Série 9 : Lois de Kepler et moment cinétique

1. Placer par ordre chronologique les personnages historiques suivants :
Galilée, Newton, Copernic, Feynman, Kepler, Brahe, Halley.
Indiquez ceux qui étaient contemporain et écrivez leur prénom.

---

2. A quelle époque l'idée de placer le Soleil, au lieu de la Terre, au centre de l'univers a-t-elle été émise la première fois ?

---

3. Donnez des arguments en faveur de l'héliocentrisme et de la non perfection du "ciel".

---

4. Quelle fut l'importance des lois de Kepler pour le développement de la physique ?

---

5. Dans le cas de trajectoire circulaire d'une planète autour d'un soleil beaucoup plus massif, ou d'un satellite autour d'un astre beaucoup plus massif que lui, démontrez la troisième loi de Kepler.

---

6. La Terre tourne autour du Soleil selon une trajectoire elliptique.
Quelles sont les distances Terre-Soleil minimales et maximales ?
Quelle sont les dimensions du grand-axe et du petit axe ?
Quelle est la distance entre le Soleil et le centre de l'ellipse formée par la Terre ?
Quelle est l'excentricité de la trajectoire elliptique de la Terre ?
En une journée, quelle est l'aire balayée par le segment de droite reliant la Terre au Soleil ?
Les données de la table CRM vous seront nécessaires !

---

7. Etudions un pendule qui oscille (approximativement) selon l'équation horaire :
$\vec{r}(t) = \langle a \cdot \cos(\omega \cdot t)\,;\, b \cdot \sin(\omega \cdot t);\, 0 \rangle$, dont la trajectoire est une ellipse. $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Rappelons que le produit vectoriel entre deux vecteurs est :
$\vec{c} \times \vec{d} = \langle c_y \cdot d_z - c_z \cdot d_y \,;\, c_z \cdot d_x - c_x \cdot d_z \,;\, c_x \cdot d_y - c_y \cdot d_x \rangle$.

° Montrez que le moment cinétique : $\vec{L} = m \cdot \vec{r}(t) \times \vec{v}(t)$ est constant et dirigé perpendiculairement au plan d'oscillation du pendule.

° Vérifiez que sa norme est égale à : $\|\vec{L}\| = \dfrac{2 \cdot m \cdot S}{T}$, où m = la masse du pendule, T = la période d'oscillation et $S = \pi \cdot a \cdot b$ = la surface de l'ellipse.

<u>Remarque :</u> bien que la trajectoire d'une planète autour du Soleil soit une ellipse, elle ne suit pas l'équation horaire ci-dessus, car la force n'est pas dirigée vers le centre de l'ellipse, mais vers un foyer de l'ellipse. Les calculs sont plus complexes.

---

8. Deux cosmonautes ayant chacun, avec leur attirail, une masse de 80 [kg], sont liés par une corde de 20 mètres de longueur. Le système effectue un mouvement de rotation uniforme de fréquence ν = 0,01 [Hz]. En tirant sur la corde, les deux cosmonautes se rapprochent jusqu'à ce que leur distance soit de 2 [m]. Les deux cosmonautes tirent chacun de la même façon sur la corde pour que le centre de masse ne bouge pas.

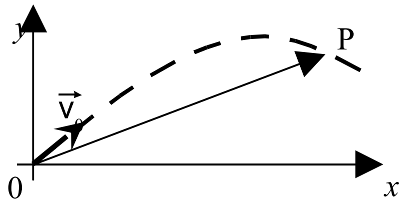
° Calculez le moment cinétique d'un cosmonaute relativement au centre de masse.
° Calculez la nouvelle fréquence de rotation.
° Calculez la variation d'énergie cinétique du système.
° Exprimez la tension F(r) dans la corde en fonction de la distance r d'un cosmonaute au centre de masse.
° Calculez le travail total W exercé par les deux astronautes pour montrer qu'il est égal à la variation d'énergie cinétique du système. (Une intégrale est nécessaire !)

Série 9 : Lois de Kepler et moment cinétique

9. Calculez, pour le tir parabolique vu au premier trimestre, le moment cinétique par rapport à l'origine O du point matériel P à chaque instant. (r(0) = 0)

° Puis montrez que l'on a bien : $\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$

où $\vec{M} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{g})$ est le moment de force de la pesanteur.



---

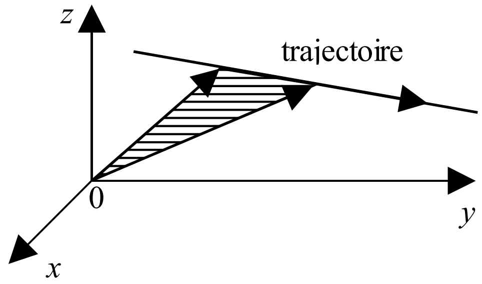
10. Considérons un mouvement rectiligne uniforme (MRU).

° Montrez que la loi des aires est vérifiée dans ce cas.

° Montrez que le moment cinétique et constant.

° Montrez que $\|\vec{L}\| = 2 \cdot m \cdot \frac{dS}{dt}$ où

S(t) = l'aire balayée par le vecteur position entre les temps 0 [s] et le temps t.



---

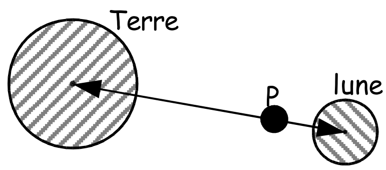
11. Calculez l'altitude terrestre à laquelle se trouve un satellite géostationnaire de masse m (de période de révolution égale à 23 heures 56 minutes) en mouvement circulaire et uniforme.

° Si la trajectoire du satellite est circulaire à une distance r du centre de la Terre, quelle est sa vitesse et quel est son moment cinétique ?

° Pour passer d'une distance r à une nouvelle distance r' du centre de la Terre, en gardant une trajectoire circulaire, la force appliquée sur le satellite peut-elle être centrale pour lui permettre d'effectuer ce changement d'orbite ?

---

12. Considérons le système Terre-Lune.
Calculez le rapport des distances Terre à P sur Lune à P,
où P est la position où le champ de gravitation total est nul.



---

13. On a défini l'énergie potentielle de gravitation par : $E_{pot}(r) = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$ où

r est la distance entre le centre du corps de masse M et la masse m.
Montrer qu'au voisinage de la surface de la Terre la variation de l'énergie potentielle de gravitation vaut $|\Delta E_{pot}| = m \cdot g \cdot h$ où $r_B = r_A + h$ avec $h << r_A$, et r_A = rayon terrestre.

Utilisez le faite que : $(r_A + h) \cdot r_A = r_A^2$ et que $\frac{G \cdot M}{r_A^2} = g$.

---

14. Considérons un objet uniquement soumis à la force de la gravitation.
Montrez que l'énergie mécanique définie par $E_{méc} = E_{cin} + E_{pot}$ est conservée.
E_{pot} = l'énergie potentielle de gravitation.

---

15. Considérons un objet (point matériel de masse **m**) "lâché" sans vitesse à 40'000 kilomètres du centre de la Terre. A quelle vitesse cet objet atteindrait-il la surface terrestre ? (on néglige tout frottement).
