Relativité restreinte : introduction

Suite à l'incompatibilité entre la théorie de la mécanique de Newton et à l'électrodynamique résumée par les équations de Maxwell, Einstein proposa deux énoncés concernant la physique, qu'on appelle postulats, car ils ne peuvent pas être déduit d'autres principe plus fondamentaux.
Jusqu'à nos jours aucune expérience n'a permis de douter de la justesse de ces deux postulats.

1. **Le postulat de la relativité**
   Les résultats de tout expérience entièrement conduite à l'intérieur d'un certain système de référence sont indépendants de tout mouvement de translation uniforme de ce système de référence.

2. **Le postulat d'invariabilité de la vitesse de la lumière**
   Dans tout système de référence, la mesure de la vitesse de la lumière donne un résultat qui ne dépend pas de la vitesse de la source qui émet la lumière.

Le premier postulat dit donc qu'il est impossible de déterminer la vitesse d'un référentiel en restant entièrement à l'intérieur de ce référentiel. Une vitesse est toujours **relative** à un observateur.
Remarquez que cela n'est pas vrai pour une accélération, qui peut être déterminée en restant entièrement à l'intérieur du référentiel accélérer. (Localement, ce n'est pas vrai si l'accélération provient d'un champ gravitationnelle. C'est la base de la relativité générale.)

Le deuxième postulat dit que la lumière se comporte comme n'importe quelle onde. La vitesse de la source n'influence jamais la vitesse de l'onde, mais elle influence la fréquence de l'onde.

Première conséquence des deux postulats :

3. **la constance de la vitesse de la lumière.**
   La vitesse de la lumière dans le vide est une constante que l'on note usuellement par la lettre c.
   La mesure de cette vitesse donne toujours la même valeur, quel que soit le référentiel qui effectue la mesure.

Justification :

- Admettons que depuis un référentiel S_1 la mesure de la vitesse de la lumière donne le résultat V_1 et que depuis un référentiel S_2 la mesure de la vitesse de la lumière donne le résultat V_2. Ces vitesses sont indépendantes de la vitesse de la source selon le $2^{ème}$ postulat.
- On peut choisi la même vitesse de la source dans chacun des deux référentiel. Donc selon le 1^{er} postulat les résultats de ces deux expériences doivent donner le même résultat $V_1 = V_2$ que l'on note usuellement c.

Deuxième conséquence des deux postulats :

4. **vitesse d'un référentiel relativement à un autre.**
   Si la vitesse d'un référentiel S_1 en mouvement de translation uniforme relativement à un référentiel S_2 est V, alors la vitesse du référentiel S_2 en mouvement relativement au référentiel S_1 est aussi égale à V.

Cela signifie que si un homme debout sur le bord de la route voit passer une voiture à 100 [km/h], alors le conducteur de la voiture voit passer l'homme qui le regarde aussi à 100 [km/h].

Justification :

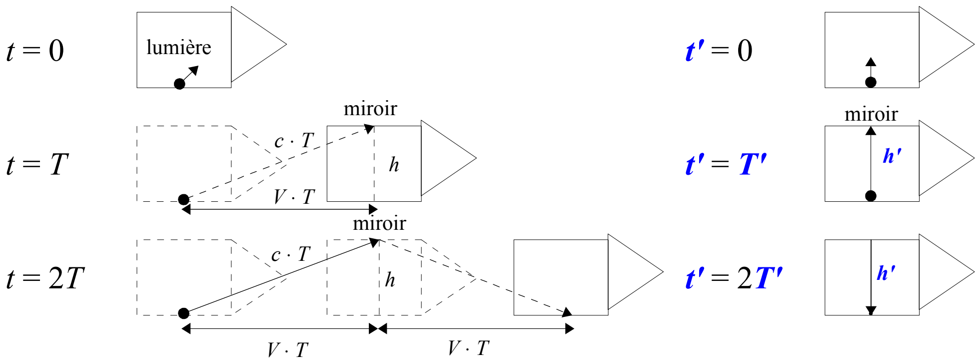
- Admettons que depuis le référentiel S_1 le référentiel S_2 se déplace à vitesse V_1 et que depuis le référentiel S_2 le référentiel S_1 se déplace à vitesse V_2. On veut montrer que forcément $V_2 = V_1$.
- Chaque référentiel effectue le même type de mesure sur l'autre, donc selon le 1^{er} postulat ils doivent obtenir le même résultat de mesure $V_2 = V_1$. Si ce n'était pas le cas, un des deux référentiels serait privilégié par rapport à l'autre.

Dilatation du temps

Montrons qu'une autre conséquence des deux postulats est que la mesure de la durée d'un événement dépend de la vitesse V de l'observateur relativement à l'événement.

La vitesse de la lumière = $\boldsymbol{c}$.
Notons $\boldsymbol{S}$ un référentielle d'inertie, par exemple la Terre en première approximation.
Notons $\boldsymbol{S'}$ un autre référentielle d'inertie se déplaçant à vitesse V relativement à $\boldsymbol{S}$. Par exemple une Fusée.
Faisons partir une impulsion lumineuse d'un côté de la Fusée $\boldsymbol{S'}$ pour que, selon $\boldsymbol{S'}$, elle se déplace perpendiculairement à la direction de translation de $\boldsymbol{S}$. L'impulsion va être réfléchie sur un miroir puis revenir au point de départ.

Dessin vu depuis la Terre S Dessin vu depuis la Fusée $\boldsymbol{S'}$



Par Pythagore : $c^2 \cdot T^2 = V^2 \cdot T^2 + h^2$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{h'} = \mathrm{c} \cdot \boldsymbol{T'}$

$h = \boldsymbol{h'}$ car sinon la Fusée passerait à travers un trou selon un référentiel et pas selon un autre.

Donc : $c^2 \cdot T^2 = V^2 \cdot T^2 + c^2 \cdot \boldsymbol{T'}^2$, $\quad \boldsymbol{T'}^2 = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \cdot T^2$

Conclusion : $\boxed{\boldsymbol{T'} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \cdot T}$

La durée T mesurée depuis la Terre S, sur des <u>horloges différentes</u> au départ et à l'arrivée est <u>plus grande</u> que la durée $\boldsymbol{T'}$ mesurée depuis la Fusée $\boldsymbol{S'}$, sur la <u>même horloge</u> au départ et à l'arrivée.

<u>Conventions - notations.</u>
Le temps $\boldsymbol{T'}$ mesuré par l'horloge de la Fusée $\boldsymbol{S'}$, qui est <u>la même</u> au départ et à l'arrivée, s'appelle le **temps propre** de la durée de l'expérience.

On note généralement : $\boxed{\beta = \frac{V}{c}}$; $\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}}$ remarque : $\gamma \geq 1$

propre

Relations : $\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}}$; $\boxed{\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}}$; $\gamma^2 \cdot (1 - \beta^2) = 1$; $\boxed{T = \gamma \cdot \boldsymbol{T'}}$

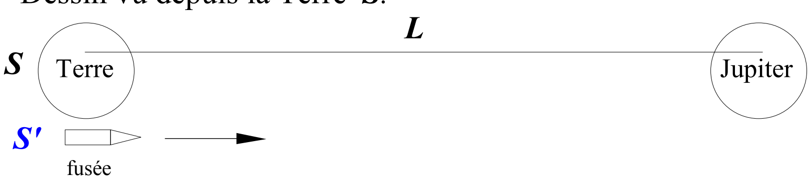
Le **temps propre** $\boldsymbol{T'}$ est celui mesuré dans le référentiel dans lequel <u>l'horloge est immobile</u>.
Dans tout référentiel, la mesure d'une durée est toujours <u>plus grand ou égale</u> à la **durée propre**.

Contraction des longueurs

Une autre conséquence de ce qui précède est que la longueur d'un objet ou la distance entre deux objets dépend de la vitesse V de l'observateur relativement aux objets.

La vitesse de la lumière = $\boldsymbol{c}$.
Notons $\boldsymbol{S}$ un référentielle d'inertie, par exemple la Terre en première approximation.
Notons $\boldsymbol{S'}$ un autre référentielle d'inertie se déplaçant à vitesse V relativement à $\boldsymbol{S}$. Par exemple une Fusée.
Imaginons une Fusée $\boldsymbol{S'}$ allant de la Terre vers Jupiter.
On considèrera que dans le référentiel $\boldsymbol{S}$, la Terre et Jupiter sont immobiles.
Notons $\boldsymbol{L}$ la distance entre la Terre et Jupiter dans ce référentiel.
Notons $\boldsymbol{L'}$ la distance entre la Terre et Jupiter dans le référentiel de la Fusée $\boldsymbol{S'}$.
Notons $\boldsymbol{\Delta t}$ le temps pris par la Fusée pour aller de la Terre à Jupiter, mesuré dans $\boldsymbol{S}$.
Notons $\boldsymbol{\Delta t'}$ le temps pris par la Fusée pour aller de la Terre à Jupiter, mesuré dans $\boldsymbol{S'}$.
Notons $\boldsymbol{V}$ la vitesse de la Fusée, mesurée dans $\boldsymbol{S}$.
Notons $\boldsymbol{V'}$ la vitesse de l'ensemble Terre - Jupiter, mesurée dans $\boldsymbol{S'}$.

Dessin vu depuis la Terre $\boldsymbol{S}$.



Vu depuis la Terre $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\Delta t}$
Vu depuis la Fusée $\boldsymbol{S'}$, $\boldsymbol{L'} = \boldsymbol{V'} \cdot \boldsymbol{\Delta t'}$
La conséquence "4. vitesse d'un référentiel relativement à un autre" de l'introduction nous informe que $\boldsymbol{V'} = \boldsymbol{V}$.
$\boldsymbol{\Delta t'}$ est mesuré sur l'horloge de la Fusée au départ et à l'arrivée, c'est donc le *temps propre*. La page précédente nous indique donc que : $\boldsymbol{\Delta t} = \gamma \cdot \boldsymbol{\Delta t'}$.
On a donc : $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\Delta t} = \boldsymbol{V'} \cdot \boldsymbol{\Delta t} = \boldsymbol{V'} \cdot \gamma \cdot \boldsymbol{\Delta t'} = \gamma \cdot \boldsymbol{L'}$

Conclusion : $\boxed{L = \gamma \cdot L'}$

La longueur L' d'un objet relativement à un référentiel S' dans lequel l'objet se déplace, est <u>plus petite</u> que la longueur L de cet objet relativement au référentiel S dans lequel l'objet est <u>immobile.</u>

<u>Conventions - notations.</u>
La longueur L d'un objet dans un référentiel S dans lequel l'objet est <u>immobile</u>, s'appelle la **longueur propre** de l'objet.

On note généralement : $\boxed{\beta = \frac{V}{c}}$; $\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}}$ remarque : $\gamma \geq 1$

propre

Relations : $\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}$; $\boxed{\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}}$; $\gamma^2 \cdot (1 - \beta^2) = 1$; $\boxed{L = \gamma \cdot L'}$; $\boxed{T = \gamma \cdot T'}$

La **longueur propre** L est celle mesurée dans le référentiel dans lequel elle est immobile.
Dans tout référentiel, la mesure d'une longueur est toujours plus <u>petite ou égale</u> à la **longueur propre**.

Remarquez que : $V'_{\text{itesse}} = \frac{L}{T} = \frac{\gamma \cdot L'}{\gamma \cdot T'} = \frac{L'}{T'} = V_{\text{itesse}}$

La vitesse de la Fusée relativement à la Terre est la même que la vitesse de la Terre relativement à la Fusée.

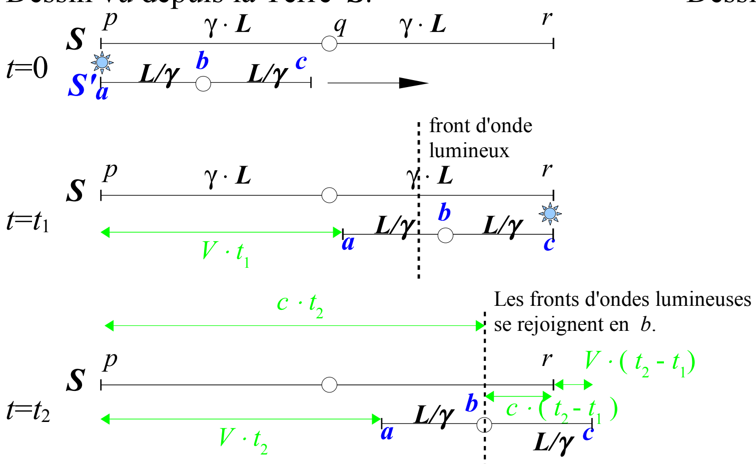
Contraction des longueurs et simultanéité

Puisque les résultats précédents sont tellement nouveaux et contre intuitif, montrons d'une autre manière la contraction des longueurs, sans utiliser le résultat sur la dilatation du temps.

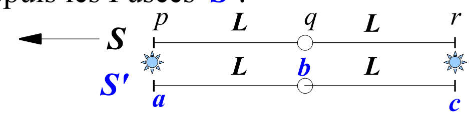
Montrons également que cela implique que deux **événements simultanés** dans un référentiel, ne le sont pas forcément dans un autre.
Il se peut que depuis un référentiel l'événement "A" précède l'événement "B", alors que dans un autre référentiel l'événement "A" suit l'événement "B". Mais cela n'est possible que si la lumière n'a pas le temps d'aller de "A" à "B" entre ces deux événements, selon un référentiel.
(Si la lumière n'a pas le temps selon un référentiel, elle n'aura jamais le temps, quel que soit le référentiel.)

La vitesse de la lumière = c.
Imaginons trois Fusées $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ immobiles dans un référentiel $\boldsymbol{S'}$.
La Fusée $\boldsymbol{b}$ se trouvant au milieu entre les Fusées $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{c}$.
Notons $\boldsymbol{L}$ la longueur propre de $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{b}$. C'est celle mesurée dans $\boldsymbol{S'}$.
Notons $\boldsymbol{S}$ un référentielle d'inertie, par exemple la Terre en première approximation.
Notons V la vitesse des Fusées $\boldsymbol{S'}$ relativement à la Terre $\boldsymbol{S}$.
Dans le référentiel de la Terre $\boldsymbol{S}$, plaçons trois positions $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{r}$, de telle sorte que vu depuis les Fusées $\boldsymbol{S'}$ les position $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{r}$ coïncident avec les positions $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ au temps $t = 0$.
Lorsque $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{a}$ se croisent, un éclaire de lumière est émis.
Lorsque $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{c}$ se croisent, un éclaire de lumière est émis.
Ces deux éclaires arriveront en même temps en $\boldsymbol{b}$, quel que soit le référentiel d'observation, car c'est évident dans le référentiel $\boldsymbol{S'}$ et les temps d'occurrences de deux événements au même endroit peuvent être mesurés sur la même horloge. La simultanéité d'événements en un même endroit est indépendante du référentiel.
Sachant que la vitesse de la lumière est indépendante du référentiel, le but est d'en faire des déductions sur les distances parcourues par les éclaires de lumière.

Dessin vu depuis la Terre $\boldsymbol{S}$.



Dessin vu depuis les Fusées $\boldsymbol{S'}$.



Dans le référentiel $\boldsymbol{S'}$ les événements : "$\boldsymbol{p}$ croise $\boldsymbol{a}$" et "$\boldsymbol{r}$ croise $\boldsymbol{c}$" sont simultanés.
La lumière arrivera en $\boldsymbol{b}$ au même instant, mais pas en $\boldsymbol{q}$ aux mêmes instants, car la Terre $\boldsymbol{S}$ se déplace.

Montrons que les longueurs indiquées sur les dessins sont correctes.
La donnée est que L est la longueur propre de $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{b}$.
Notons $\boldsymbol{L}_{pq}$ la longueur entre $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ mesurée dans $\boldsymbol{S}$. C'est une longueur propre. ($\boldsymbol{L}_{pq} = \boldsymbol{L}_{qr}$)
Notons $\boldsymbol{L'}_{ab}$ la longueur entre $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ mesurée dans $\boldsymbol{S'}$. C'est une longueur propre. ($\boldsymbol{L'}_{ab} = \boldsymbol{L'}_{bc}$)
Notons $\boldsymbol{L'}_{pq}$ la longueur entre $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ mesurée dans $\boldsymbol{S'}$.
Notons $\boldsymbol{L}_{ab}$ la longueur entre $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ mesurée dans $\boldsymbol{S}$.
Par choix, $\boldsymbol{L'}_{ab} = \boldsymbol{L'}_{pq} = L$.

On supposera que les longueurs se déplaçant à vitesse V relativement à un référentiel subissent une contraction d'un facteur γ que l'on cherche à déterminer. Bien sûr on retrouvera le facteur γ vu précédemment. (Des considérations générales sur l'isotropie et l'homogénéité de l'espace et du temps montent qu'il ne peut pas y avoir d'autres sortent de modifications sur les longueurs.)
Donc : $\boldsymbol{L'}_{ab} = \gamma \cdot \boldsymbol{L}_{ab}$ et $\boldsymbol{L}_{pq} = \gamma \cdot \boldsymbol{L'}_{pq}$. et par choix : $\boldsymbol{L'}_{ab} = \boldsymbol{L'}_{pq} = L$.
D'où : $\boldsymbol{L}_{ab} = 1 / \gamma \cdot \boldsymbol{L'}_{ab} = L/\gamma$ et $\boldsymbol{L}_{pq} = \gamma \cdot \boldsymbol{L'}_{pq} = \gamma \cdot L$. Comme indiqué sur le dessin.

En se basant sur les observations depuis le référentiel ***S*** uniquement, on voit que :
1) $V \cdot t_1 + 2 \cdot L/\gamma = 2 \cdot \gamma^2 \cdot L/\gamma$
2) $V \cdot t_2 + L/\gamma = c \cdot t_2$
3) $c \cdot (t_2 - t_1) + V \cdot (t_2 - t_1) = L/\gamma$

De ces 3 équations, avec 4 inconnues (γ ; t_1 ; t_2 ; L/γ), montrons qu'on en déduit : $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$.

Réarrangeons :
1') $V \cdot t_1 = 2 \cdot (\gamma^2 - 1) \cdot L/\gamma$
2') $(c - V) \cdot t_2 = L/\gamma$
3') $(c + V) \cdot t_2 - (c + V) \cdot t_1 = L/\gamma$

Donc :

1") $\dfrac{t_1}{L/\gamma} = \dfrac{2 \cdot (\gamma^2 - 1)}{V}$

2") $\dfrac{t_2}{L/\gamma} = \dfrac{1}{c-V}$ et 3") $(c+V) \cdot \dfrac{t_2}{L/\gamma} - (c+V) \cdot \dfrac{t_1}{L/\gamma} = 1$

Substituons dans 3") : $(c+V) \cdot \dfrac{1}{c-V} - (c+V) \cdot \dfrac{2 \cdot (\gamma^2-1)}{V} = 1$

Multiplions par $(c-V) \cdot V$

3"') $(c+V) \cdot V - (c+V) \cdot (c-V) 2 \cdot (\gamma^2 - 1) = (c-V) \cdot V$

3"") $c \cdot V + V^2 - 2 \cdot (c^2 - V^2) \cdot \gamma^2 + 2 \cdot c^2 - 2 \cdot V^2 = c \cdot V - V^2$

Après simplifications : $(c^2 - V^2) \cdot \gamma^2 = c^2$

Finalement : $\left(1 - \dfrac{V^2}{c^2}\right) \cdot \gamma^2 = 1$ qui donne bien : $\boxed{\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}}$

On retrouve le résultat attendu, sans utiliser la dilatation du temps.

Un mot sur la simultanéité.
On constate également que vue depuis ***S'*** les événements "***p*** croise ***a***" et "***r*** croise ***c***" sont **simultanés**, alors que vu depuis ***S***, l'événement "***p*** croise ***a***" à lieu avant l'événement "***r*** croise ***c***".

La notion de "**avant**" et "**après**" peut dépendre du référentiel d'observation, mais...
SI
dans le référentiel ***S***, la lumière a le temps d'aller de ***p*** à ***r*** entre les événements "***p*** croise ***a***" et "***r*** croise ***c***",
ALORS
l'ordre des événements est le même dans tout référentiel.

Justifions cette affirmation en supposant que :
dans le référentiel ***S'***, l'événement "***p*** croise ***a***" a lieu **après** l'événement "***r*** croise ***c***" (ou simultanément)
dans le référentiel ***S***, l'événement "***p*** croise ***a***" a lieu **avant** l'événement "***r*** croise ***c***".
Donc dans le référentiel ***S'***, les impulsions lumineuses se croisent à gauche de ***r*** et de ***c***,
et dans le référentiel ***S***, les impulsions lumineuses se croisent à droite de ***p*** et de ***a***.
Donc ses impulsions se croisent entre ***a*** et ***c***, ce qui montre que la lumière n'aura pas eu le temps d'aller de ***p*** à ***r*** dans le référentiel ***S*** (ni dans aucun autre référentiel).
(Référez-vous au dessin de la page précédente et supposer la simultanéité dans ***S'*** est plus simple.)

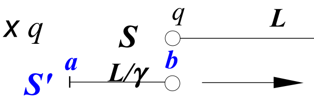
Le paradoxe des jumeaux

Imaginons deux jumeaux, l'un restant sur Terre, l'autre s'éloignant à une vitesse proche de la lumière jusqu'à atteindre une étoile, puis faisant "instantanément" demi-tour, revenant sur Terre. Le temps se sera écoulé plus lentement pour celui qui aura voyager à grande vitesse, donc lorsqu'ils se retrouveront, celui resté sur Terre sera plus vieux que celui qui aura voyagé.
Certain rétorqueront que placé dans le référentiel de la Fusée, c'est celui sur Terre qui se déplace à grande vitesse et c'est donc lui qui sera le plus jeune.
Analysons en détail les étapes du voyage.

q représente la Terre, ***r*** l'étoile à atteindre avant de faire demi-tour.
L est la distance propre entre ***q*** et ***r***.
b représente la Fusée, ***a*** une autre Fusée à distance propre L de ***b***.
Donc, vue de la Terre ***S***, la distance entre ***a*** et ***b*** vaut L/γ.
T est tel que $V \cdot T = L$.

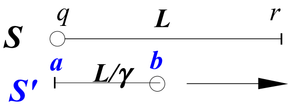
Dessin vu depuis la Terre ***S***.

$b \times q$



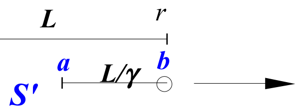
$T_{q \times b} = 0$, temps mesuré dans ***S***.
$T'_{b \times q} = 0$, temps mesuré dans ***S'***.

$a \times q$



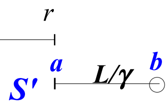
$T_{q \times a} = \dfrac{L}{\gamma \cdot V} = \dfrac{T}{\gamma}$ est le temps propre mesuré en q dans ***S***.
$T'_{a \times q} = \gamma \cdot T_{q \times a} = T =$ temps impropre mesuré en ***a*** dans ***S'***.

$b \times r$



$T_{r \times b} = \dfrac{L}{V} = T$ est le temps impropre mesuré en ***r*** dans ***S***.
$T'_{b \times r} = T_{r2} / \gamma = T / \gamma =$ temps propre mesuré en ***b*** dans ***S'***.

$a \times r$



$T_{r \times a} = \dfrac{(L + L/\gamma)}{V} = T + \dfrac{T}{\gamma}$ temps impropre en r dans ***S***.
$T'_{a \times r} = ?$ pas de référence de temps propre.

Nous verrons plus loin les transformations de Lorentz, qui permettent de calculer le temps dans le référentiel ***S'*** connaissant le temps et la position dans le référentiel ***S***.

$X_{q \times a} = 0$. $cT'_{a \times q} = \gamma \cdot (\, cT_{q \times a} - \beta \cdot X_{q \times a}\,)$, donc $T'_{a \times q} = \gamma \cdot T_{q \times a} = T$.
$X_{r \times b} = L$. $cT'_{b \times r} = \gamma \cdot (\, cT_{r \times b} - \beta \cdot X_{r \times b}\,)$, donc

$$T'_{b \times r} = \gamma \cdot \left(T - \frac{\beta \cdot L}{c} \right) = \gamma \cdot \left(T - \frac{\beta \cdot L}{c} \cdot \frac{V}{V} \right) = \gamma \cdot \left(T - \beta^2 \cdot T \right) = \gamma \cdot \left(1 - \beta^2 \right) \cdot T = \frac{T}{\gamma}$$

$X_{r \times a} = L$. $cT'_{a \times r} = \gamma \cdot (\, cT_{r \times a} - \beta \cdot X_{r \times a}\,)$, donc

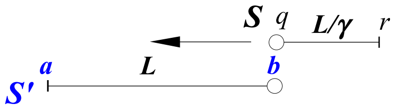
$$T'_{a \times r} = \gamma \cdot \left(T + \frac{T}{\gamma} - \frac{\beta \cdot L}{c} \right) = T + \gamma \cdot \left(T - \frac{\beta \cdot L}{c} \right) = T + \frac{T}{\gamma} \quad = T_{r \times a} \,!!!$$

On retrouve les résultats précédents plus un nouveau concernant $T'_{a \times r}$.

Vu depuis la Terre ***S***, lorsque la Fusée fait demi-tour pour revenir en ***b*** x ***r***, il s'est écoulé un temps T sur Terre et un temps T/γ dans la Fusée. Le jumeaux sur Terre est bien plus âgé.
Le retour est symétrique. Une discussion plus complète se trouve en page suivante.

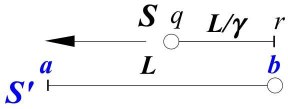
<u>Dessin vu depuis la Fusée **S'**.</u>

$b \times q$



$T'_{b\times q} = 0$, temps mesuré dans **S'**.
$T_{q\times b} = 0$, temps mesuré dans **S**.

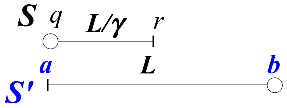
$b \times r$



$T'_{b\times r} = \dfrac{L}{\gamma\cdot V} = \dfrac{T}{\gamma}$ = temps propre mesuré en **b** dans **S'**.

$T_{r\times b} = \gamma \cdot T'_{b\times r} = T$ = temps impropre mesuré en **r** dans **S**.

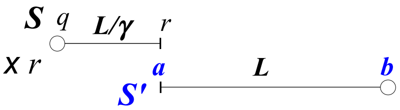
$a \times q$



$T'_{a\times q} = \dfrac{L}{V} = T$ est le temps impropre en **a** dans **S'**.

$T_{q\times a} = T'_{a\times q} = T/\gamma$ = temps propre mesuré en **q** dans **S**.

$a \times r$



$T'_{a\times r} = \dfrac{(L+L/\gamma)}{V} = T + \dfrac{T}{\gamma}$ = temps impropre en **a** dans **S'**.

$T_{r\times a} == ?$ pas de référence de temps propre.

Nous verrons plus loin les transformations de Lorentz, qui permettent de calculer le temps dans le référentiel **S** connaissant le temps et la position dans le référentiel **S'**.

$X'_{b\times r} = 0.\quad cT_{r\times b} = \gamma \cdot (\, cT'_{b\times r} - \beta \cdot X'_{b\times r}\,)$, donc $T_{r\times b} = \gamma \cdot T'_{b\times r} = T.$
$X'_{a\times q} = L.\quad cT_{q\times a} = \gamma \cdot (\, cT'_{a\times q} - \beta \cdot X'_{a\times q}\,)$, donc

$$T_{q\times a} = \gamma\cdot\left(T - \frac{\beta\cdot L}{c}\right) = \gamma\cdot\left(T - \frac{\beta\cdot L}{c}\cdot\frac{V}{V}\right) = \gamma\cdot\left(T - \beta^2\cdot T\right) = \gamma\cdot\left(1-\beta^2\right)\cdot T = \frac{T}{\gamma}$$

$X'_{a\times r} = L.\quad cT_{r\times a} = \gamma \cdot (\, cT'_{a\times r} - \beta \cdot X'_{a\times r}\,)$, donc

$$T_{r\times a} = \gamma\cdot\left(T + \frac{T}{\gamma} - \frac{\beta\cdot L}{c}\right) = T + \gamma\cdot\left(T - \frac{\beta\cdot L}{c}\right) = T + \frac{T}{\gamma} \quad = T'_{a\times r} \;\; !!!$$

On retrouve les résultats précédents plus un nouveau concernant $T_{r\times a}$.

Vu depuis la Fusée **S'**, lorsqu'elle fait demi-tour pour revenir en **b** x **r**, il s'est écoulé un temps T sur Terre et un temps T/γ dans la Fusée. Le jumeaux sur Terre est bien plus âgé.
Le retour est symétrique.

On retrouve les mêmes résultats que l'analyse vue depuis la Terre **S** !

On remarque également que les événements " **b** x **r** " et " **a** x **q** " ne se déroulent pas dans le même ordre dans les deux référentiels. Si la décision de rejoindre son jumeaux était prise par celui resté sur Terre lorsque la Fusée **a** croise la Terre **q**, alors c'est le jumeaux de la Fusée qui serait le plus âgé.
La rupture de symétrie vient du faite que c'est le jumeau de la Fusée qui décide de faire demi-tour.
L'ordre des événements " **a** x **q** " et "la Fusée fait demi-tour" n'est pas le même sur Terre et dans la Fusée. Puisque c'est le jumeau de la Fusée qui décide de faire demi-tour, lors de l'événement "la Fusée fait demi-tour", le temps écoulé sur Terre est plus grand que celui écoulé dans la Fusée.

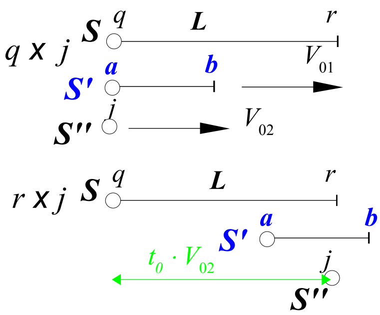
En page 12, nous reviendrons sur le paradoxe des jumeaux, en comptant le nombre de battements de cœurs de chaque jumeaux, pour constater à nouveau que celui qui a voyagé dans la Fusée a moins vieilli que celui qui est resté sur Terre.

Addition des vitesses.

Dans l'étude du paradoxe des jumeaux, on peut imaginer que celui resté sur la Terre rejoigne celui dans la Fusée en allant à une vitesse proche de celle de la lumière relativement à celle-ci. Mais cette Fusée va déjà à une vitesse proche de la lumière relativement à la Terre.
Donc vu depuis la Terre la Fusée va vers l'étoile à une vitesse proche de la lumière et vu depuis la Fusée, le jumeau terrien va vers l'étoile à une vitesse proche de la lumière.
Classiquement, en additionnant les vitesse, la Terre devrait voir le jumeau terrien filer vers l'étoile à une vitesse proche de 2 fois la vitesse de la lumière !?!

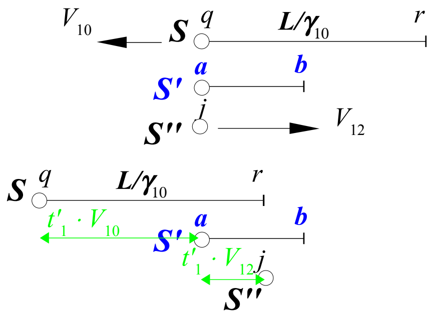
L'addition classique des vitesses n'est plus valable en relativité.
Connaissant la vitesse V_{01} de la Fusée relativement à la Terre et la vitesse V_{12} du jumeau terrien relativement à la Fusée, déterminons la vitesse V_{02} du jumeau terrien relativement à la Terre.
Notons $\boldsymbol{S}$ le référentiel de la Terre.
Notons $\boldsymbol{S'}$ le référentiel de la Fusée.
Notons $\boldsymbol{S''}$ le référentiel du jumeau terrien qui rejoint la Fusée.

<u>Dessin vu depuis la Terre $\boldsymbol{S}$.</u>



$t_0 \cdot V_{02} = L$ L est une longueur propre.
$t_0 = \gamma_{02} \cdot t''_2$ t''_2 est un temps propre.

<u>Vu depuis la Fusée $\boldsymbol{S'}$</u>



$V_{10} = V_{01}$

$V_{12} = V_{21}$

$t'_1 \cdot V_{10} + t'_1 \cdot V_{12} = L/\gamma_{10}$ donc $t'_1 \cdot (V_{10} + V_{12}) = L/\gamma_{10}$
$t'_1 = \gamma_{12} \cdot t''_2$ t''_2 est un temps propre.

En éliminant t_0, t'_1 et L, on en déduit : $\gamma_{12} \cdot t''_2 \cdot (V_{10} + V_{12}) = \gamma_{02} \cdot t''_2 \cdot V_{02} / \gamma_{10}$

En divisant par t''_2, par c, par γ_{12} et par γ_{02} : $\dfrac{\beta_{10}+\beta_{12}}{\gamma_{02}} = \dfrac{\beta_{02}}{\gamma_{12}\cdot\gamma_{10}}$

En utilisant $\dfrac{1}{\gamma^2} = 1-\beta^2$

Mise au carré : $(\beta_{10}+\beta_{12})^2 \cdot (1-\beta_{02}^2) = \beta_{02}^2 \cdot (1-\beta_{12}^2) \cdot (1-\beta_{10}^2)$

Isolation de β_{02} mise au carré : $(\beta_{10}+\beta_{12})^2 = \beta_{02}^2 \cdot \left((1-\beta_{12}^2)\cdot(1-\beta_{10}^2) + (\beta_{10}+\beta_{12})^2\right)$

Développement : $(\beta_{10}+\beta_{12})^2 = \beta_{02}^2 \cdot \left(1 - \cancel{\beta_{12}^2} - \cancel{\beta_{10}^2} + \beta_{12}^2 \cdot \beta_{10}^2 + \cancel{\beta_{10}^2} + \cancel{\beta_{12}^2} + 2 \cdot \beta_{10} \cdot \beta_{12}\right)$

Simplification : $(\beta_{10}+\beta_{12})^2 = \beta_{02}^2 \cdot \left(1 + \beta_{12}^2 \cdot \beta_{10}^2 + 2 \cdot \beta_{10} \cdot \beta_{12}\right)$

Factorisation : $(\beta_{10}+\beta_{12})^2 = \beta_{02}^2 \cdot \left(1 + \beta_{12} \cdot \beta_{10}\right)^2$

On obtient finalement LA **formule d'addition des vitesses** : $\boxed{\beta_{02} = \dfrac{\beta_{01}+\beta_{12}}{1+\beta_{01}\cdot\beta_{12}}} \leftrightarrow \boxed{V_{02} = \dfrac{V_{01}+V_{12}}{1+V_{01}\cdot V_{12}/c^2}}$

Vous pouvez vérifier que la vitesse V_{02} ne dépassera jamais la vitesse de la lumière c.
Vérifiez également que si V_{10} ou V_{12} égale c, alors forcément V_{02} est aussi égale à c.

$$1-\beta_{02} = 1 - \frac{\beta_{01}+\beta_{12}}{1+\beta_{01}\cdot\beta_{12}} = \frac{1+\beta_{01}\cdot\beta_{12}-\beta_{01}-\beta_{12}}{1+\beta_{01}\cdot\beta_{12}} = \frac{(1-\beta_{01})\cdot(1-\beta_{12})}{1+\beta_{01}\cdot\beta_{12}} = \frac{+\cdot+}{+} \geq 0$$

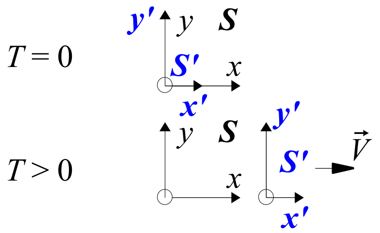
Les transformations de Lorentz

Dans un référentiel $\boldsymbol{S}$, chaque événement peut être localisé par :
° trois coordonnées X, Y, Z d'espace et
° une coordonnée T de temps.

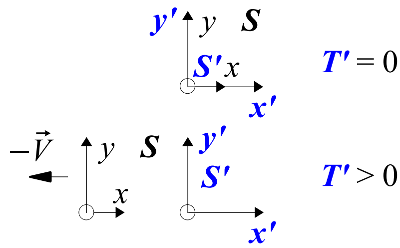
Dans un référentiel $\boldsymbol{S'}$, chaque événement peut être localisé par :
° trois autres coordonnées $\boldsymbol{X'}$, $\boldsymbol{Y'}$, $\boldsymbol{Z'}$ d'espace et
° une autre coordonnée $\boldsymbol{T'}$ de temps.

Limitons nous au cas où le référentiel $\boldsymbol{S'}$ se déplace dans le sens $+x$ selon S,
donc le référentiel $\boldsymbol{S}$ se déplace dans le sens $\boldsymbol{-x'}$ selon $\boldsymbol{S'}$. $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{S'}$ confondus au temps $T = \boldsymbol{T'} = 0$.

Dessin selon $\boldsymbol{S}$



Dessin selon $\boldsymbol{S'}$



<u>Question :</u>
Connaissant les coordonnées de l'événement dans un référentiel, quelles sont ses coordonnées dans l'autre référentiel ? Un exemple d'événement est dessiné en fin de page.

<u>Réponse :</u> se sont les **Transformations de Lorentz**.

$$\boxed{\beta = \frac{V}{c}} \qquad \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}} \qquad \boxed{\beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}}$$

$$\boldsymbol{X'} = \gamma \cdot (\ X - \beta \cdot cT\ ) \qquad X = \gamma \cdot (\ \boldsymbol{X'} + \beta \cdot \boldsymbol{cT'}\ )$$

$$\boldsymbol{cT'} = \gamma \cdot (\ cT - \beta \cdot X\ ) \qquad cT = \gamma \cdot (\ \boldsymbol{cT'} + \beta \cdot \boldsymbol{X'}\ )$$

$$\boldsymbol{Y'} = Y \quad \text{et} \quad \boldsymbol{Z'} = Z$$

$$\gamma \cdot (1-\beta^2) = \frac{1}{\gamma}$$

Il peut être utile d'être plus précis.
Considérons un point $\boldsymbol{m}$ dans le réf. $\boldsymbol{S}$, de coordonnées : ($X_{m\times a}$; $Y_{m\times a}$; $Z_{m\times a}$) lorsque " $\boldsymbol{m}$ croise $\boldsymbol{a}$ ".
Considérons un point $\boldsymbol{a}$ dans le réf. $\boldsymbol{S'}$, de coordonnées : ($\boldsymbol{X'}_{a\times m}$; $\boldsymbol{Y'}_{a\times m}$; $\boldsymbol{Z'}_{a\times m}$) lorsque " $\boldsymbol{a}$ croise $\boldsymbol{m}$ ".
Selon le référentiel $\boldsymbol{S}$ l'événement " $\boldsymbol{m}$ croise $\boldsymbol{a}$ " a lieu au temps $T_{m\times a}$.
Selon le référentiel $\boldsymbol{S'}$ l'événement " $\boldsymbol{a}$ croise $\boldsymbol{m}$ " a lieu au temps $\boldsymbol{T'}_{a\times m}$.
" $_{m\times a}$ " signifie " $\boldsymbol{m}$ croise $\boldsymbol{a}$ "
" $_{a\times m}$ " signifie " $\boldsymbol{a}$ croise $\boldsymbol{m}$ ", qui est identique à l'événement : " $\boldsymbol{m}$ croise $\boldsymbol{a}$ ".

Avec cette notation plus lourde, mais plus précise, les Transformations de Lorentz s'écrivent :

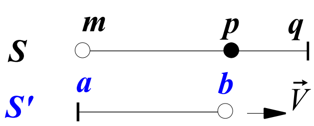
$$\boldsymbol{X'}_{a\times m} = \gamma \cdot (\ X_{m\times a} - \beta \cdot cT_{m\times a}\ ) \qquad X_{m\times a} = \gamma \cdot (\ \boldsymbol{X'}_{a\times m} + \beta \cdot \boldsymbol{cT'}_{a\times m}\ )$$

$$\boldsymbol{cT'}_{a\times m} = \gamma \cdot (\ cT_{m\times a} - \beta \cdot X_{m\times a}\ ) \qquad cT_{m\times a} = \gamma \cdot (\ \boldsymbol{cT'}_{a\times m} + \beta \cdot \boldsymbol{X'}_{a\times m}\ )$$

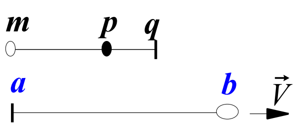
$$\boldsymbol{Y'}_{a\times m} = Y_{m\times a} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{Z'}_{a\times m} = Z_{m\times a}$$

<u>Remarque :</u>
Il est ambigüe de parler du temps $\boldsymbol{T'}_b$ en $\boldsymbol{b}$ lors de l'événement " $\boldsymbol{m}$ croise $\boldsymbol{a}$ ", car l'événement " $\boldsymbol{m}$ croise $\boldsymbol{a}$ " n'a pas lieu au même instant que l'événement " $\boldsymbol{p}$ croise $\boldsymbol{b}$ " dans les deux référentiels.
Il faut indiquer le référentiel d'observation pour pouvoir dire à quel instant l'événement a lieu.
Autrement dit, même si $T_{m\times a} = T_{p\times b}$, il se peut que $\boldsymbol{T'}_{a\times m} \neq \boldsymbol{T'}_{b\times p}$.

Dessin selon le référentiel $\boldsymbol{S}$.



Dessin selon le référentiel $\boldsymbol{S'}$.

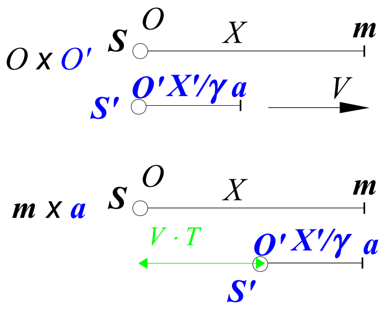


" $\boldsymbol{m}$ croise $\boldsymbol{a}$ " et " $\boldsymbol{p}$ croise $\boldsymbol{b}$ " sont simultanés.

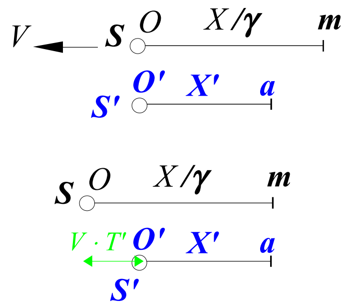
" $\boldsymbol{a}$ croise $\boldsymbol{m}$ " et " $\boldsymbol{b}$ croise $\boldsymbol{p}$ " ne sont pas simultanés !

Montrons les transformations de Lorentz à partir de la contraction des longueurs et de dessins.

<u>Dessin vu depuis la Terre $\boldsymbol{S}$.</u>



<u>Vu depuis la Fusée $\boldsymbol{S'}$</u>



$\boldsymbol{X}$ est une longueur propre dans $\boldsymbol{S}$
$\boldsymbol{T}$ est le temps dans $\boldsymbol{S}$ entre
O x O' et $\boldsymbol{m}$ x $\boldsymbol{a}$.
Aucun des deux temps $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{T'}$ n'est propre.
Les dessins montrent que :
$\boldsymbol{X'/\gamma = X - V \cdot T}$

$\boldsymbol{X'}$ est une longueur propre dans $\boldsymbol{S'}$.
$\boldsymbol{T'}$ est le temps dans $\boldsymbol{S'}$ entre
O x O' et $\boldsymbol{m}$ x $\boldsymbol{a}$.

$\boldsymbol{X/\gamma = X' + T' \cdot V}$

Donc $\boxed{\boldsymbol{X'} = \gamma \cdot (\ X - \beta \cdot cT\,)}$ et $\boxed{X = \gamma \cdot (\ \boldsymbol{X'} + \beta \cdot \boldsymbol{cT'}\,)}$

En substituant la 2ème égalité dans la première, on obtient : $\boldsymbol{X'} = \gamma^2 \cdot \boldsymbol{X'} + \gamma^2 \cdot \beta \cdot \boldsymbol{cT'} - \gamma \cdot \beta \cdot cT$
D'où on en déduit : $\boxed{cT = \gamma \cdot (\,\boldsymbol{cT'} + \beta \cdot \boldsymbol{X'}\,)}$

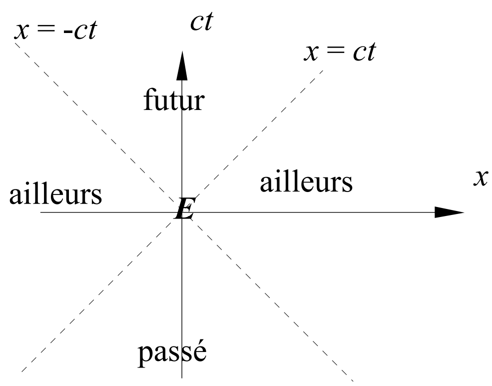
En substituant la 1ère égalité dans la deuxième, on obtient : $X = \gamma^2 \cdot X - \gamma^2 \cdot \beta \cdot cT + \gamma \cdot \beta \cdot \boldsymbol{cT'}$
D'où on en déduit : $\boxed{\boldsymbol{cT'} = \gamma \cdot (\,cT - \beta \cdot X\,)}$

On vient de démontrer les formules des transformations de Lorentz, à partir de la contraction des longueurs et de dessins précis fait dans chacun des deux référentiels.

On a utilisé : $\beta \ = \ \frac{1}{\beta} \cdot \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)$.

Cône de lumière

Considérons un *événement* $\boldsymbol{E}$ en un endroit de l'espace, à un instant donné. Pour cet événement, l'espace-temps se subdivise en 3 régions.



- **Le passé**, correspondant à toutes les coordonnées $(\,x\,;y\,;z\,;t\,)$ ayant pu influencer l'événement ;
- **Le futur** correspondant à toutes les coordonnées $(\,x\,;y\,;z\,;t\,)$ pouvant être influencé par l'événement.
- **L'ailleurs**, n'ayant aucun lien de cause à effet avec l'événement. Aucun événement de coordonnées $(\,x\,;y\,;z\,;t\,)$ de l'ailleurs n'a pu influencer ou ne sera influencé par l'événement $\boldsymbol{E}$.

Addition des vitesses en x, y et z.

On a déjà obtenu la formule d'addition des vitesse dans la direction x du sens de déplacement d'un référentiel $\boldsymbol{S'}$ relativement à un référentiel $\boldsymbol{S}$.
A partir des transformations de Lorentz, la formule d'addition des vitesses est beaucoup plus simple à obtenir, dans les trois directions x, y et z.

Admettons que le point $\boldsymbol{m}$ de $\boldsymbol{S}$ et le point $\boldsymbol{a}$ de $\boldsymbol{S'}$ se déplacent de manière à être superposés.
$\boldsymbol{m}$ se déplace à vitesse V_x dans la direction x dans $\boldsymbol{S}$. $V_x = V_{02}$ de la page 8.
$\boldsymbol{m}$ se déplace à vitesse V_y dans la direction y dans $\boldsymbol{S}$.
$\boldsymbol{m}$ se déplace à vitesse V_z dans la direction z dans $\boldsymbol{S}$.
$\boldsymbol{a}$ se déplace à vitesse V'_x dans la direction x dans $\boldsymbol{S'}$. $V'_x = V_{12}$ de la page 8.
$\boldsymbol{a}$ se déplace à vitesse V'_y dans la direction y dans $\boldsymbol{S'}$.
$\boldsymbol{a}$ se déplace à vitesse V'_z dans la direction z dans $\boldsymbol{S'}$.
$\boldsymbol{S'}$ se déplace à vitesse $V_{01} = \beta \cdot c$ relativement à $\boldsymbol{S}$. La même que celle de la page 8.

Donc

$$V_x = \frac{\Delta X}{\Delta T} = \frac{\gamma \cdot (\Delta X' + \beta \cdot c \cdot \Delta T')}{\gamma \cdot (\Delta T' + \beta \cdot \Delta X'/c)} = \frac{\Delta X'/\Delta T' + V_{01}}{1 + \beta \cdot c \cdot (\Delta X'/\Delta T')/c^2} = \frac{V'_x + V_{01}}{1 + V'_x \cdot V_{01}/c^2}$$

On retrouve bien : $\boxed{V_x = \dfrac{V'_x + V_{01}}{1 + \dfrac{V'_x \cdot V_{01}}{c^2}}}$ de la page 8. On vérifie que : $\boxed{V'_x = \dfrac{V_x - V_{01}}{1 - \dfrac{V_x \cdot V_{01}}{c^2}}}$

En y, on obtient :

$$V_Y = \frac{\Delta Y}{\Delta T} = \frac{\Delta Y'}{\gamma \cdot (\Delta T' + \beta \cdot \Delta X'/c)} = \frac{\Delta Y'/\Delta T'}{\gamma \cdot (1 + \beta \cdot c \cdot (\Delta X'/\Delta T')/c^2)} = \frac{V'_y \cdot \sqrt{1 - V_{01}^2/c^2}}{1 + V_{01} \cdot V'_x/c^2} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{V_{01}^2}{c^2}}$$

On trouve : $\boxed{V_y = \dfrac{V'_y \cdot \sqrt{1 - \dfrac{V_{01}^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{V'_x \cdot V_{01}}{c^2}}}$ en z c'est similaire : $\boxed{V_z = \dfrac{V'_z \cdot \sqrt{1 - \dfrac{V_{01}^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{V'_x \cdot V_{01}}{c^2}}}$

Classiquement, on aurait : $V_x = V'_x + V_{01}$; $V_y = V'_y$ et $V_z = V'_z$, qui sont les cas limites des expressions ci-dessus, lorsque c est considéré comme infiniment grand.

Les formules ci-dessus ont ceci d'étonnant, que les vitesses en y et en z dans le référentiel $\boldsymbol{S}$, dépendent de la vitesse en x dans le référentiel $\boldsymbol{S'}$.

On peut laisser comme exercice de mathématiques la vérification de la cohérence des formules ci-dessus, lorsqu'on effectue deux changements de référentiels de suite $\boldsymbol{S} \to \boldsymbol{S'} \to \boldsymbol{S''}$.
Exprimer V' en fonction de V, puis V'' en fonction de V' permet de trouver V'' en fonction de V.

Le paradoxe de la fusée du points de vue de leurs battements de cœurs

Reprenons le paradoxe des jumeaux et analysons-le en comptant le nombre de battements de cœurs de chaque jumeau. Un jumeau reste sur Terre, pendant que l'autre part dans une Fusée jusqu'à une étoile, pour revenir ensuite.
Pour simplifier, imaginons que le battement de cœur de chaque jumeau soit régulier, que l'intervalle de temps propre de chaque battement égale ***dt*** et qu'il émettent un rayon lumineux en direction de l'autre jumeau, à chaque battement. Notons ***V*** la vitesse relative entre la Terre et la Fusée.
Vu de la Terre, la distance parcourue à l'aller vaut ***L*** et le temps pris vaut ***T*** = ***L*** / ***V***.

Du point de vu de la Fusée.

Durant l'aller, la distance parcourue vaut $\frac{L}{\gamma}$ et la Fusée s'éloigne durant un temps $T'=\frac{T}{\gamma}$.

Selon la Fusée, le temps entre deux pulsation du jumeau de la Terre vaut $\gamma \cdot dt$.
Puisque la Fusée s'éloigne de la Terre, l'intervalle de temps entre la réception de deux pulsations est de $\gamma \cdot dt+\frac{V \cdot \gamma \cdot dt}{c}$. Après simplification, ce temps s'écrit : $\gamma \cdot (1+\beta) \cdot dt$.

Il reçoit ces battements durant un temps $\frac{T}{\gamma}$.

Donc durant l'aller, le nombre de battements reçu de la Terre par la Fusée vaut : $N_{F1}=\frac{T/\gamma}{\gamma \cdot (1+\beta) \cdot dt}$.

Durant le retour, la distance parcourue vaut $\frac{L}{\gamma}$ et la Fusée se rapproche durant un temps $T'=\frac{T}{\gamma}$.

Selon la Fusée, le temps entre deux pulsation du jumeau de la Terre vaut $\gamma \cdot dt$.
Puisque la Fusée se rapproche de la Terre, l'intervalle de temps entre la réception de deux pulsations est de : $\gamma \cdot dt-\frac{V \cdot \gamma \cdot dt}{c}$. Après simplification, ce temps s'écrit : $\gamma \cdot (1-\beta) \cdot dt$.

Il reçoit ces battements durant un temps $\frac{T}{\gamma}$.

Donc durant le retour, le nombre de battements reçu de la Terre par la Fusée vaut : $N_{F2}=\frac{T/\gamma}{\gamma \cdot (1-\beta) \cdot dt}$.

Au total, la Fusée a reçu de la Terre un nombre de battements égale à :

$$N_{F1}+N_{F2}=\frac{T/\gamma}{\gamma \cdot (1+\beta) \cdot dt}+\frac{T/\gamma}{\gamma \cdot (1-\beta) \cdot dt}=\frac{T}{\gamma^2 \cdot dt} \cdot \left(\frac{1}{1+\beta}+\frac{1}{1-\beta}\right)=\frac{T}{\gamma^2 \cdot dt} \cdot \left(\frac{2}{1-\beta^2}\right)=\frac{2 \cdot T}{dt}$$

Du point de vu de la Terre, elle a émis des battements durant un temps $2 \cdot T$ à intervalle dt, donc elle trouve aussi qu'elle a émis un nombre de battements égale à $\frac{2 \cdot T}{dt}$.

Du point de vu de la Terre.

Durant l'aller, la distance parcourue vaut $\boldsymbol{L}$ et la Fusée s'éloigne durant un temps $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{L} / \boldsymbol{V}$.

Le temps entre deux pulsation du jumeau de la Fusée : $\gamma \cdot dt$.

Puisque la Fusée s'éloigne de la Terre, l'intervalle de temps entre la réception de deux pulsations est de $\gamma \cdot dt + \frac{V \cdot \gamma \cdot dt}{c}$. Après simplification, ce temps s'écrit : $\gamma \cdot (1+\beta) \cdot dt$.

Il reçoit ces battements durant un temps $T + \frac{L}{c}$. Le terme $\frac{L}{c}$ vient du fait que la dernière pulsation émise par la Fusée a été émise à une distance L de la Terre et donc qu'elle prend encore un temps L/c pour parvenir à la Terre.

Donc durant l'aller, le nombre de battements reçu de la Fusée par la Terre vaut :

$$N_{T1} = \frac{T + L/c}{\gamma \cdot (1+\beta) \cdot dt} = \frac{T + \beta \cdot T}{\gamma \cdot (1+\beta) \cdot dt} = \frac{T}{\gamma \cdot dt} .$$

Durant le retour, la Terre reçois ces battements durant un temps $2 \cdot T - \left(T + \frac{L}{c} \right) = T - \frac{L}{c}$.

Durant le retour, le temps entre deux pulsation du jumeau de la Fusée vaut aussi : $\gamma \cdot dt$.

Puisque la Fusée se rapproche de la Terre, l'intervalle de temps entre la réception de deux pulsations est de : $\gamma \cdot dt - \frac{V \cdot \gamma \cdot dt}{c}$. Après simplification, ce temps s'écrit : $\gamma \cdot (1-\beta) \cdot dt$.

Donc durant le retour, le nombre de battements reçu de la Fusée par la Terre vaut :

$$N_{T2} = \frac{T - L/c}{\gamma \cdot (1-\beta) \cdot dt} = \frac{T - \beta \cdot T}{\gamma \cdot (1-\beta) \cdot dt} = \frac{T}{\gamma \cdot dt}$$

Au total, la Terre a reçu de la Fusée un nombre de battements égale à : $N_{T1} + N_{T2} = \frac{2 \cdot T}{\gamma\, dt}$.

Du point de vu de la Fusée, elle a émis des battements durant un temps $\frac{2 \cdot T}{\gamma}$ à intervalle dt, donc elle trouve aussi qu'elle a émis un nombre de battements égale à $\frac{2 \cdot T}{\gamma \cdot dt}$.

Conclusion :

Chaque jumeau observe les mêmes résultats. Le nombre de battements de cœurs de celui qui a voyagé dans la Fusée est plus petit que le nombre de battements de celui qui est resté sur Terre. Le nombre de battements de cœurs du jumeau de la Terre vaut γ fois le nombre de battements de cœurs du jumeau de la Fusée !

Dynamique relativiste, la quantité de mouvement et la force

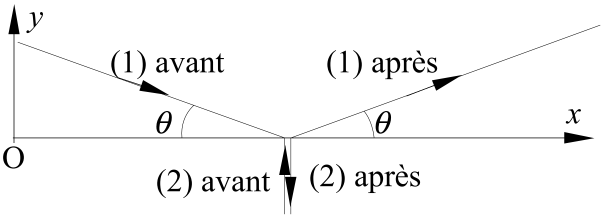
Les grandeurs fondamentales de la dynamique classique qui sont la quantité de mouvement, la force et l'énergie ont leur équivalent en relativité, mais leur définitions changent légèrement.

En relativité, la quantité de mouvement est définie par : $\boxed{\vec{p} = m\cdot\gamma\cdot\vec{V}}$

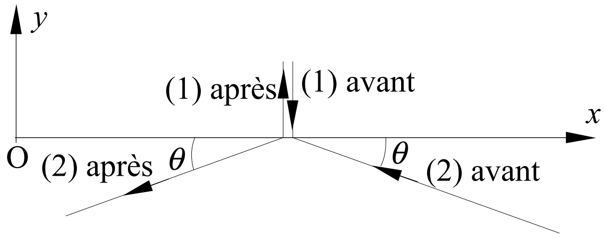
L'argument qui suit n'est pas une démonstration, mais montre dans un cas particulier que cette définition généralise celle classique. Seule l'expérience a pu vérifier que la quantité de mouvement totale, telle que définie ci-dessus, est conservée lors de collisions.

Considérons une collision élastique rasante et symétrique entre deux particules identiques de masse m.

Collision vue d'un référentiel *S*.



Collision vue d'un référentiel *S'*.



La conservation de la quantité de mouvement totale selon l'axe y s'écrit dans $\boldsymbol{S}$:

$$p_{2\,\text{avant}} - p_{1\,\text{avant}}\cdot\sin(\theta) = -p_{2\,\text{après}} + p_{1\,\text{après}}\cdot\sin(\theta)$$

Comme pour chaque particule, le choc est symétrique, on a : $p_{i\,\text{avant}} = p_{i\,\text{après}}$, $i = 1\,;2$.

La conservation ci-dessus s'écrit donc : $p_2 = p_1\cdot\sin(\theta)$

D'autre part, on fait l'hypothèse que l'angle θ est suffisamment faible pour qu'on puisse considérer que p_2 l'est aussi. Donc p_2 n'est pas relativiste, mais classique et donc : $p_2 = m\cdot V_2$.

En conséquence : $m\cdot V_2 = p_1\cdot\sin(\theta)$ **(1)**. θ est très petit, mais non connu.

Il s'agit maintenant d'exprimer p_1 qui est relativiste.

Etudions la collision selon le référentiel ***S'***, qui se déplace à vitesse $V = |V_{1x}| = V_1\cdot\cos(\theta)$ dans le sens $+x$ selon ***S***.

Puisque θ est très petit, $\cos(\theta)\approx 1$ et donc $V = |V_{1x}| = V_1$. On a aussi $|V_{1y}| = V_1\cdot\sin(\theta)$.

Notons $V_1^{'}$ la vitesse de la particule 1 dans le référentiel ***S'***.

Par symétrie, on a : $V_2 = V_1^{'} = |V_{1y}^{'}|$. **(2)**

Par la formule d'addition des vitesses selon l'axe y, on a (avec $V = |V_{1x}| = V_1$) :

$$V_2 \overset{(2)}{=} |V_{1y}^{'}| = \frac{|V_{1y}|\cdot\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-V_{1x}\cdot V/c^2} = \frac{|V_{1y}|\cdot\sqrt{1-V_1^2/c^2}}{1-V_1\cdot V_1/c^2} = \frac{V_1\cdot\sin(\theta)}{\sqrt{1-V_1^2/c^2}} = \gamma_1\cdot V_1\cdot\sin(\theta)\ .$$

En comparant avec **(1)** on obtient l'égalité : $p_1\cdot\sin(\theta) = m\cdot V_2 = m\cdot\gamma_1\cdot V_1\cdot\sin(\theta)$,

ce qui donne : $\boxed{p_1 = m\cdot\gamma_1\cdot V_1}$.

Le développement ci-dessus suggère fortement que la quantité de mouvement relativiste doit être définie par $\boxed{\vec{p} = m\cdot\gamma\cdot\vec{V}}$. Les expériences confirment le bienfondé de cette définition.

La force en relativité.

En mécanique classique, les trois définitions de force suivantes sont équivalentes :

$$\vec{F}_{rés} = m \cdot \vec{a} \quad ; \quad \vec{F}_{rés} = \frac{d\,\vec{p}}{d\,t} \quad ; \quad \vec{F}_{rés} = \frac{d^2(m \cdot \gamma \cdot \vec{r})}{d^2\,t} . \quad (\text{ Classiquement } \gamma = 1 \text{ })$$

En relativité, ces trois définitions sont différentes.
Puisque la quantité de mouvement totale est conservée durant une collision, la définition la plus naturelle est : $\boxed{\vec{F}_{rés} = \frac{d\,\vec{p}}{d\,t}}$. C'est celle qui est généralement adoptée par les physiciens.

<u>Première conséquence :</u> la force $\vec{F}$ n'est plus parallèle à l'accélération $\vec{a}$.

$$\vec{F}_{rés} = m \cdot \frac{d(\gamma \cdot \vec{V})}{dt} = m \cdot \left(\frac{d\gamma}{dt} \cdot \vec{V} + \gamma \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} \right) = m \cdot \frac{d\gamma}{dt} \cdot \vec{V} + m \cdot \gamma \cdot \vec{a}$$

Si la vitesse n'est pas constante, le premier terme n'est pas nul. Si, de plus, la vitesse est dans une direction différente de l'accélération, la force sera aussi dans une direction différente de l'accélération.

<u>Deuxième conséquence :</u> la force $\vec{F}$ n'est plus indépendante du référentiel.
Si on se limite à une dimension, alors la force est indépendante du référentiel, mais ce n'est pas vrai de manière générale.

Les deux conséquences ci-dessus rendent la notion de force moins intéressante en relativité qu'elle ne l'est en mécanique classique. De plus le frottement n'est pratiquement jamais traité en relativité, donc les deux grandeurs fondamentales de la dynamique relativiste sont **la quantité de mouvement** et **l'énergie**.

Dynamique relativiste, l'énergie

Comme en mécanique classique, on peut définir le travail de la force résultante, pour arriver à la notion d'énergie cinétique. Mais en relativité, on arrive également à une notion plus générale d'énergie et en particulier à la fameuse formule : $E=m\cdot c^2$.

Tout ce qui suit peut être fait vectoriellement, mais nous allons simplifier en restant en une dimension et en utilisant : $\beta=V/c$ et $\gamma=1/\sqrt{1-\beta^2}=\left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Pour la suite les deux résultats intermédiaires suivants sont nécessaires.

1) Montrons que : $\frac{d\gamma}{dt}=\gamma^3\cdot\beta\cdot\frac{d\beta}{dt}$.

Ce n'est qu'un calcul de dérivée. $\frac{d\gamma}{dt}=-\frac{1}{2}\cdot\left(1-\beta^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2\cdot\beta)\cdot\frac{d\beta}{dt}=\gamma^3\cdot\beta\cdot\frac{d\beta}{dt}$

2) Montrons que : $\gamma\cdot\frac{d\beta}{dt}\cdot\beta=\left(1-\beta^2\right)\cdot\frac{d\gamma}{dt}$.

C'est une conséquence directe de la formule n° 1, car $\frac{1}{\gamma^2}=1-\beta^2$

Calculons le travail pour aller de r_A à r_B .

$$W_{AB}=\int_{r_A}^{r_B}F_{rés}\cdot dr=\int_{r_A}^{r_B}\frac{dp}{dt}\cdot dr=\int_{r_A}^{r_B}\frac{d(\gamma\cdot m\cdot c\cdot\beta)}{dt}\cdot dr=m\cdot c\cdot\int_{r_A}^{r_B}\left(\frac{d\gamma}{dt}\cdot\beta+\gamma\cdot\frac{d\beta}{dt}\right)\cdot dr$$

$$W_{AB}=m\cdot c\cdot\int_{t_A}^{t_B}\left(\frac{d\gamma}{dt}\cdot\beta+\gamma\cdot\frac{d\beta}{dt}\right)\cdot\frac{dr}{dt}\cdot dt=m\cdot c\cdot\int_{t_A}^{t_B}\left(\frac{d\gamma}{dt}\cdot\beta+\gamma\cdot\frac{d\beta}{dt}\right)\cdot c\cdot\beta\cdot dt$$

$$W_{AB}=m\cdot c^2\cdot\int_{t_A}^{t_B}\left(\frac{d\gamma}{dt}\cdot\beta^2+\left(1-\beta^2\right)\cdot\frac{d\gamma}{dt}\right)\cdot dt$$ par la formule n° 2 ci-dessus.

$W_{AB}=m\cdot c^2\cdot\int_{t_A}^{t_B}\frac{d\gamma}{dt}\cdot dt$. L'intégrale de la dérivée donne le résultat immédiat :

$$\boxed{W_{AB}=m\cdot c^2\cdot\gamma_B-m\cdot c^2\cdot\gamma_A}$$

Interprétons ce résultat pour de faibles vitesses, $\beta\ll 1$, donc $\gamma\approx 1+\frac{1}{2}\cdot\beta^2$

$$W_{AB}=m\cdot c^2\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\beta_B^2\right)-m\cdot c^2\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\beta_A^2\right)=\frac{1}{2}\cdot m\cdot c^2\cdot\beta_B^2-\frac{1}{2}\cdot m\cdot c^2\cdot\beta_A^2$$

$W_{AB}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot V_B^2-\frac{1}{2}\cdot m\cdot V_A^2$ qui est la variation d'énergie cinétique.

En relativité, on définit l'énergie cinétique par : $\boxed{E_{cin}=m\cdot c^2\cdot(\gamma-1)}$ et

l'énergie totale d'une particule est définie par : $\boxed{E=m\cdot c^2\cdot\gamma}$

L'exercice 4.2 de la série 1 de relativité montre que l'énergie totale est conservée lors d'un choc.

Ce résultat suggère que $m \cdot c^2$ représente une énergie.

Nous allons montrer dans l'exemple qui suit, que la masse peut effectivement se transformer en énergie cinétique.

Dans un référentiel ***S***, prenons deux corps immobiles, de masses identiques, reliés entre eux par un ressort contracté.

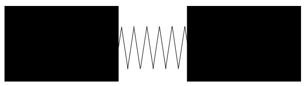
Notons M la masse de l'ensemble avant éjection.

Laissons le ressort se détendre, pour éjecter les deux masses. Notons m leur masse après éjection.

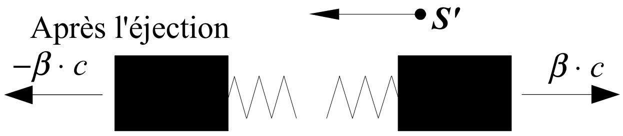
Classiquement, on a $M = 2 \cdot m$. Nous allons voir que la masse n'est plus conservée en relativité.

Vu depuis le référentiel S.

Avant l'éjection : $V_1 = V_2 = 0$

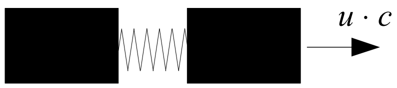


Après l'éjection

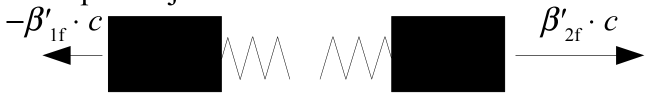


Vu depuis le référentiel S' allant à vitesse $u \cdot c$ relativement à ***S***.

Avant l'éjection : $V_1' = V_2' = u \cdot c$



Après l'éjection



<u>Dans le référentiel ***S*** :</u>

Chaque masse part avec la même vitesse $\beta \cdot c$ dans des sens opposés.

Les quantité de mouvement des deux corps sont : $p_{1f} = p_{2f} = m \cdot \gamma \cdot \beta$ où $\gamma_{1f} = \gamma_{2f} = \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

<u>Dans le référentiel ***S'*** :</u>

Il se délace à la vitesse $u \cdot c$ vers la gauche, relativement à ***S***.

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit : $\dfrac{M \cdot c \cdot u}{\sqrt{1-u^2}} = -p_{1f}' + p_{2f}'$, " f " pour " final ".

L'exercice 3 de la série 1 nous indique comment écrire cette conservation en fonction des quantité de mouvement p_{1f} et p_{2f} des deux corps dans le référentiel ***S***.

$$p_{1f}' = \frac{p_{1f}}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{m \cdot \gamma_{1f} \cdot c \cdot u}{\sqrt{1-u^2}} \quad \text{et} \quad p_{2f}' = \frac{p_{2f}}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{m \cdot \gamma_{2f} \cdot c \cdot u}{\sqrt{1-u^2}}$$

Donc la conservation de la quantité de mouvement dans ***S'*** s'écrit :

$$\frac{M \cdot c \cdot u}{\sqrt{1-u^2}} = -\cancel{\frac{p_{1f}}{\sqrt{1-u^2}}} + \frac{m \cdot \gamma \cdot c \cdot u}{\sqrt{1-u^2}} + \cancel{\frac{p_{2f}}{\sqrt{1-u^2}}} + \frac{m \cdot \gamma \cdot c \cdot u}{\sqrt{1-u^2}}$$

Après une première simplification : $M \cdot c \cdot u = m \cdot \gamma \cdot c \cdot u + m \cdot \gamma \cdot c \cdot u$

Après une deuxième simplification : $\boxed{M = \dfrac{2 \cdot m}{\sqrt{1-\beta^2}}}$

La masse *M* de l'ensemble des deux corps reliés par le ressort avant éjection et supérieure à la somme des masses *2·m* des corps après éjection !

Cette différence de masse correspond à l'énergie stockée dans le ressort comprimé !

<u>Dans le référentiel ***S***</u>, l'énergie totale est bien conservée : $E_{initiale} = M \cdot c^2 = \dfrac{2 \cdot m \cdot c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = E_{finale}$

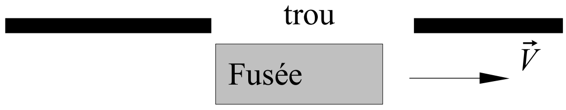
<u>Dans le référentiel ***S'***</u>, on vérifie que l'énergie totale aussi conservée.

Pour cette vérification, la relation suivante est utile : $1 - \left(\dfrac{\beta \pm u}{1 \pm \beta \cdot u}\right)^2 = \dfrac{(1-\beta^2) \cdot (1-u^2)}{(1 \pm \beta \cdot u)^2}$.

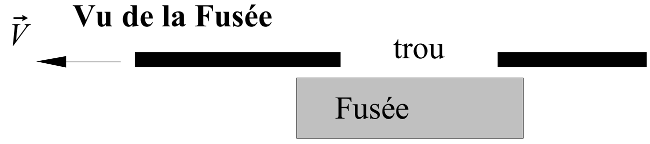
Le paradoxe de la fusée qui rapetisse pour passer à travers un trou

Voici un argument soutenu par certaines personnes désirant montrer que la théorie de la relativité est fausse :
Une Fusée se déplaçant très rapidement dans une direction x, et lentement dans la direction y, verra sa longueur diminuée suffisamment pour traverser un trou, qui du point de vue de la Fusée est plus petit que la longueur de la Fusée. Le dessin suivant aide à comprendre l'argument.
La Fusée est représentée par un rectangle.

Vu de la Terre :



Vu de la Fusée



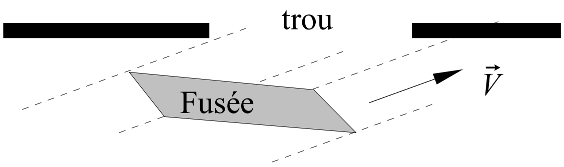
Selon la Terre, la Fusée passera à travers le trou.

Selon la Fusée, elle ne passera pas à travers le trou.

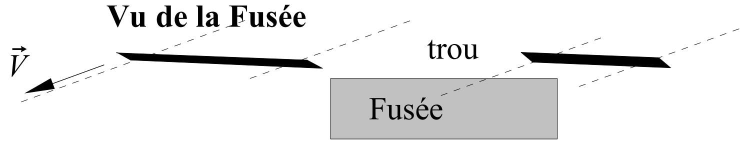
Où est l'erreur dans l'argument ci-dessus ?

L'erreur vient du faite que la contraction des longueur se fait dans la direction de déplacement et non dans une direction choisie arbitrairement. Les dessins ci-dessus ne sont pas corrects si la Fusée se déplace également vers le haut. Voici des dessins corrects.

Vu de la Terre :



Vu de la Fusée



Selon la Terre, la Fusée est déformée par contraction dans la direction de déplacement, mais cela ne lui permettra pas de passer à travers le trou. La longueur perpendiculairement au déplacement reste inchangée.
Selon la Fusée, le trou est déformé par contraction dans la direction de déplacement, mais elle ne passera pas à travers le trou. La taille du trou, perpendiculairement au déplacement reste inchangé.