L'énergie chimique contenue dans l'essence ne peut être égalée par un stockage électrique ou de mécanique en rotation. L'énergie chimique contenue dans de l'hydrogène est trois fois plus grande que dans une masse équivalente d'essence, mais les risques d'explosions limites l'usage d'un tel stockage d'énergie.

---

4. (1) L'exercice 3 de la série 2 indique un moyen d'estimer le moment d'inertie I d'un gyroscope.
On peu appliquer une force F constante sur l'extérieur du gyroscope, perpendiculaire au disque du gyroscope, et mesurer l'accélération de rotation. En mesurant en plus le rayon r du gyroscope et l'accélération de rotation α, on en déduit $I = \frac{M}{\alpha} = \frac{r \cdot F}{\alpha}$.

(2) On peut aussi suspendre une masse μ comme dans l'exercice 3 de la série 2, mesurer le rayon r du gyroscope et l'accélération a de la masse μ, pour en déduire que :
$M = r \cdot F_T$; $M = I \cdot \alpha$; $\mu \cdot g - F_T = \mu \cdot a$; $\alpha = a/r$, donc
$\mu \cdot g - \frac{I \cdot a}{r^2} = \mu \cdot a$, d'où on en déduit que : $I = \frac{\mu \cdot (g-a) \cdot r^2}{a}$.

(3) L'exercice 5 indique un moyen d'estimer le moment d'inertie I d'un gyroscope.
Si on peut l'assimiler à un disque de masse m et de rayon r connu, alors $I \approx 0.5 \cdot m \cdot r^2$.

(4) L'exercice 6 indique une autre méthode d'estimer le moment d'inertie I d'un gyroscope.
Il faut le faire tourner rapidement et mesurer sa vitesse de rotation ω, sa vitesse de précession Ω, sa masse m et la distance r_{CM} entre le point d'appuis et le centre de masse.
Ensuite on en déduite que : $I = \frac{m \cdot g \cdot r_{CM}}{\Omega \cdot \omega}$.

---

5. Moment d'inertie du gyroscope : $I = 0.5 \cdot m \cdot r^2 = 0.5 \cdot 0.1 \cdot 0.03^2 = 4.5 \cdot 10^{-5} [kg \cdot m^2]$
Sa vitesse de rotation vaut : $\omega = 2 \cdot \pi \cdot 12'000/60 = 1'260 [rad/s]$
La théorie du cours nous dit que la vitesse angulaire de précession du gyroscope est indépendante de l'angle que fait son axe avec la verticale et vaut : $\Omega = \frac{m \cdot g \cdot r_{CM}}{I \cdot \omega}$.
$r_{CM} = 0.050$ [m], masse : $m = 0.100$ [kg].
Donc la vitesse angulaire cherchée pour 5.1 et 5.2 est la même et vaut :

$$\Omega = \frac{m \cdot g \cdot r_{CM}}{I \cdot \omega} = \frac{0.100 \cdot 9.81 \cdot 0.050}{4.5 \cdot 10^{-5} \cdot 1'260} = 0.87 [\frac{rad}{s}].$$

Ce qui correspond à une période de rotation de : $T = \frac{2 \cdot \pi}{\Omega} = 7.3 [s]$.
En réalité l'armature du gyroscope augmente la valeur de m et diminue donc la période de rotation, mais qui peut bien dépasser la moitié de la valeur ci-dessus !

---

6. La vitesse de rotation du gyroscope vaut : $\omega = 2 \cdot \pi \cdot 12'000/60 = 1'260 [rad/s]$
La vitesse de précession du gyroscope vaut : $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{5} = 1.26 [rad/s]$.
La théorie du cours nous dit que la vitesse angulaire de précession du gyroscope vaut :

$$\Omega = \frac{m \cdot g \cdot r_{CM}}{I \cdot \omega}.$$

Ici $r_{CM} = 0.050$ [m], masse : $m = 0.100$ [kg].
Donc le moment d'inertie vaut :

$$I = \frac{m \cdot g \cdot r_{CM}}{\Omega \cdot \omega} = \frac{0.100 \cdot 9.81 \cdot 0.050}{1.26 \cdot 1'260} = 3.1 \cdot 10^{-5} [kg \cdot m^2].$$

Ce qui est raisonnable, comparé à l'exercice précédent.

---

7. Soit ω la vitesse angulaire de rotation de la barre lorsque sont centre de masse est le plus bas, donc lorsqu'elle est verticale,
Il n'y a pas de dissipation d'énergie, donc l'énergie potentielle initiale de la barre se transforme en énergie cinétique. Si on place l'origine au point d'attache de la barre, ce point ne bougeant pas, l'énergie cinétique de translation est nulle, seule l'énergie cinétique de rotation est non nulle.
Donc $m \cdot g \cdot d/2 = 0.5 \cdot I \cdot \omega^2$, où le moment d'inertie I est pris relativement à l'extrémité fixe de la barre.

Selon la règle de Steiner : $I = \frac{1}{12} \cdot m \cdot d^2 + m \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m \cdot d^2$

Donc $\omega = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot d}{I}} = \sqrt{\frac{3 \cdot g}{d}}$

L'extrémité de la barre avant donc à une vitesse maximale de :
$V = \omega \cdot d = \sqrt{3 \cdot g \cdot d}$.

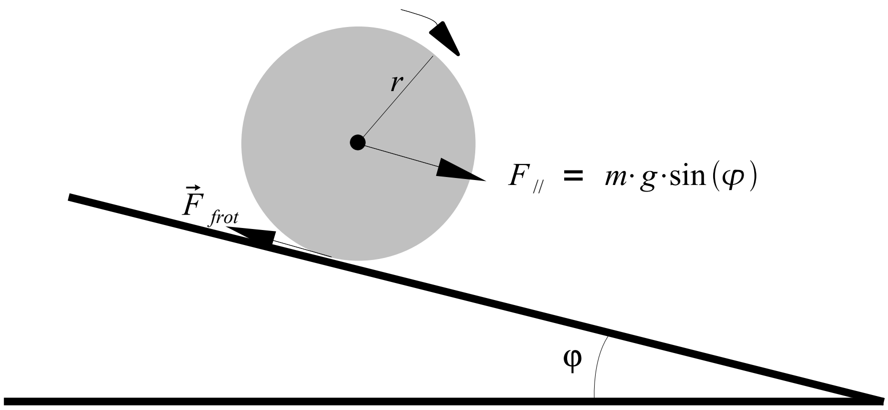
Il est intéressant de comparer avec le cas où toute la masse serait concentré à l'extrémité non fixe de la barre : $V = \sqrt{2 \cdot g \cdot d}$ selon Torricelli ou la conservation d'énergie.

---

8. L'énergie cinétique de translation vaut :
$E_{cin,\, translation} = 0.5 \cdot m \cdot V^2 = 0.5 \cdot 0.250 \cdot 0.30^2 = 0.0113[J]$.
L'énergie cinétique de rotation vaut : $E_{cin,\, rotation} = 0.5 \cdot I \cdot \omega^2$
Elle fait 10 tours par seconde sur elle-même, donc $\omega = 2 \cdot \pi \cdot 10 = 62,8[rad/s]$.
Le moment d'inertie vaut : $I = 2/5 \cdot m \cdot R^2 = 0.4 \cdot 0.250 \cdot 0.040^2 = 0.00016[kg \cdot m^2]$.
Donc $E_{cin,\, rotation} = 0.5 \cdot 0.00016 \cdot 62.8^2 = 0.316[J]$.
L'énergie cinétique de rotation est nettement supérieure à celle de translation, donc même si elle en perd une partie, elle se mettra à revenir en arrière.

---

9. Accélération d'une boule roulant sans glisser sur un plan incliné. C.f. exercice 8 de la série 3 !



L'accélération du centre de masse a_{CM} satisfait : $m \cdot a_{CM} = m \cdot g \cdot \sin(\varphi) - F_{frot}$.
Le moment de force M relativement au centre de la boule satisfait : $M = r \cdot F_{frot}$.
L'accélération angulaire α de rotation satisfait : $M = I_\Delta \cdot \alpha$.
L'accélération angulaire α de rotation est lié à l'accélération a_{CM} par : $a_{CM} = \alpha \cdot r$.
Ces 4 égalités nous permettent de déterminer l'accélération du centre de masse.
Les trois dernières égalités donnent : $r^2 \cdot F_{frot} = I_\Delta \cdot a_{CM}$, ce qui permet d'éliminer F_{frot}.

$$m \cdot a_{CM} = m \cdot g \cdot \sin(\varphi) - \frac{I_\Delta}{r^2} \cdot a_{CM} \quad \text{puis} \quad a_{CM} + \frac{I_\Delta}{m \cdot r^2} \cdot a_{CM} = g \cdot \sin(\varphi)$$

D'où l'on en déduit que : $a_{CM} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{I_\Delta}{m \cdot r^2}} \cdot g \cdot \sin(\varphi)$.

Dans le cas d'une boule pleine, $I_\Delta = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2$, donc $a_{CM} = \frac{5}{7} \cdot g \cdot \sin(\varphi)$

10*. Si on exerce une force de soutien égale à $F_{soutien}$, alors le moment de force sera égale à :
$M = d \cdot (m \cdot g - F_{soutien})$

La théorie du cours nous dit que : $\Omega = \dfrac{M}{I \cdot \omega \cdot \sin(90°)}$ et que le sens du mouvement de précession Ω est celui indiqué par le sens du moment de force. Or dans le cas de la meule, on force le sens du mouvement de précession dans le sens opposé à celui du moment de force. Les sens étant opposés, un signe moins apparaît et la formule devient : $-\Omega = \dfrac{M}{I \cdot \omega \cdot \sin(90°)}$

On en déduit que : $-\Omega \cdot I \cdot \omega = M = d \cdot (m \cdot g - F_{soutien})$.

Donc $F_{soutien} = m \cdot g + \dfrac{\Omega \cdot I \cdot \omega}{d}$. La force de soutien devient supérieure à la force de pesanteur !

On sait aussi que : $V = \omega \cdot R$; $V = \Omega \cdot d$ (car la meule ne glisse pas) et $I = 0.5 \cdot m \cdot R^2$.

Donc $\omega = \dfrac{\Omega \cdot d}{R}$ ce qui donne au final : $\boxed{F_{soutien} = m \cdot g + 0.5 \cdot m \cdot R \cdot \Omega^2}$

$$\boxed{\frac{F_{soutien}}{m \cdot g} = 1 + \frac{R \cdot \Omega^2}{2 \cdot g}}$$

Si le rayon R de la meule est assez grand, ou si on la fait tourner suffisamment rapidement (Ω grand), la force de soutien augmente de façon non négligeable !