1. Le moment d'inertie est par définition : $I = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot R_i^2$, où les R_i sont les distances des points matériels m_i à l'axe de rotation.
Pour un anneau mince, toutes les distances sont les mêmes et valent r.
Donc : $I = r^2 \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i = M \cdot r^2$.

---

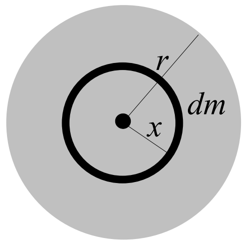
2. Pour le premier corps : $I_1 = \sum_{i=1}^{N_1} m_i \cdot R_i^2$ où
N_1 = le nombre de points matériels constituant ce premier corps.
Pour le second corps : $I_2 = \sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2} m_i \cdot R_i^2$ où
N_2 = le nombre de points matériels constituant ce second corps.
Le moment d'inertie des deux corps réunis est : $I_{12} = \sum_{i=1}^{N_1+N_2} m_i \cdot R_i^2$. Donc

$$I_{12} = \sum_{i=1}^{N_1} m_i \cdot R_i^2 + \sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2} m_i \cdot R_i^2 = I_1 + I_2 .$$

Si l'on avait plus que deux corps, on aurait autant de sommes que de corps.

---

3. Cet exercice est similaire à l'exercice 2 de la série 2.
Le disque plein est une somme d'anneaux minces.
L'anneau se trouvant à distance x du centre et d'épaisseur dx a une masse égale à :
$dm = \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dx$ où ρ est la densité surfacique du disque. $\rho \cdot \pi \cdot r^2 = m$.
Le moment d'inertie de cet anneau vaut :
$dI = dm \cdot x^2 = \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dx \cdot x^2 = \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot x^3 \cdot dx$
Le moment d'inertie du disque est la somme des moments d'inerties des anneaux, selon l'exercice 2 :



$$I = \int_0^r \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot x^3 \cdot dx = \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot \int_0^r x^3 \cdot dx$$

$$I = \frac{\rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^4}{4} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot r^2 \qquad \boxed{I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2}$$

C'est exactement le même calcul d'intégral que dans l'exercice 2.1 de la série 2.

---

5. (4) L'exercice 4 est un cas particulier de l'exercice 5, dans lequel la longueur $L = 0$.
On peut décomposer la barre en petites tranches d'épaisseurs dx et de masses $dm = \rho \cdot dx$, où ρ est la densité linéique de la barre. $\rho \cdot a = m$.
Le moment d'inertie de la barre vaut : $I = \int_{L-a/2}^{L+a/2} \rho \cdot x^2 \cdot dx$.

$$I = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \left(\left(L + \frac{a}{2} \right)^3 - \left(L - \frac{a}{2} \right)^3 \right) = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \left(\left(L^3 + 3L^2 \cdot \frac{a}{2} + 3L \cdot \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{8} \right) - \left(L^3 - 3L^2 \cdot \frac{a}{2} + 3L \cdot \frac{a^2}{4} - \frac{a^3}{8} \right) \right)$$

$$I = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \left(3L^2 \cdot a + \frac{a^3}{4} \right) = \rho \cdot a \cdot L^2 + \frac{1}{12} \cdot \rho \cdot a \cdot a^2 \text{, donc : } \boxed{I = \frac{1}{12} \cdot m \cdot a^2 + m \cdot L^2}$$

Le moment d'inertie de la barre selon un axe qui passe par son centre vaut : $I_0 = \frac{1}{12} \cdot m \cdot a^2$.

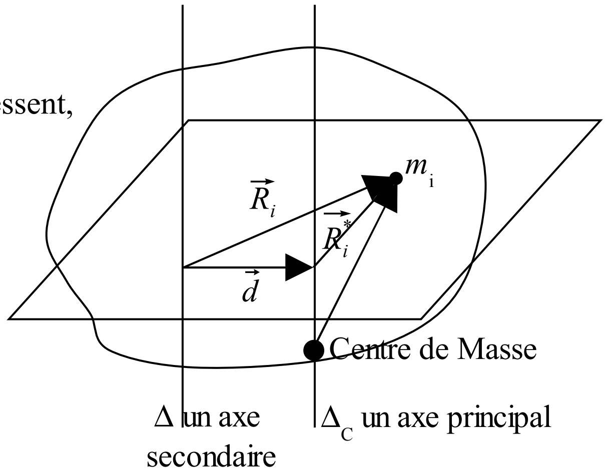
A ce moment d'inertie s'ajoute le terme $m \cdot L^2$ si l'axe est décalé d'une longueur L du centre de la barre ! L'exercice 4 + la règle de Steiner donne ce résultat.

---

6. Montrons la formule de la règle de Steiner.

Considérons un point matériel m_i.

Dans tout plan perpendiculaire aux deux axes qui nous intéressent, introduisons les vecteurs :



Δ_C est un axe d'inertie principal.

$\overrightarrow{R_i^*} = \langle \vec{r}^{\,*}_{i,x}\,;\vec{r}^{\,*}_{i,y}\,;0\rangle$, qui part de l'axe Δ_C et arrive sur m_i.

$\overrightarrow{R_i}$, qui part de l'axe Δ et arrive sur m_i.

$\vec{d}$, qui part de l'axe Δ et arrive sur l'axe Δ_C. $\vec{d}$

$\|\vec{d}\|$ = la distance entre les deux axes.

Donc, pour chaque m_i, on a : $\overrightarrow{R_i} = \vec{d} + \overrightarrow{R_i^*}$.

Calculons : $I_\Delta = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot R_i^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \left\|\overrightarrow{R_i}\right\|^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \left\|\vec{d} + \overrightarrow{R_i^*}\right\|^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \left(\vec{d} + \overrightarrow{R_i^*}\right) \bullet \left(\vec{d} + \overrightarrow{R_i^*}\right)$

$$I_\Delta = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) \cdot d^2 + 2 \cdot \vec{d} \bullet \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \overrightarrow{R_i^*}}_{=0} + \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot R_i^{*2} = m_{tot} \cdot d^2 + I_{\Delta_C}$$

Le terme du milieu est nul car

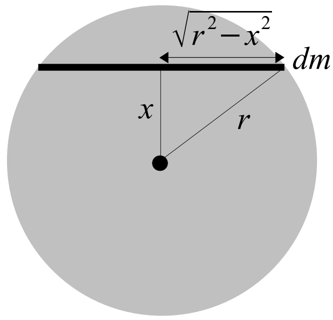
$$\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \overrightarrow{R_i^*} = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \langle r^*_{i,x}\,;r^*_{i,y}\,;0\rangle = m_{tot} \cdot \langle r^*_{CM,x}\,;r^*_{CM,y}\,;0\rangle = \vec{r}^{\,*}_{CM} = \vec{0}$$

$\overrightarrow{r^*_{CM}}$ est le vecteur allant du centre de masse au centre de masse, il est donc de longueur nulle. CQFD

Ce résultat aurait pu s'appliquer à l'exercice 5, si l'exercice 4 avait été fait indépendamment de l'exercice 5.

7.1 La sphère pleine et homogène est une somme de disques homogènes.

Le disque se trouvant à distance x du centre et d'épaisseur dx a un rayon égale à $\sqrt{r^2 - x^2}$ et une masse égale à $dm = \rho \cdot \pi \cdot (r^2 - x^2) \cdot dx$ où



ρ est la densité de la sphère. $\rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = m$.

Le moment d'inertie de ce disque vaut :

$$dI = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot (r^2 - x^2) = \rho \cdot \pi \cdot (r^2 - x^2)^2 \cdot dx$$

$$dI = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi \cdot (r^4 - 2 \cdot r^2 \cdot x^2 + x^4) \cdot dx$$

Le moment d'inertie de la sphère est la somme des moments d'inerties des disques, selon l'exercice 2 :

$$I = \int_{-r}^{r} \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi \cdot (r^4 - 2 \cdot r^2 \cdot x^2 + x^4) \cdot dx = \int_{0}^{r} \rho \cdot \pi \cdot (r^4 - 2 \cdot r^2 \cdot x^2 + x^4) \cdot dx$$

$$I = \rho \cdot \pi \cdot \left(r^5 - 2 \cdot r^2 \cdot \frac{r^3}{3} + \frac{r^5}{5}\right) = \rho \cdot \pi \cdot \frac{8 \cdot r^5}{15} = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \frac{2}{5} \cdot r^2 \quad \boxed{I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2}$$

7.2 Une sphère creuse de rayon r et d'épaisseur très petite dr est la différence d'une sphère pleine de rayon $r + dr$ et d'une sphère pleine de rayon r.

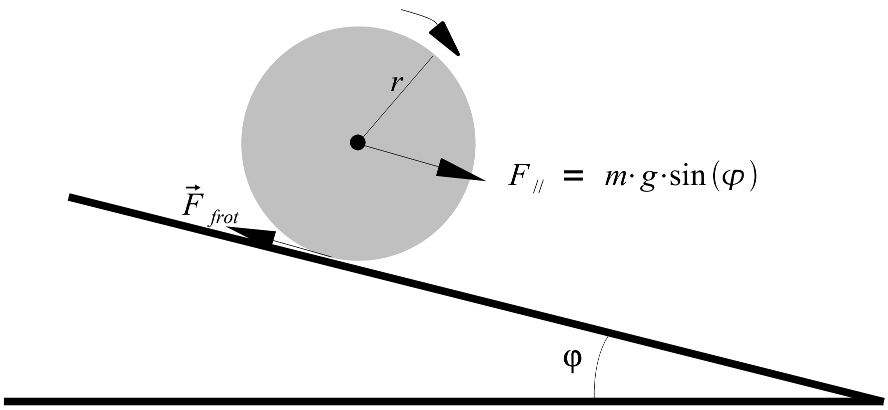
Le moment d'inertie de la sphère creuse est donc : $I = \rho \cdot \pi \cdot \frac{8 \cdot (r + dr)^5}{15} - \rho \cdot \pi \cdot \frac{8 \cdot r^5}{15}$

$I = \rho \cdot \pi \cdot (8/15) \cdot (5 \cdot r^4 \cdot dr + dr \cdot \text{négligeable})$ masse : $m = \rho \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr$.

$I = \rho \cdot \pi \cdot 4 \cdot r^2 \cdot dr \cdot \frac{2}{3} \cdot r^2$, donc le moment d'inertie de la sphère creuse vaut : $\boxed{I = \frac{2}{3} \cdot m \cdot r^2}$.

Le moment d'inertie est de nouveau de la forme : un nombre fois la masse fois le carré du rayon.

8. Accélération d'un cylindre roulant sans glisser sur un plan incliné.



L'accélération du centre de masse a_{CM} satisfait : $m\cdot a_{CM} = m\cdot g\cdot \sin(\varphi) - F_{frot}$.
Le moment de force M relativement au centre du cylindre satisfait :
$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}_{frot} + \overrightarrow{r_{CM}}\times F_S + \overrightarrow{r_{CM}}\times F_P$, donc $M = r\cdot F_{frot}$, car $r_{\_CM} = 0$ [m] vu depuis le CM.
L'accélération angulaire α de rotation satisfait : $M = I_\Delta\cdot\alpha$.
L'accélération angulaire α de rotation est lié à l'accélération a_{CM} par : $a_{CM} = \alpha\cdot r$.
Ces 4 égalités nous permettent de déterminer l'accélération du centre de masse.
Les trois dernières égalités donnent : $r^2\cdot F_{frot} = I_\Delta\cdot a_{CM}$, ce qui permet d'éliminer F_{frot}.

$$m\cdot a_{CM} = m\cdot g\cdot \sin(\varphi) - \frac{I_\Delta}{r^2}\cdot a_{CM} \quad \text{puis} \quad a_{CM} + \frac{I_\Delta}{m\cdot r^2}\cdot a_{CM} = g\cdot \sin(\varphi)$$

D'où l'on en déduit que : $a_{CM} = \dfrac{1}{1+\dfrac{I_\Delta}{m\cdot r^2}}\cdot g\cdot \sin(\varphi)$.

Dans le cas du cylindre, $I_\Delta = \dfrac{1}{2}\cdot m\cdot r^2$, donc $a_{CM} = \dfrac{2}{3}\cdot g\cdot \sin(\varphi)$

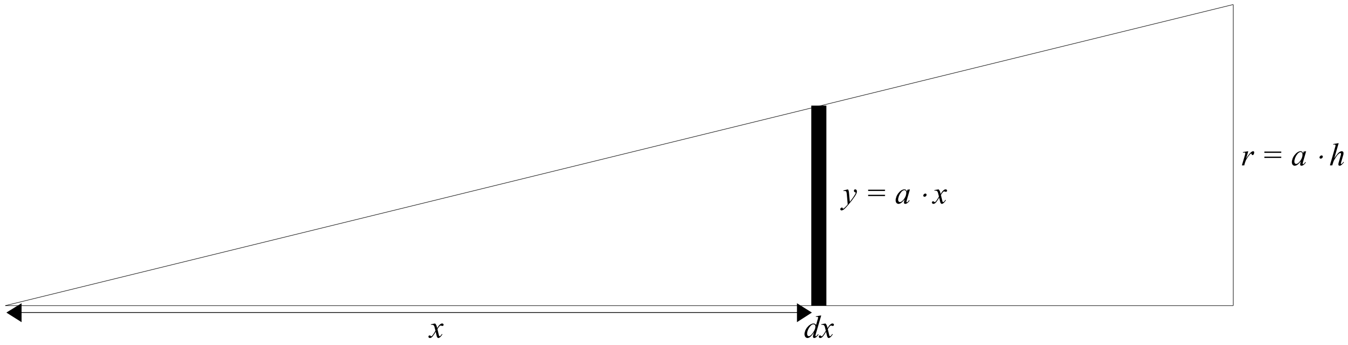
Le moment d'inertie augmente l'inertie du cylindre, par contre laisse inchangée la force accélératrice. Celui-ci accélère donc plus lentement que s'il glissait. Ceci est normal, car le cylindre subit une force de frottement au point de contacte.

Voici une autre méthode de résolution plus simple, mais plus subtile.
Le point de contacte est immobile et on peut considérer que le cylindre tourne autour de ce point durant le cours instant de contacte.
Le moment de force relativement à ce point de contacte est : $M = r\cdot m\cdot g\cdot \sin(\varphi)$
L'accélération angulaire α de rotation satisfait : $M = I\cdot\alpha$.
Le moment d'inertie relativement à l'axe passant par le point de contacte est, selon la règle de Steiner, $I = I_\Delta + m\cdot r^2$. On en déduit : $(I_\Delta + m\cdot r^2)\cdot\alpha = r\cdot m\cdot g\cdot \sin(\varphi)$.

Donc : $\alpha = \dfrac{1}{r+\dfrac{I_\Delta}{m\cdot r}}\cdot m\cdot g\cdot \sin(\varphi)$

De $a_{CM} = \alpha\cdot r$ on retrouve que : $a_{CM} = \dfrac{1}{1+\dfrac{I_\Delta}{m\cdot r^2}}\cdot g\cdot \sin(\varphi)$

9. Moment d'inertie d'un cône plein et homogène selon son axe de symétrie.



h = la hauteur du cône.
r = le rayon de la base du cône. $a = r / h$ = la pente.
Le cône pleine et homogène est une somme de disques homogènes.
Le disque se trouvant à distance x du sommet et d'épaisseur dx a un rayon égale à $y = a \cdot x$ et une masse égale à $dm = \rho \cdot \pi \cdot a^2 \cdot x^2 \cdot dx$ où

ρ est la densité du cône. $\rho \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = m$.

Le moment d'inertie de ce disque vaut : $dI = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot a^2 \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi \cdot a^4 \cdot x^4 \cdot dx$

Le moment d'inertie du cône est la somme des moments d'inerties des disques, selon l'exercice 2 :

$$I = \int_0^h \frac{1}{2} \rho \cdot \pi \cdot a^4 \cdot x^4 \cdot dx$$

$$I = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi \cdot a^4 \cdot \frac{h^5}{5} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \pi \cdot a^2 \cdot h^2 \cdot h \cdot a^2 \cdot h^2 = \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \right) \cdot r^2$$

$$\boxed{I = \frac{3}{10} \cdot m \cdot r^2}$$

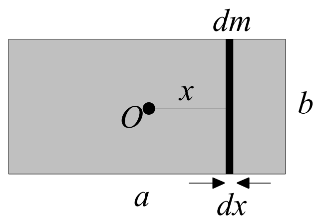
Comme toujours, le moment d'inertie est proportionnel à la masse et au carré du rayon.

---

10. Le rectangle pleine et homogène est une somme de barres minces et homogènes de masses : $dm = \rho \cdot b \cdot dx$ où ρ est la densité : $\rho \cdot a \cdot b = m$.

Selon la règle de Steiner : $dI = \frac{1}{12} \cdot dm \cdot b^2 + dm \cdot x^2$

$\sqrt{r^2 - x^2}$



$$I = \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{1}{12} \rho \cdot b^3 + \rho \cdot b \cdot x^2 \right) \cdot dx$$

$$I = \frac{1}{12} \rho \cdot b^3 \cdot a + \rho \cdot b \cdot \frac{1}{3} \cdot \left((a/2)^3 - (-a/2)^3 \right)$$

$$I = \frac{1}{12} \rho \cdot a \cdot b \cdot b^2 + \frac{1}{12} \cdot \rho \cdot b \cdot a \cdot a^2 \qquad \boxed{I = \frac{1}{12} \cdot m \cdot (a^2 + b^2)}$$

<u>Autre méthode :</u>

$$dm = \rho \cdot dx \cdot dy \qquad I = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (x^2 + y^2) \cdot \rho \cdot dx \cdot dy$$

Intégrons selon x : $I = \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{a^3}{12} + a \cdot y^2 \right) \cdot \rho \cdot dy$

Intégrons selon y : $I = \left(b \cdot \frac{a^3}{12} + a \cdot \frac{b^3}{12} \right) \cdot \rho$ On retrouve : $\boxed{I = \frac{1}{12} \cdot m \cdot (a^2 + b^2)}$