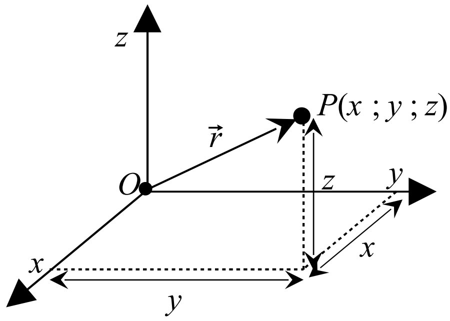
I. Quelques rappels.

En physique, la description du mouvement d'un objet se fait relativement à un **référentiel**.
Nous utiliserons toujours un référentiel formé d'une **origine** O et de trois axes **gradués**, **orthogonaux** et **passant par l'origine**. La coutume est d'appeler x, y et z ces trois axes.

Pour décrire une **position** $\boldsymbol{P}$ **dans l'espace**, partant de l'origine, on indique de quelle distance il faut se déplacer dans la direction x, puis dans la direction y, puis dans la direction z, pour arriver à la position P désirée. En conséquence, cette position est caractérisée par trois nombres et la notation **vectorielle** sera utilisée :

$\overrightarrow{OP} = \langle x\,;y\,;z\rangle$ ou $\vec{r} = \langle x\,;y\,;z\rangle$.



<u>Quelques propriétés des **vecteurs**.</u>

La **distance** entre l'origine O et le point P est égale à la **norme du vecteur**.

$$OP = \|\overrightarrow{OP}\| = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Si un point P_1 se trouve en $\vec{r}_1 = \langle x_1; y_1; z_1\rangle$ et un point P_2 se trouve en $\vec{r}_2 = \langle x_2; y_2; z_2\rangle$, alors la **distance** entre ces deux points vaut : $P_1P_2 = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

On peut :
additionner des vecteurs : $\vec{r}_1+\vec{r}_2 = \langle x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2\rangle$;
soustraire des vecteurs : $\vec{r}_1-\vec{r}_2 = \langle x_1-x_2; y_1-y_2; z_1-z_2\rangle$;
multiplier un vecteur par un nombre : $\lambda\cdot\vec{r} = \langle \lambda\cdot x\,; \lambda\cdot y\,; \lambda\cdot z\rangle \quad \lambda\in\mathbb{R}$.

L'**angle** $\boldsymbol{\theta}$ entre deux vecteurs $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ est caractérisé par : $\cos(\theta) = \dfrac{\vec{r}_1\bullet\vec{r}_2}{\|\vec{r}_1\|\cdot\|\vec{r}_1\|}$ où

$\vec{r}_1\bullet\vec{r}_2 = x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$ est le **produit scalaire** entre les deux vecteurs $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$.

Dans l'espace, il est souvent utile de définir la direction perpendiculaire au plan dans lequel se trouvent deux vecteurs donnés. Cette direction est définie par le produit vectoriel entre les deux vecteurs.
Le **produit vectoriel** entre $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ est : $\vec{r}_1\times\vec{r}_2 = \langle y_1\cdot z_2 - z_1\cdot y_2\ ;\ z_1\cdot x_2 - x_1\cdot z_2\ ;\ x_1\cdot y_2 - y_1\cdot x_2\rangle$
$\vec{r}_1\times\vec{r}_2$ est perpendiculaire à $\vec{r}_1$ et perpendiculaire à $\vec{r}_2$.
$\|\vec{r}_1\times\vec{r}_2\| = \|\vec{r}_1\|\cdot\|\vec{r}_2\|\cdot\sin(\theta)$ où $\boldsymbol{\theta}$ est entre deux vecteurs $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$.
Le sens de $\vec{r}_1\times\vec{r}_2$ se détermine par la **règle de la main droite** ou la **règle du tir bouchon**.

Si la fonction **vectorielle** $t\mapsto\ \vec{r}(t) = \langle x(t); y(t); z(t)\rangle$ constitue l'**horaire du mouvement** d'un point matériel, sa **vitesse** est donnée par la dérivée de la fonction $\vec{r}(t)$: $\vec{V}(t) = \dfrac{d\,\vec{r}(t)}{dt} = \langle \dot{x}(t); \dot{y}(t); \dot{z}(t)\rangle$

L'accélération est donnée par la dérivée de la fonction $\vec{V}(t)$: $\vec{a}(t) = \dfrac{d\,\vec{V}(t)}{dt} = \langle \ddot{x}(t); \ddot{y}(t); \ddot{z}(t)\rangle$

L'**énergie potentielle** est donnée par : $E_{pot} = m\cdot g\cdot h$.

L'**énergie cinétique** est donnée par : $E_{cin} = \dfrac{1}{2}\cdot m\cdot V^2$.

DYNAMIQUE DES SYSTÈMES MATÉRIELS

II. Introduction

En troisième année l'accent était mis sur les trois **lois fondamentales de la dynamique**, notre objet d'étude était le "**point matériel**". Nous aborderons, dans cette partie, l'étude de **systèmes matériels** (toujours d'un point de vue "classique") .

Un **système matériel** est un ensemble de points matériels.
Nous étudierons plus particulièrement le **solide rigide**.

Un **solide rigide** contient un grand nombre de particules, dont les distances mutuelles restent constantes, quelles que soient les actions qui s'exercent sur le solide.

Nous énoncerons les lois fondamentales du mouvement d'un solide rigide, qui constituent une généralisation des lois de la dynamique du point matériel.

L'objectif de ce cours est :
1) d'étudier les propriétés particulières du **centre de masse** d'un système matériel ;
2) d'étudier le **gyroscope** et certaines de ses caractéristiques non intuitives.

III. Notion de centre de masse

Soit un système matériel formé par un ensembles de N points matériels. Notons :

- m_i = la masse du $i^{\text{ème}}$ point matériel ;
- $\vec{r}_i(t)$ = la position au temps t du $i^{\text{ème}}$ point matériel ;
- $\vec{V}_i(t) = \dfrac{d\,\vec{r}_i(t)}{dt}$ = la vitesse au temps t du $i^{\text{ème}}$ point matériel ;
- $\vec{a}_i(t) = \dfrac{d\,\vec{V}_i(t)}{dt}$ = l'accélération au temps t du $i^{\text{ème}}$ point matériel ;
- $\vec{p}_i(t) = m_i \cdot \vec{V}_i(t)$ = la quantité de mouvement au temps t du $i^{\text{ème}}$ point matériel.

Par la suite la dépendance au temps ne sera pas toujours explicités pour alléger l'écriture.

<u>Définition du centre de masse du système :</u>

Le **centre de masse** est défini par : $\boxed{\overrightarrow{r_{CM}} = \dfrac{1}{m_{tot}} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i}$, où

$\boxed{m_{tot} = \sum_{i=1}^{N} m_i}$ est la masse totale du système.

Nous allons voir que ce centre de masse possède plusieurs propriétés particulières.

L'énergie potentielle du système matériel est égale à l'énergie potentielle d'un point matériel de masse m_{tot} se trouvant à la position du centre de masse du système !

Ceci sera vu dans l'exercice 4 de la série 1 sur le centre de masse.

<u>Déterminons la quantité de mouvement totale du système matériel :</u>

$\overrightarrow{p_{tot}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{V}_i$ par définition de la quantité de mouvement totale

$\overrightarrow{p_{tot}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ car la vitesse est la dérivée de la position par rapport au temps

$\overrightarrow{p_{tot}} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i$ propriétés de la dérivée

$\overrightarrow{p_{tot}} = m_{tot} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m_{tot}} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i\right)$ multiplication et division par m_{tot}

$\overrightarrow{p_{tot}} = m_{tot} \cdot \frac{d}{dt}\overrightarrow{r_{CM}}$ multiplication et division par m_{tot}

$\overrightarrow{p_{tot}} = m_{tot} \cdot \overrightarrow{V_{CM}}$ en définissant $\overrightarrow{V_{CM}} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{r_{CM}}$ comme étant la vitesse du centre de masse.

La quantité de mouvement totale du système matériel est égale à la quantité de mouvement d'un point matériel de masse m_{tot} se déplaçant à la vitesse du centre de masse.

L'exercice 5.1 de la série 1 montre que : $\overrightarrow{V_{CM}} = \frac{1}{m_{tot}} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{V}_i$.

Cela signifie que la vitesse du centre de masse est la moyenne pondérée des vitesses des points matériels.

Définissons l'accélération du centre de masse par : $\overrightarrow{a_{CM}} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{CM}}$.

L'exercice 5.2 de la série 1 montre que : $\overrightarrow{a_{CM}} = \frac{1}{m_{tot}} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{a}_i$.

Cela signifie que l'accélération du centre de masse est la moyenne pondérée des accélérations des points matériels.

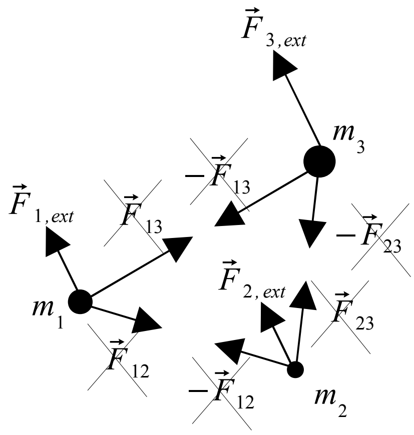
<u>Déterminons le lien entre l'accélération du centre de masse et la force résultante :</u>

$m_{tot} \cdot \overrightarrow{a_{CM}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{a}_i$ vu précédemment et dans l'exercice 5.2 de la série 1.

$m_{tot} \cdot \overrightarrow{a_{CM}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ loi fondamentale de la dynamique appliquée sur chaque point matériel

$m_{tot} \cdot \overrightarrow{a_{CM}} = \overrightarrow{F_{rés}}$ par définition de la force résultante

L'accélération du centre de masse du système matériel est égale à celle d'un point matériel de masse m_{tot} subissant une force résultante égale à celle subie par le système.



Allons un peu plus loin en remarquant que la force résultante $\overrightarrow{F_{rés}}$ est égale à la somme des forces agissant sur le système depuis *l'extérieur du système*. Autrement dit les forces dues aux interactions entre les particules du système n'interviennent pas dans la force résultante, car elles s'annulent deux à deux.

Ce résultat signifie que le centre de masse du système se comporte comme un point matériel de masse égale à m_{tot}, qui est soumis à la force résultante extérieure agissant sur le système.

C'est une généralisation de la deuxième loi de Newton.

Ce qui précède implique que si $\overrightarrow{F_{rés,ext}}(t) = \vec{0}$, alors $\overrightarrow{a_{CM}}(t) = \vec{0}$ et $\overrightarrow{V_{CM}}(t) = \overrightarrow{constante}$.

Si la somme des forces agissant sur le système, depuis l'extérieur du système, est nulle, alors le centre de masse se déplace à vitesse constante en norme, sans changer de direction ni de sens.

C'est une généralisation de la <u>première loi de Newton</u>, appelée aussi "la loi d'inertie de Galilée".

<u>Exercice :</u>

° Déterminez la force résultante d'un système matériel ne subissant comme forces extérieures que la force de la pesanteur au voisinage de la Terre.

° Déduisez-en le type de trajectoire effectué par le centre de masse du système dans cette situation.

<u>Energie cinétique totale d'un système matériel.</u>

On pourrait espérer obtenir un résultat similaire aux précédents, disant que l'énergie cinétique totale d'un système matériel est égale à l'énergie cinétique d'un point matériel de masse m_{tot} se déplaçant à la vitesse du centre de masse. Mais ce résultat est faux, car même si le centre de masse du système est immobile, celui-ci peut tourner sur lui-même et avoir une énergie totale non nulle.
Il existe quand-même un résultat intéressant qui décompose l'énergie totale du système en une énergie cinétique de translation du centre de masse et une énergie cinétique "interne" au système, due à une agitation ou à une rotation du système sur lui-même.
Ce résultat s'énonce ainsi :

L'énergie cinétique totale d'un système matériel mesurée dans un référentiel que nous appellerons "*notre référentiel*", **est égale à la somme de l'énergie cinétique totale** mesurée dans le référentiel du **centre de masse** plus celle de **l'énergie cinétique du centre de masse**, considéré comme point matériel.

Notons $\vec{v}_i$ la vitesse du $i^{\text{ème}}$ point matériel mesurée dans notre référentiel.

Notons $\vec{v_i^*}$ la vitesse du $i^{\text{ème}}$ point matériel mesurée dans le référentiel du centre de masse.

Notons $\vec{v}_{CM}$ la vitesse centre de masse, mesurée dans notre référentiel.

On a : $\vec{v}_i = \vec{v_i^*} + \vec{v}_{CM}$

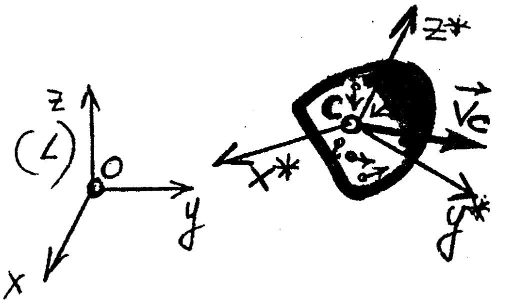
$m_{tot} = \sum_{i=1}^{N} m_i$ = la masse totale du système.

$E_{cin,tot} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v_i^2$ = l'énergie cinétique totale du système, mesurée dans notre référentiel.

$E^*_{cin,tot} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot (v_i^*)^2$ = l'énergie cinétique totale du système, mesurée depuis le centre de masse.

$E_{cin,CM} = \frac{1}{2} \cdot m_{tot} \cdot v_{CM}^2$ = l'énergie cinétique du centre de masse, mesurée dans notre référentiel.

L'énoncé signifie que : $\boxed{E_{cin,tot} = E^*_{cin,tot} + E_{cin,CM}}$



<u>Montrons cette égalité :</u>

$$E_{cin,tot} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot \vec{v}_i \bullet \vec{v}_i$$

$$E_{cin,tot} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot (\vec{v_i^*} + \vec{v}_{CM}) \bullet (\vec{v_i^*} + \vec{v}_{CM})$$

$$E_{cin,tot} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot \left(\vec{v_i^*} \bullet \vec{v_i^*} + 2 \cdot \vec{v}_{CM} \bullet \vec{v_i^*} + \vec{v}_{CM} \bullet \vec{v}_{CM} \right)$$ propriété du produit scalaire

$$E_{cin,tot} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot (v_i^*)^2 + \vec{v}_{CM} \bullet \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{v_i^*} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot v_{CM}^2$$ séparation des trois termes et mises en évidence

$$E_{cin,tot} = E^*_{cin,tot} + 0 + E_{cin,CM}$$ il faut se rendre compte que le terme du milieu est nul.

$\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{v_i^*}$ est nulle, car $\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{v_i^*} = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \frac{d}{dt} \vec{r_i^*} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r_i^*} = \frac{d}{dt} \vec{0} = \vec{0}$.

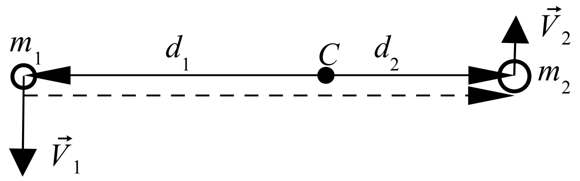
$\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r_i^*}$ représente la position du centre de masse vue depuis le centre de masse.

On a donc montré que : $\boxed{E_{cin,tot} = E^*_{cin,tot} + E_{cin,CM}}$.

IV. Le moment cinétique

Commençons par motiver l'utilité de cette nouvelle grandeur qu'est le *moment cinétique*.

Considérons deux masses m_1 et m_2 tournant de manière circulaire autour de leur centre de gravité $\boldsymbol{C}$.



Le centre de gravité est caractérisé par la relation : $m_1 \cdot d_1 \;=\; m_2 \cdot d_2$.

La quantité de mouvement totale du système vue depuis le centre de masse vaut : $\vec{p}_{tot} \;=\; m_1 \cdot \vec{V}_1 + m_2 \cdot \vec{V}_2$

$V_i = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot d_i}{T}$ où T est la période de rotation, $i = 1,\; 2$.

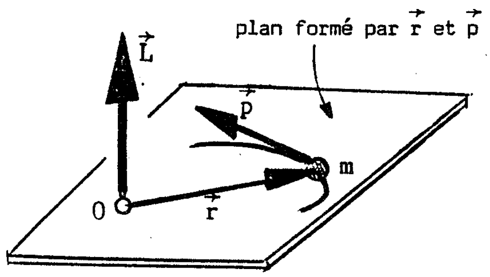
Donc $\boldsymbol{m_1 \cdot V_1} \;=\; \dfrac{2 \cdot \pi \cdot d_1 \cdot m_1}{T} \;=\; \dfrac{2 \cdot \pi \cdot d_2 \cdot m_2}{T} \;=\; \boldsymbol{m_2 \cdot V_2}$

fois m_1 car $m_1 \cdot d_1 = m_2 \cdot d_2$ fois m_2

Les vitesses étant parallèles de sens opposé, la **quantité de mouvement totale est nulle** !
Elle ne caractérise donc pas ce mouvement de rotation.

Une grandeur qui caractérise bien ce mouvement de rotation est le moment cinétique.

IV.1 Définition du moment cinétique d'un point matériel



Considérons un point matériel de masse m en mouvement dans le référentiel du laboratoire.
Le point O désigne l'origine d'un système d'axes.

Le **moment cinétique** $\vec{L}$ du point matériel, relatif au point O, est défini par le *produit vectoriel* de son vecteur-position $\vec{r}$ par sa quantité de mouvement $\vec{p} = m \cdot \vec{V}$:

$\boxed{\vec{L} \;=\; \vec{r} \times \vec{p}}$ on a aussi $\boxed{\vec{L} \;=\; m \cdot \vec{r} \times \vec{V}}$

<u>Rappels concernant le produit vectoriel.</u>
Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{p}$ est le vecteur :

- de **longueur** égale à $\|\vec{r}\| \cdot \|\vec{p}\| \cdot \sin(\theta)$ où $\theta =$ l'angle entre $\vec{r}$ et $\vec{p}$
- de **direction** perpendiculaire à $\vec{r}$ et à $\vec{p}$.
- de **sens** définie par la règle de la main droite.

En composantes : $\boldsymbol{\vec{r} \times \vec{p} = \langle r_y \cdot p_z - r_z \cdot p_y \;;\; r_z \cdot p_x - r_x \cdot p_z \;;\; r_x \cdot p_y - r_y \cdot p_x \rangle}$

° Si $\vec{r}$ et $\vec{p}$ sont deux vecteurs parallèles, alors $\vec{r} \times \vec{p} = \vec{0}$.

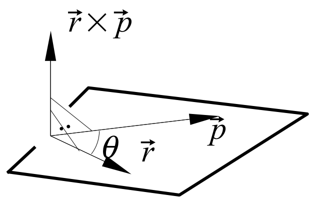
° L'opération est distributive : $\vec{r} \times (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{r} \times \vec{p}_1 + \vec{r} \times \vec{p}_2$.

° Calcul de dérivée : $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{r}(t) \times \vec{p}(t)\right) = \left(\dfrac{d}{dt}\vec{r}(t)\right) \times \vec{p}(t) + \vec{r}(t) \times \left(\dfrac{d}{dt}\vec{p}(t)\right)$.

° L'opération est anticommutative : $\vec{r} \times \vec{p} = -\,\vec{p} \times \vec{r}$.

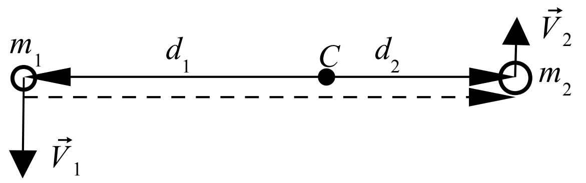
° L'opération n'est **pas** associative : $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

° L'opération ne possède **pas** d'élément neutre.



L'**unité** du S.I. du moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ est : $\left[\frac{kg \cdot m^2}{s}\right]$. Elle n'a pas de nom particulier.

Reprenons l'exemple de la page précédente de deux masses m_1 et m_2 tournant de manière circulaire autour de leur centre de gravité C.



Le centre de gravité est caractérisé par la relation : $m_1 \cdot d_1 = m_2 \cdot d_2$.
Le moment cinétique total du système vue depuis le centre de masse vaut :

$$\vec{L}_{tot} = m_1 \cdot \vec{r}_1 \times \vec{V}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 \times \vec{V}_2$$

Comme précédemment, on a $\boldsymbol{m_1 \cdot V_1 = m_2 \cdot V_2}$, mais cette fois les vecteurs $\vec{r}_1 \times \vec{V}_1$ et $\vec{r}_2 \times \vec{V}_2$ sont de même sens et perpendiculaire au plan de rotation des deux masses.

$V_i = \frac{2 \cdot \pi \cdot d_i}{T} = \omega \cdot d_i$, $i = 1,\ 2$. T est la période de rotation et $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ la pulsation.

$L_{tot} = m_1 \cdot d_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot r_2 \cdot V_2 = m_1 \cdot d_1^2 \cdot \omega + m_2 \cdot d_2^2 \cdot \omega$.

Donc : $\boxed{L_{tot} = \left(m_1 \cdot d_1^2 \cdot + m_2 \cdot d_2^2\right) \cdot \omega}$

Le moment cinétique caractérise bien ce mouvement de rotation.

- Sa direction est perpendiculaire au plan de rotation
- Il est proportionnelle à la vitesse de rotation du système
- Il est d'autant plus grand que les masses sont grandes et donc que le système est difficile à arrêter
- Il est d'autant plus grand que les distances des masses au centre de gravité sont grandes et donc que le système est difficile à arrêter.

Nous verrons plus en détails que la grandeur : $m_1 \cdot d_1^2 \cdot + m_2 \cdot d_2^2$ appelée **moment d'inertie** est une caractéristique du système correspondant à sont "*inertie de rotation*".

IV.2 Moment de force

Une propriété intéressante est le comportement de la dérivée du moment cinétique par rapport au temps.

$\frac{d}{dt}\vec{L} = m \cdot \left(\frac{d}{dt}\vec{r}\right) \times \vec{v} + m \cdot \vec{r} \times \left(\frac{d}{dt}\vec{v}\right)$ règle de dérivation du produit vectorielle

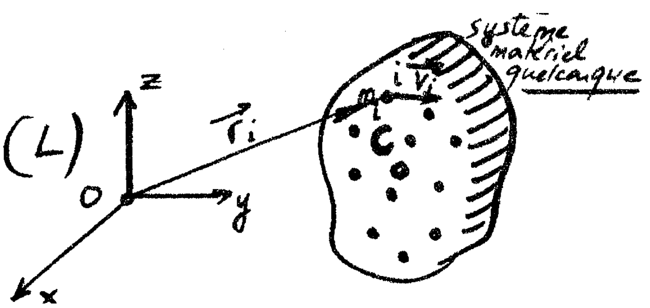
$\frac{d}{dt}\vec{L} = m \cdot (\vec{v}) \times \vec{v} + \vec{r} \times (m \cdot \vec{a})$ car $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r}$ et $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}$.

$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F}_{rés}$ car $\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$ et $m \cdot \vec{a} = \vec{F}_{rés}$.

Le résultat final intéressant est : $\boxed{\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F}_{rés}}$.

La grandeur $\boxed{\vec{r} \times \vec{F}_{rés}}$ s'appelle **le moment de force** et se note généralement $\vec{M}$.

IV.3 Moment cinétique d'un système matériel



Le moment cinétique d'un système matériel est la somme des moments cinétiques des points matériels qui le compose.

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$$

Tous les $\vec{L}_i$ et $\vec{L}$ sont relatifs à O et mesurés dans le référentiel (L).

IV.4 Loi fondamentale des systèmes en rotation

Exprimons la dérivée $\frac{d\vec{L}}{dt}$ du moment cinétique total d'un système matériel :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i\right)}{dt} = \frac{d\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \cdot \vec{v}_i\right)}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\left(\vec{r}_i \times m_i \cdot \vec{v}_i\right)}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \cdot \vec{v}_i\right) + \left(\vec{r}_i \times m_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt}\right)\right]$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i \times m_i \cdot \vec{v}_i}_{=\ 0,\ \text{car}\ \vec{v}_i \times \vec{v}_i = \vec{0}} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \cdot \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \left(\overrightarrow{F_{i,\text{int}}} + \overrightarrow{F_{i,\text{ext}}}\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \overrightarrow{F_{i,\text{int}}}}_{=\ \vec{0},\ \text{c.f. plus bas}} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \overrightarrow{F_{i,\text{ext}}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \overrightarrow{F_{i,\text{ext}}}$$

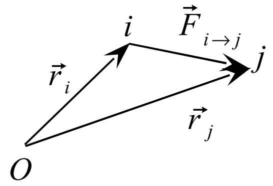
$\overrightarrow{F_{i,\text{int}}}$ représente la force subie par la $i^{\text{ème}}$ particule due à des forces d'autre particules du système.

$\overrightarrow{F_{i,\text{ext}}}$ représente la force subie par la $i^{\text{ème}}$ particule due à des forces externes au système.

$\vec{r}_i \times \overrightarrow{F_{i,\text{ext}}}$ s'appelle un **moment de force**.

La somme $\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \overrightarrow{F_{i,\text{int}}} = \vec{0}$, car les moments de forces internes s'annulent deux à deux.

Montrons-le pour deux particules i et j.



Pour des forces internes entre deux particules, par action - réaction, on a : $\overrightarrow{F_{i\to j}} = -\overrightarrow{F_{j\to i}}$, donc

$$\vec{r}_i \times \overrightarrow{F_{i\to j}} + \vec{r}_j \times \overrightarrow{F_{j\to i}} = \vec{r}_i \times \overrightarrow{F_{i\to j}} - \vec{r}_j \times \overrightarrow{F_{i\to j}} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \overrightarrow{F_{i\to j}} = \vec{0}$$

Le résultat est nul, car $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ est de même direction que $\overrightarrow{F_{i\to j}}$, et le produit vectoriel de deux vecteurs de même direction est nul.

Si on définit le **moment de force totale** agissant sur un système par : $\boxed{\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \overrightarrow{F_{i,ext}}}$,

on obtient la l**oi fondamentale des corps en rotation** :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

Il faut un moment de force non nul pour faire varier le moment cinétique, soit en norme, soit en direction.
Autrement dit :
Le moment cinétique total d'un système physique <u>isolé</u>, c'est à dire soumis à aucun moment de force extérieur, est conservé au cours du temps.
Ce principe, déduit de l'expérience, découle de **l'isotropie** de l'espace.

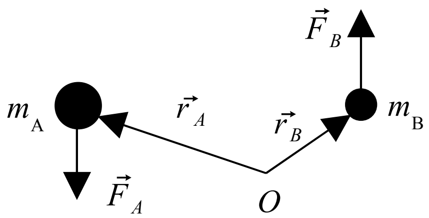
Cette loi est aussi importante que la loi de la dynamique pour les systèmes matériels. Elle est parfois appelée **équation du moment cinétique**. Elle doit être considérée comme l'expression d'une **loi fondamentale** de la dynamique.

<u>Remarques</u> :

1) Le moment cinétique $\vec{L}$ d'un système et le moment de force $\vec{M}$ sont relatifs au même point O !

2) Le moment total appliqué à un système, <u>n'est pas égal</u>, de manière générale, au moment de la force résultante ! $\vec{M} \neq \vec{r_{CM}} \times \vec{F_{rés}}$!

   Par exemple, il est fréquent que : $\vec{F_{rés}} = \vec{0}$ et $\vec{M} \neq \vec{0}$. Le dessin suivant illustre ce cas :



$\vec{F}_{rés} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$, mais
$\vec{M} = \vec{r}_A \times \vec{F}_A + \vec{r}_B \times \vec{F}_B \neq \vec{0}$`
Le moment de force n'est pas nul, car les deux forces $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$ ont tendence à faire tourner le système dans le même sens.

V. Le corps solide rigide

Un **corps solide rigide** est un ensemble de points matériels dans lequel les distances mutuelles entre les particules restent constantes quelles que soient les actions extérieures. La rigidité absolue constitue évidemment un cas <u>idéal</u>.
Les sollicitations extérieures, $\vec{F_{ext}}$ et $\vec{M_{ext}}$, agissant sur le solide, auront pour seul effet de modifier sa vitesse de translation et sa vitesse de rotation. Les déformations du solide sont négligées ici. Leur étude fait l'objet d'un <u>autre</u> chapitre de la mécanique : l'élasticité.

° Rappelons que la somme des forces intérieures et celle des moments intérieurs au système sont nulles :

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F_{i,\text{int}}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N} \vec{M_{i,\text{int}}} = \vec{0}$$

° Lorsque nous étudions un <u>point matériel</u> en mouvement, le problème du point d'application des forces ne se posait pas. Toutes les forces, ainsi que leur résultante, étaient appliquées au même point, la particule matérielle elle-même. Le seul mouvement possible d'un point matériel était le mouvement de <u>translation</u>.
Dans le cas d'un <u>corps solide</u> toutefois, les points d'application des forces extérieures ne sont en général pas les mêmes. Cela n'influence pas la force résultante, nous avons vu que le centre de masse du système agit comme un point matériel soumis à cette force résultante. Par contre cela influence la rotation du solide.

° Le mouvement le plus général d'un corps solide rigide peut toujours être considéré comme la combinaison d'une **translation** de son centre de masse et d’une **rotation** autour d’un axe qui passe par son centre de masse.

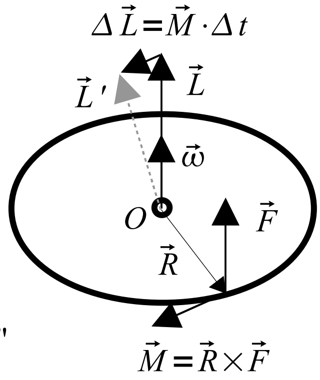
VI. Moment cinétique d'un solide rigide tournant

La dynamique du solide rigide est un sujet complexe. Sa rotation peut se faire autour d'un axe qui change avec le temps. Nous n'étudierons que les cas les plus simples.

Le **vecteur vitesse de rotation** $\vec{\omega}$ est le vecteur :

- de norme égale à $2 \cdot \pi \cdot$ fréquence de rotation. Donc $\|\vec{\omega}\| = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ où $T =$ la période de rotation.
- de direction parallèle à l'axe de rotation.
- de sens déterminé par la règle du tire-bouchon ou de la main droite.

<u>Pour illustrer la dynamique de la rotation d'un corps solide rigide, voici un exemple simple.</u>



Considérons un mince cerceau circulaire de rayon R tournant autour d'un axe normal au plan du cerceau, passant par le centre O du cercle. Cela peut être une roue de vélo.
Notons ω sa vitesse de rotation angulaire. Chacune de ses parties se trouve à la distance R du centre O et se déplace à la vitesse $V = R \cdot \omega$.
Toute sa masse m est à distance R du centre.
Donc son moment cinétique est : $L = m \cdot R \cdot v = m \cdot R^2 \cdot \omega$

Dans ce résultat la quantité $m \cdot R^2$ apparaît. Elle s'appelle "**le moment d'inertie**" et se note :

$$I = m \cdot R^2$$

Comme $\vec{L}$ est de même direction et sens que $\vec{\omega}$, on a : $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$.

Appliquons un court instant Δt une force $\vec{F}$ sur le bord du cerceau et <u>parallèle</u> à la direction $\vec{L}$.
Elle génère un moment de force $\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$ <u>perpendiculaire</u> à $\vec{L}$.

La loi fondamental des corps en rotation, $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$, implique que la variation de moment cinétique $\Delta\vec{L} = \vec{M} \cdot \Delta t$ est <u>perpendiculaire</u> à $\vec{L}$.

La variation de direction de l'axe de rotation $\Delta\vec{\omega}$ sera <u>perpendiculaire</u> à $\vec{L}$ et à $\vec{F}$!
C'est une propriété remarquable des corps en rotations.

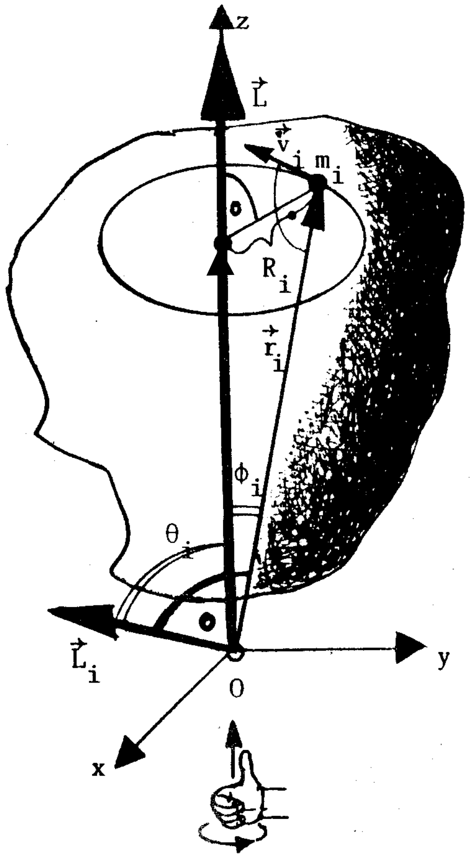
Remarquez que cette déduction n'est valable que si $\Delta\vec{L}$ est beaucoup plus petit que $\vec{L}$ et donc il faut que le cerceau tourne vite. Car sinon, $\Delta\vec{L}$ engendre une nouvelle rotation non négligeable, dont on a pas tenu compte dans le raisonnement ci-dessus.

Généralisation de l'exemple précédent.

Considérons un corps solide rigide tournant autour d'un axe Δ.
Choisissons le référentiel de telle sorte que l'axe Δ soit confondu avec l'axe Oz.

Donc $\omega_x = \omega_y = 0$, seul $\omega_z \neq 0$. $\omega = \frac{2\pi}{T}$ où T = la période de rotation du solide.

Restreignons-nous au cas où la direction du moment cinétique total $\vec{L}$ par rapport à O est la même que celle de l'axe Oz. Donc $L_x = L_y = 0$, seul $L_z \neq 0$.
$\omega = \omega_z$ = la vitesse de rotation du solide autour de l'axe Oz. Axe Oz = axe Δ.



On étudie donc le cas où $\vec{L}$ et $\vec{\omega}$ sont de direction Oz, et de même sens.
Pour chaque point matériel m_i du solide en mouvement circulaire autour de l'axe Oz, on a :
$\|\vec{v_i}\| = \omega \cdot R_i$
$\vec{v_i}$ = la vitesse de m_i.
R_i = la distance de m_i à l'axe Oz. $\vec{R_i} = \langle r_{i,x};\ r_{i,y};\ 0\rangle$

Comme on a supposé que $\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L_i}$ est parallèle à l'axe Oz, seule la composante $L_{i,z}$ nous intéresse. $L_x = 0$ et $L_y = 0$.

Le dessin montre que : $\vec{L_{i,z}} = m_i \cdot \vec{R_i} \times \vec{v_i}$
Comme $\vec{R_i}$ et $\vec{v_i}$ sont perpendiculaires :
$L_{i,z} = m_i \cdot R_i \cdot v_i = m_i \cdot R_i \cdot R_i \cdot \omega = m_i \cdot R_i^2 \cdot \omega$
Donc $\|\vec{L}\| = \sum_{i=1}^{N} L_{i,z} = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot R_i^2 \cdot \omega = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot R_i^2\right) \cdot \omega$

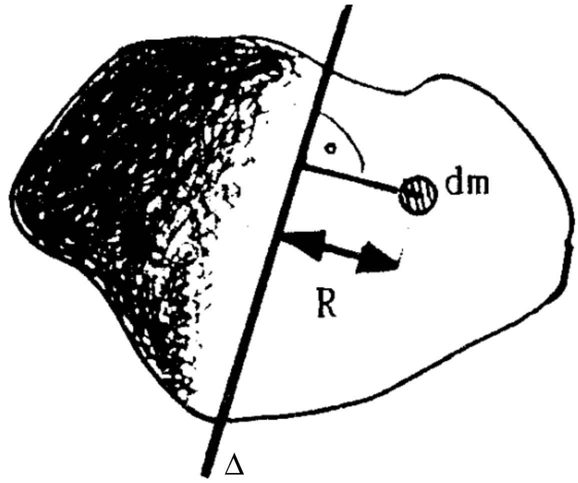
Rappelons que $\vec{L}$ et $\vec{\omega}$ sont de même direction et même sens.

Conclusion :

$\boxed{\vec{L} = I_\Delta \cdot \vec{\omega}}$ où $\boxed{I_\Delta = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot R_i^2}$ s'appelle le **moment d'inertie** du corps par rapport à l'axe Δ.

VII. Moment d'inertie d'un solide rigide

Le moment d'inertie $I_\Delta = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot R_i^2$ dépend de l'axe de rotation Δ, des masses m_i qui constituent le corps solide, ainsi que de leur distance à l'axe. Il joue en dynamique des rotations, le rôle que joue la masse en dynamique des translations.
L'unité dans le S.I. du moment d'inertie I_Δ est : $\left[kg \cdot m^2 \right]$. Elle ne porte pas de nom particulier.



Pour un corps solide dans lequel la matière est distribuée de manière continue, on peut écrire :
$$I_\Delta = \int_{\substack{masse\\total}} R^2 \cdot dm$$

et, si le corps est homogène : $I_\Delta = \rho \cdot \int_{\substack{volume\\total}} R^2 \cdot dV$

où ρ est la masse volumique du corps.

Dans la série 2 d'exercices on calculera les moments d'inertie, de solides particuliers tels que des disques, cy1indres pleins et creux, sphère etc.

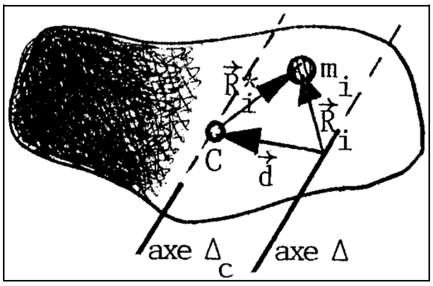
Remarques:

1) Si, comme on l'a supposé, $\vec{L}$ est parallèle à l'axe Δ de rotation, et si cet axe passe par le centre de gravité du corps, on dit que cet axe est un **axe principal d'inertie**. Tout corps solide, quelle que soit sa forme, possède au moins trois axes principaux d'inertie.

2) Il existe de nombreux cas où la position de l'axe de rotation Δ varie dans le temps et pour lesquels $\vec{L}$ n'est pas parallèle à l'axe Δ. Nous en verrons un petit aperçu plus loin.

La règle de Steiner

La règle de Steiner permet de calculer le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe Δ quelconque à partir du moment d'inertie de ce même corps par rapport à un axe Δ_C parallèle à Δ passant par le centre de masse C du corps :



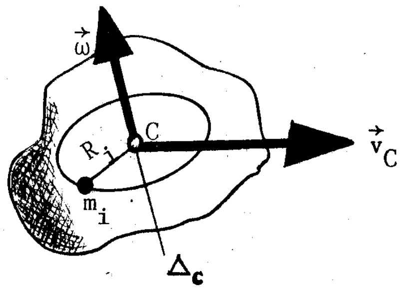
$\vec{R}^*_i \perp$ axe Δ_C ; $\vec{d} \perp$ axe Δ_C

d = distance entre les deux axes parallèles Δ_C et Δ.

La formulation de la règle de Steiner est : $\boxed{I_\Delta = m_{tot} \cdot d^2 + I_{\Delta_C}}$

Elle sera étudiée dans les exercices.

VIII. Energie cinétique totale d'un solide rigide en mouvement



Nous avons déjà vu que l'énergie cinétique mesurée dans le laboratoire est égale à l'énergie cinétique du centre de masse plus l'énergie cinétique mesurée dans le référentiel du centre de masse.

$$E_{cin,labo} = \frac{1}{2} \cdot m_{tot} \cdot v_C^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot v_i^{*2} ,$$

v_i^* est la vitesse de la particule de masse m_i relativement au centre de masse.

v_C est la vitesse du centre de masse mesurée depuis le référentiel du laboratoire.

Pour chaque masse m_i d'un solide rigide, on a : $v_i^* = \omega \cdot R_i$.

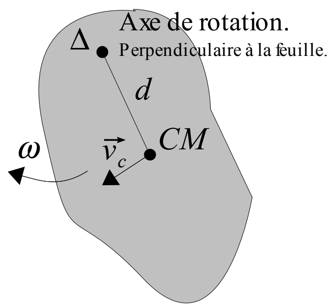
R_i = la distance de m_i à l'axe d'inertie Δ_C passant par le centre de masse.

I_{Δ_c} est le moment cinétique relativement à l'axe de rotation Δ_C.

Donc : $E_{cin,labo} = \frac{1}{2} \cdot m_{tot} \cdot v_C^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot R_i^2 \cdot \omega^2$

$$\boxed{E_{cin,labo} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot m_{tot} \cdot v_C^2}_{\text{énergie cinétique de translation}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot I_{\Delta_c} \cdot \omega^2}_{\text{énergie cinétique de rotation}}}$$

L'énergie cinétique du corps solide rigide est la somme de l'énergie cinétique de translation du centre de masse et d'une énergie cinétique de rotation autour d'un axe passant par le centre de gravité.



Si le corps tourne autour d'un même axe Δ à vitesse angulaire ω, alors l'énergie cinétique totale peut aussi se calculer par la formule : $\boxed{E_{cin} = \frac{1}{2} \cdot I_\Delta \cdot \omega^2}$, où

I_Δ est le moment cinétique relativement à l'axe de rotation Δ.

<u>Démonstration :</u>

Δ_C est l'axe parallèle à Δ, passant par le centre de masse CM.

I_{Δ_c} est le moment cinétique relativement à l'axe de rotation Δ_C.

On sait que : $E_{cin} = 0.5 \cdot m_{tot} \cdot v_C^2 + 0.5 \cdot I_{\Delta_c} \cdot \omega^2$.

Par hypothèse, $v_C = \omega \cdot d$, où d = la distance entre l'axe de rotation Δ et le centre de masse CM.

Donc $E_{cin} = 0.5 \cdot m_{tot} \cdot (\omega \cdot d)^2 + 0.5 \cdot I_{\Delta_c} \cdot \omega^2 = 0.5 \cdot \left(m_{tot} \cdot d^2 + I_{\Delta_c}\right) \cdot \omega^2$.

Selon la règle de Steiner, le moment d'inertie relativement à l'axe Δ vaut : $I_\Delta = m_{tot} \cdot d^2 + I_{\Delta_c}$

D'où l'on déduit que : $E_{cin} = 0.5 \cdot I_\Delta \cdot \omega^2$.

IX. Accélération de rotation

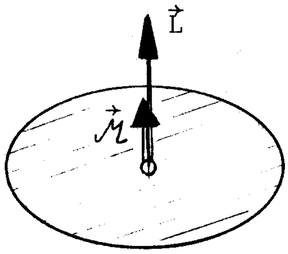
L'équation vectorielle $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ exprime, dans le cas un corps solide rigide, la loi fondamentale de son mouvement de rotation.
Dans le cas où l'axe de rotation Δ est un axe parallèle à un axe principal d'inertie de direction fixe dans le référentiel choisi, on a : $\vec{L} = I_\Delta \cdot \vec{\omega}$.

En combinant ces deux équations : $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \dfrac{dI_\Delta \cdot \vec{\omega}}{dt} = I_\Delta \cdot \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = I_\Delta \cdot \vec{\alpha}$.

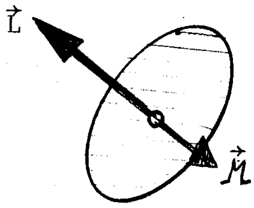
Donc $\boxed{\vec{M} = I_\Delta \cdot \vec{\alpha}}$, où $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ est l'**accélération angulaire** en $\left[\dfrac{radians}{s^2}\right]$.

Illustrations de la loi $\vec{M} = I_\Delta \cdot \vec{\alpha}$ dans le cas d'un disque en mouvement de rotation :

a) le disque "accélère" :

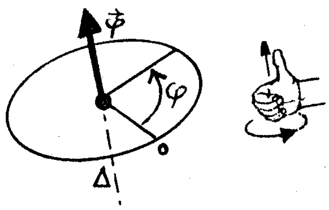


b) le disque "freine":



Dans ces cas, $\vec{M}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{L}$ et $\vec{\omega}$, ont la même direction que l'axe de rotation.
$\vec{M}$ et $\vec{\alpha}$ sont de même sens, ainsi que $\vec{L}$ et $\vec{\omega}$.
Le sens de $\vec{M}$ est le même que celui de $\vec{L}$ quand le disque "accélère".
Le sens de $\vec{M}$ est opposé à celui de $\vec{L}$ quand le disque "freine".

Dans le cas particulier où le moment $\vec{M}$ appliqué au corps solide en rotation est constant, l'accélération angulaire $\vec{\alpha}$ l'est également et chaque point du corps solide effectue, dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation Δ, un mouvement "circulaire uniformément accéléré" : l'horaire angulaire du mouvement est: $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \dfrac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$, où les quantités constantes φ_0, ω_0 et α sont les composantes des vecteurs correspondants le long de l'axe Δ. Elles peuvent être négative, nulle ou positive.



Dans le cas général, si aucun moment extérieur n'agit sur un corps solide en rotation, son moment cinétique $\vec{L}$ est constant. Cet énoncé constitue la loi d'inertie pour les corps en rotation.

Par contre sa vitesse angulaire $\vec{\omega}$ peut varier dans le temps si elle n'est pas parallèle à $\vec{L}$. Lancez en l'air une assiette en rotation autour d'un axe perpendiculaire à celle-ci, elle ne tournera pas régulièrement, mais l'axe perpendiculaire à l'assiette vibrera. L'étude générale de tels mouvements dépasse le cadre de ce cours.

X. Comparaison entre la dynamique de translation et de rotation

Ce qui suit facilite la mémorisation des lois de la dynamique des solides rigides. A toute grandeur liée à la rotation correspond une grandeur liée à la translation.

Grandeurs associées à la **translation**	Grandeurs associées à la **rotation**
→ déplacement élémentaire $d\vec{r}$	↔ angle élémentaire $d\vec{\theta}$
→ position $\vec{r}$	↔ angle $\vec{\theta}$
→ vitesse $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$	↔ vitesse angulaire $\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\theta}}{dt}$
→ accélération $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$	↔ accélération angulaire $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$
→ masse m	↔ moment d'inertie I_Δ
→ quantité de mouvement $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	↔ moment cinétique $\vec{L} = I_\Delta \cdot \vec{\omega}$ (*)
→ force $\overrightarrow{F_{rés}} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \vec{a}$	↔ moment de force $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} = I_\Delta \cdot \vec{\alpha}$ (*)
→ énergie cinétique $E_{cin} = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$	↔ énergie cinétique $E_{cin} = \dfrac{1}{2} \cdot I_\Delta \cdot \omega^2$ (*)
MRU : $\vec{v} = \overrightarrow{const}$	↔ rotation uniforme : $\vec{\omega} = \overrightarrow{const}$
MRUA : $\vec{a} = \overrightarrow{const}$	↔ rotation uniforme accélérée $\vec{\alpha} = \overrightarrow{const}$
$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0} \cdot t + \dfrac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot t^2$ et $\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a} \cdot t$	↔ $\vec{\theta} = \vec{\theta_0} + \vec{\omega_0} \cdot t + \dfrac{1}{2} \cdot \vec{\alpha} \cdot t^2$ et $\vec{\omega} = \vec{\omega_0} + \vec{\alpha} \cdot t$

Quelques relations entre ces grandeurs :

$$I_\Delta = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot R_i^2 \qquad \vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i} \times \vec{p_i} \qquad \vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i} \times \vec{F_i}$$

(*) <u>Remarques :</u>

Les relations : $\vec{L} = I_\Delta \cdot \vec{\omega}$; $\vec{M} = I_\Delta \cdot \vec{\alpha}$; $E_{cin} = \dfrac{1}{2} \cdot I_\Delta \cdot \omega^2$ ne sont valables que lorsque $\vec{L}$, $\vec{\omega}$ et Δ ont la même direction. C'est le cas si le solide tourne autour d'un axe parallèle à un axe principal d'inertie.

Le centre de masse se déplace à vitesse $\vec{V} = \overrightarrow{constante}$ ⇔ la force résultante est nulle.

Le moment cinétique $\vec{L} = \overrightarrow{constante}$ ⇔ le moment de force totale est nul.

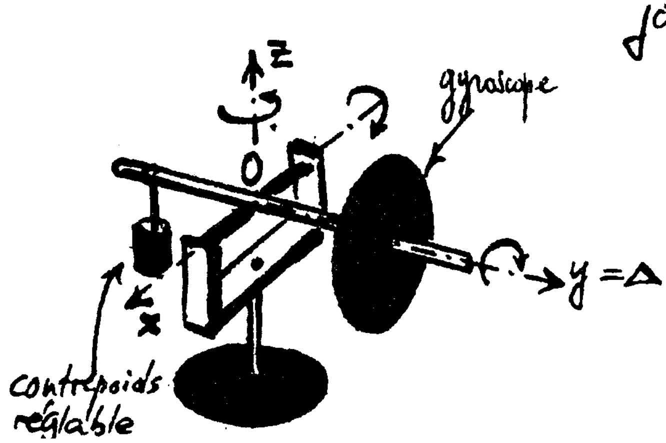
Mais cela n'implique pas forcément que la vitesse de rotation angulaire est constante. L'axe de rotation peut lui-même osciller.

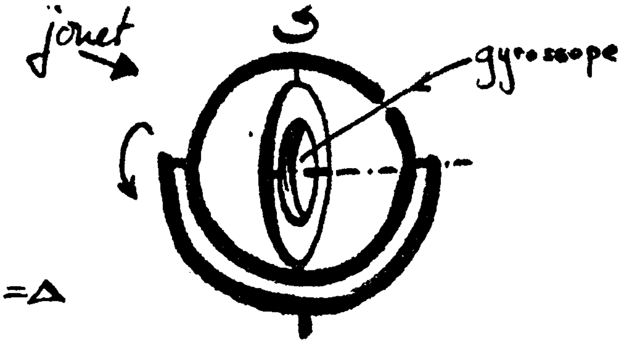
XI. Le gyroscope

Le gyroscope est un dispositif inventé en 1852 par Léon Foucault pour démontrer, entre autres, le mouvement de rotation terrestre. Du point de vue mécanique, tout corps animé d'un mouvement de rotation rapide tel qu'une toupie, un volant de machine et une roue peut constituer un gyroscope.

On appellera **gyroscope** un corps solide rigide tournant autour d'un axe de symétrie. Cet axe est donc un axe principal d'inertie et passe par le centre de masse du solide. Il est fixé en un certain point, mais n'est pas immobilisé et sa direction peut varier librement dans l'espace

Illustrations :





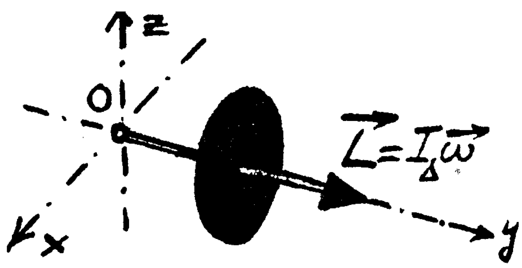
Nous allons donner ici quelques éléments de la « théorie simplifiée du gyroscope » appliquée au cas où la rotation propre du solide, autour de son axe de symétrie, est très grande par rapport aux autres mouvements tels que la précession et la nutation décrits ci-dessous.

On placera le gyroscope dans le référentiel du laboratoire de telle sorte que son centre de masse reste en moyenne à la même place. Il peut bouger, pour tourner, mais reste dans un espace confiné.

1) Cas où le moment total extérieur est nul et où le gyroscope tourne autour de son axe de symétrie :

Dans ce cas, $\vec{M} = \vec{0}$ et $\vec{L} = I_\Delta \cdot \vec{\omega} = \overrightarrow{cte}$.

Le gyroscope tourne à vitesse constante et garde toujours la même direction.



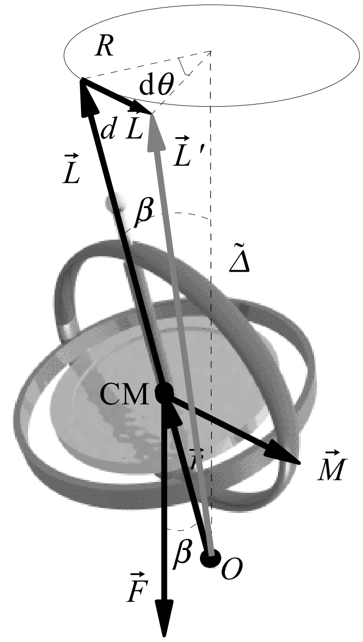
Si le laboratoire se trouve sur l'équateur, plaçons-le de manière à ce que son axe Δ soit horizontal et $\vec{L}$ dirigé vers l'ouest. On constatera que cet axe s'inclinera progressivement jusqu'à adopter la position verticale après six heures. Douze heures plus tard, $\vec{L}$ sera dirigé vers l'est.

Si le laboratoire se trouve au pôle Nord, plaçons-le de manière à ce que son axe Δ soit horizontal. On constatera que cet axe tournera progressivement dans un plan horizontal pour faire un tour complet en 24 heures.

Dans le cas général, son mouvement apparent suivra une trajectoire décrivant un cône. Si $\vec{L}$ est dirigé vers le Soleil ou une autre étoile, $\vec{L}$ restera toujours dirigé vers le Soleil ou l'étoile choisie.
Si l'étoile choisie est le Soleil, il faut négliger le mouvement de la Terre autour du Soleil, c'est-à-dire se limiter à une période d'observation de quelques jours au maximum.

2) <u>Cas où le moment M ≠ 0 n'est pas nul et où le gyroscope tourne autour de son axe de symétrie :</u>
Ici $\vec{M} \neq \vec{0}$. Etudions son influence sur le mouvement d'un gyroscope à rotation rapide.

La loi fondamentale de la dynamique de rotation indique que :
$d\vec{L} = \vec{M} \cdot dt$



Durant un cours instant dt, le moment cinétique passe de $\vec{L}$ à $\vec{L}' = \vec{L} + d\vec{L}$.

Si le moment de force est dû à la force de pesanteur $\vec{M} = \vec{r} \times m \cdot \vec{g}$, celui-ci est perpendiculaire à $\vec{r}$ qui est parallèle à $\vec{L}$ et à l'axe du gyroscope.
Dans ce cas, où le moment de force $\vec{M}$ est perpendiculaire au moment cinétique $\vec{L}$, la variation de moment cinétique $d\vec{L}$ est perpendiculaire à $\vec{L}$. L'axe du gyroscope va se mettre à tourner lentement autour d'un nouvelle axe $\tilde{\Delta}$.

Ce mouvement lent de l'axe du gyroscope s'appelle le **mouvement de précession**.
L'axe $\tilde{\Delta}$ s'appelle l'**axe de précession**.
Notons :
- ω la vitesse angulaire de rotation du gyroscope.
- Ω la **vitesse angulaire de précession**.
- $d\theta$ la variation d'angle que subit l'axe du gyroscope durant le temps dt. c.f. dessin.
- β l'angle entre la direction $\vec{L}$ de l'axe de rotation du gyroscope et la direction $\tilde{\Delta}$.
- R le rayon du cercle décrit par l'extrémité du vecteur $\vec{L}$.
- I_Δ le moment d'inertie du gyroscope.

On a : $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$; $d\theta = \frac{dL}{R}$; $R = L \cdot \sin(\beta)$; $M = \frac{dL}{dt}$ et $L = I_\Delta \cdot \omega$.

En combinant ces informations, on obtient :

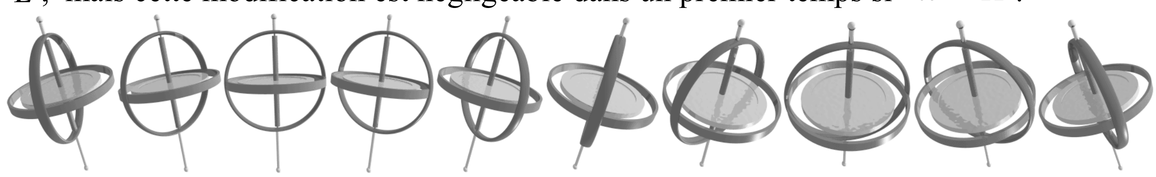
$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{dL}{R \cdot dt} = \frac{M}{R} = \frac{M}{L \cdot \sin(\beta)} \quad \text{et finalement :} \quad \boxed{\Omega = \frac{M}{I_\Delta \cdot \omega \cdot \sin(\beta)}}$$

La vitesse angulaire de précession Ω est proportionnelle au moment de force M, mais est inversement proportionnelle au moment d'inertie I_Δ et à la vitesse de rotation ω du gyroscope.

Dans le cas particulier où $M = \|\vec{r_{CM}} \times m \cdot \vec{g}\| = m \cdot g \cdot r_{CM} \cdot \sin(\beta)$, on obtient : $\boxed{\Omega = \frac{m \cdot g \cdot r_{CM}}{I_\Delta \cdot \omega}}$

La vitesse angulaire de précession Ω ne dépend pas de l'inclinaison β de l'axe du gyroscope !!!

Remarquez que le mouvement de précession modifie la vitesse angulaire ω et le moment cinétique $\vec{L}$, mais cette modification est négligeable dans un premier temps si $\omega \gg \Omega$.



<u>Application numérique.</u>
Prenons un petit gyroscope de masse $m = 0{,}2$ [kg], avec $r_{CM} = 0{,}04$ [m].
Sa forme est cylindrique de rayon = 0,03 [m],
donc $I = 0.5 \cdot m \cdot rayon^2 = 0.5 \cdot 0.2 \cdot 0.03^2 = 90 \cdot 10^{-6} [kg \cdot m^2]$.
Faisons-le tourner à 40 tours par secondes, donc $\omega = 2 \cdot \pi \cdot 40 = 250 [rad/s]$

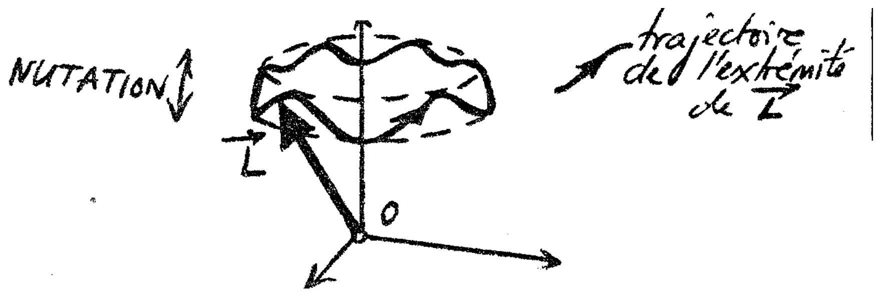
On calcule : $\Omega = \dfrac{m \cdot g \cdot r_{CM}}{I \cdot \omega} = \dfrac{0.2 \cdot 9.81 \cdot 0.04}{90 \cdot 10^{-6} \cdot 250} = 3.5 [rad/s]$

La vitesse de précession est environ 3% de la vitesse de rotation.

La période de précession est de : $T = \dfrac{2 \cdot \pi}{\Omega} = \dfrac{2 \cdot \pi}{3.5} = 1.8 [s]$

Le gyroscope prend environ 2 secondes pour que son axe fasse un tour complet suivant un cône.
Ces 2 secondes sont indépendantes de l'inclinaison de l'axe par rapport à la verticale.

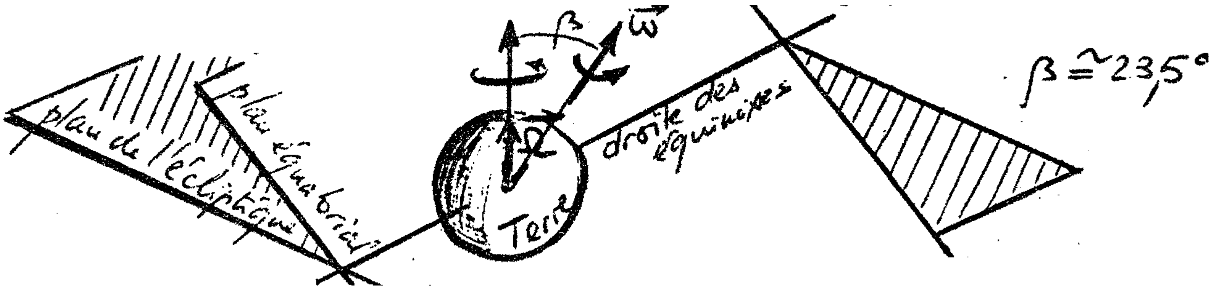
<u>Remarque</u> :
Une étude plus approfondie du gyroscope doit tenir compte de l'influence du mouvement de précession. Elle montre qu'en général, l'angle β du cône d'axe $\vec{\Omega}$ et de génératrice $\vec{L}$ ne reste pas constant, mais oscille entre deux valeurs fixes. Ce mouvement s'appelle la **nutation**.



De manière générale, on peut décomposer le mouvement général d'un solide possédant un point fixe en trois mouvements : la **rotation propre** ω, la **précession** **Ω,** et la **nutation**.

Manifestations et applications gyroscopiques

A) Tout d'abord une manifestation naturelle : la précession des équinoxes.
Cette découverte est attribuée à Hipparque, astronome grec du IIème siècle av. J. C.



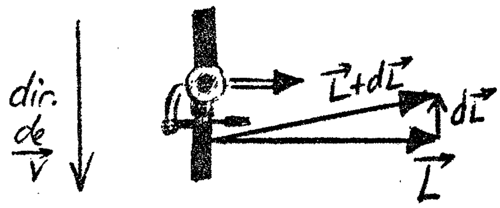
En raison de la forme géométrique de la Terre qui est aplatie aux pôles, et de l'inclinaison de son axe par rapport à l'écliptique (*), les forces de gravitation exercées par le Soleil et la Lune ont un moment résultant par rapport au centre de masse de la Terre. L'axe de rotation propre de la Terre est donc en précession sous l'action de ce moment et la ligne des équinoxes varie en direction. La période de la précession est d'environ 26'000 ans.

(*) L'écliptique est le plan de rotation de la Terre autour du Soleil.

B) Compas gyroscopique :
Un compas gyroscopique sert à indiquer toujours la même direction dans l'espace. Si on le place pour qu'il indique la direction de l'étoile polaire, il continuera d'indiquer cette direction pendant tout le trajet. En général, le compas gyroscope flotte sur un bain de mercure.

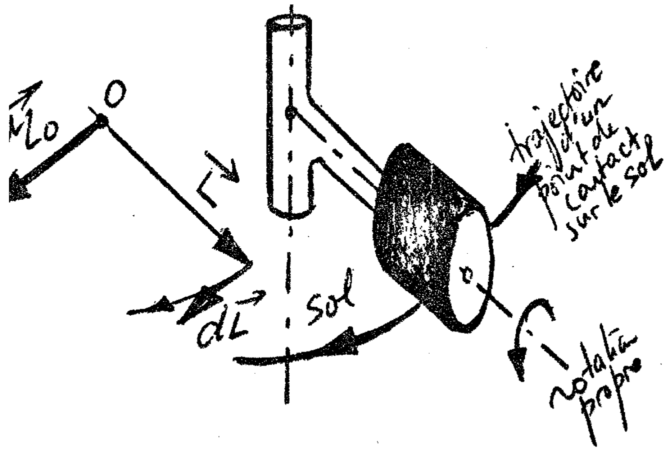
C) Dispositif de stabilisation :
Dans des satellites, avions et navires, on place des gros gyroscopes pour stabiliser l'engin. Par exemple, dans un navire, on force le mouvement de l'axe d'un gyroscope, pour contrer le tangage et ainsi augmenter le confort des passagers sur un bateau de tourisme.

D) Roue avant d'une bicyclette :
Voici une application quotidienne du gyroscope.



Si la vitesse v est suffisante, le cycliste qui se penche d'un côté fait tourner la roue de l'avant de sa bicyclette du même côté.

E) Meule à broyeur :



La précession forcée donne naissance à un moment $\overrightarrow{M_0}$.
La réaction $-\overrightarrow{M_0}$ correspond à une force exercée par la meule sur le sol, force qui, en général est plus grande que la force de la pesanteur de la meule !!!