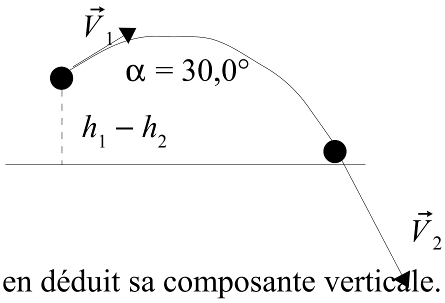
1. masse $m = 0{,}0300$ [kg]. Vitesse initiale : $V_1 = 10{,}0$ [m/s]. Hauteur initiale : $h_1 = 2{,}00$ [m].
angle initial = $\alpha = 30{,}0°$. Vitesse finale : $V_2 = ?$ [m/s]. Vitesse vectorielle finale $\vec{V}_2 = ?$.

a) Par conservation d'énergie mécanique, $\frac{1}{2} \cdot m \cdot V_2^2 + m \cdot g \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_1^2 + m \cdot g \cdot h_1$, donc :



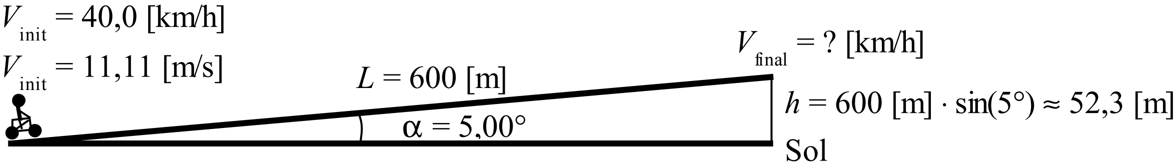
Le carré de la vitesse finale de la bille vaut :
$V_2^2 = V_1^2 + 2 \cdot g \cdot (h_1 - h_2) = 10^2 + 2 \cdot 9{,}81 \cdot 2 = 139{,}2\,[m^2/s^2]$
La masse de la bille n'influence pas le résultat.
Donc la vitesse finale vaut : $\underline{V_2 = 11{,}8\text{ [m/s]}}$.

b) La composante horizontale de la vitesse reste inchangée,
elle vaut : $V_{2x} = V_{1x} = V_1 \cdot \cos(30{,}0°) = 8{,}66\,[m/s]$

c) Connaissant la vitesse finale et sa composante horizontale, on en déduit sa composante verticale.
$V_{2z} = \sqrt{V_2^2 - V_{2x}^2} = \sqrt{11{,}8^2 - 8{,}66^2} = 8{,}02\,[m/s]$. Le signe dépend du choix du sens de l'axe vertical.
Si l'axe x du référentiel est dans la direction (et le sens) horizontal des vitesses, l'axe z vertical, alors
$\vec{V}_2 = \langle 8{,}66\ ;\ 0\ ;\ -8{,}02 \rangle\,[m/s]$.

---

2. Masse du cycliste avec son vélo = $m = 75{,}0$ [kg]. g = 9,81 [m/s^2].
Force motrice = $F_{\text{motrice}} = 75{,}0$ [N]
Force de frottements = $F_{\text{frottements}} = 15{,}0$ [N]
$V_{\text{init}} = 40{,}0$ [km/h]
$V_{\text{init}} = 11{,}11$ [m/s]



a) Le travail de la force motrice sur les 600 mètres est :
$W_{Fmotrice} = 75\,[N] \cdot 600\,[m] \cdot \cos(0°) = 45'000\,[J]$

b) Le travail de la force de frottement sur les 600 mètres est :
$W_{Ffrottements} = 15\,[N] \cdot 600\,[m] \cdot \cos(180°) = -9'000\,[J]$

c) L'énergie cinétique de départ du cycliste avec son vélo est :
$E_{cinétique\ initiale} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_{init}^2 = \frac{1}{2} \cdot 75 \cdot 11{,}11^2 = 4'629\,[J]$

d) On sait que le travail de la force motrice plus celui de la force de frottement égale la variation d'énergie mécanique : $W_{Fmotrice} + W_{Ffrottement} = E_{mec\ finale} - E_{mec\ initiale} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_{finale}^2 + m \cdot g \cdot h - E_{cin\ init}$

Donc $\frac{1}{2} \cdot m \cdot V_{finale}^2 = W_{Fmotrice} + W_{Ffrottement} - m \cdot g \cdot h + E_{cin\ init} =$

$\frac{1}{2} \cdot m \cdot V_{finale}^2 = 45'000 - 9'000 - 75 \cdot 9{,}81 \cdot 600 \cdot \sin(5°) + 4'629 = 2'154\,[J]$

On en déduit la vitesse finale : $V_{finale} = \sqrt{2 \cdot 2'154 / 75} = 7{,}579\,[m/s] = \underline{\underline{27{,}3\,[km/h]}}$

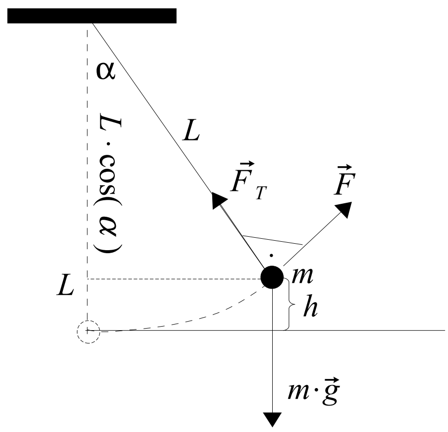
<u>Autre manière :</u> $\vec{F}_{rés} = \vec{F}_{moteur} + \vec{F}_{frot} + \vec{F}_{pesanteur} + \vec{F}_{soutien} = \vec{F}_{moteur} + \vec{F}_{frot} + \vec{F}_{//}$ où $\vec{F}_{//} = \vec{F}_{pesanteur} + \vec{F}_{soutien}$

$F_{rés} = F_{moteur} - F_{frot} - F_{//} = 75\,[N] - 15\,[N] - 75\,[kg] \cdot 9{,}81\,[m/s^2] \cdot \sin(5°) = -4{,}125\,[N]$ $F_{//} = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$

Donc l'accélération $a = F_{\text{rés}} / m = -4{,}125 / 75 = -0{,}0550$ [m/s^2]. Le vélo décélère faiblement.

Par Torricelli : $V_{final}^2 = V_{init}^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta x = 11{,}11^2 - 2 \cdot 0{,}0550 \cdot 600 = 57{,}43\,[m^2/s^2]$

La vitesse au sommet de la pente est : $V_{finale} = \sqrt{57{,}43} = 7{,}578\,[m/s] = \underline{\underline{27{,}3\,[km/h]}}$



3. Masse $m = 2{,}80$ [kg]. $L = 12{,}0$ [m], $\alpha = 35{,}0°$.

a) Pour que le corps reste immobile, il faut exercer une force $F = m \cdot g \cdot \sin(\alpha) = 15{,}8[N]$ tangente à l'arc de cercle.

b) Le travail de la force de tension F_T dans la corde est nulle, car cette force est toujours perpendiculaire au déplacement.

c) Le travail qu'on a dû exercer est le travail de la force motrice, avec vitesses initiale et finale nulle.

On utilise : $W_{F\ motrice} + W_{F\ frottement} = E_{méc\ finale} - E_{méc\ initiale}$.

$E_{méc\ finale} - E_{méc\ initiale} = m \cdot g \cdot h$, car les vitesses sont nulle.

$W_{F\ frottement} = 0[J]$, car il n'y a pas de frottement.

Donc le travail qu'on a dû exercer vaut : $W_{F\ motrice} = m \cdot g \cdot h$.

Reste à déterminer h. $h = L - L \cdot \cos(\alpha) = 12{,}0[m] \cdot (1 - \cos(35{,}00°)) = 2{,}17[m]$

Donc le travail qu'on a dû exercer vaut : $W_{F\ motrice} = m \cdot g \cdot h = 2{,}8 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}17 = 59{,}6[J]$.

d) Lorsqu'on maintient le corps, aucun travail n'est effectué, car aucun déplacement n'est effectué.

e) Dans cette situation, il n'y a aucune force de frottement ni force motrice durant la trajectoire, donc l'énergie mécanique est conservée. La vitesse étant nulle à l'arrivée, on a :

$$m \cdot g \cdot h_{finale} = m \cdot g \cdot h_{initiale} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_{initiale}^2 .$$

Donc $h_{finale} = h_{initiale} + \frac{1}{2 \cdot g} \cdot V_{initiale}^2 = 2{,}17 + \frac{4{,}5^2}{2 \cdot 9{,}81} = 3{,}20[m]$

On a $h_{finale} = L - L \cdot \cos(\alpha_{final})$, donc l'angle maximal vaut : $\alpha_{final} = \arccos\left(\frac{L - h_{finale}}{L}\right) = 42{,}8°$,

soit un peu plus que l'angle initial.

4.

a) Pour que M_1 descende de 3 centimètres, il faut que la corde du côté de la poulie M_3 soit plus courte de 1,5 centimètres de chaque côté de la poulie. Donc M_3 et M_2 montent de 1,5 [cm].

b) $M_1 = 0{,}150$ [kg], $M_3 = 0{,}020$ [kg], $M_2 = ?$

Travail de la force de pesanteur de M_1 : $W_{Fpes\_1} = M_1 \cdot g \cdot h \cdot \cos(0°)$ ($= 0{,}0441$ [J])

Travail de la force de pesanteur de M_2 : $W_{Fpes\_2} = M_2 \cdot g \cdot h/2 \cdot \cos(180°)$

Travail de la force de pesanteur de M_3 : $W_{Fpes\_3} = M_3 \cdot g \cdot h/2 \cdot \cos(180°)$ ($= -0{,}00294$ [J])

Travail total $= M_1 \cdot g \cdot h - M_2 \cdot g \cdot h/2 - M_3 \cdot g \cdot h/2 = 0$ [J].

Donc : $M_1 - M_2/2 - M_3/2 = 0$.

Donc : $M_2 = 2 \cdot M_1 - M_3 = 0{,}300 - 0{,}020 = 0{,}280$ [kg] = 280 grammes = masse de M_2.

c) $M_1 = 150$ [g], $M_3 = 20$ [g], $M_2 = 300$ [g] et $h = 0{,}03$ [m].

M_1 perd de l'énergie potentielle : $\Delta E_{pot\_1} = -M_1 \cdot g \cdot h = -0{,}150 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}030 = -0{,}0441$ [J]

M_2 gagne de l'énergie potentielle : $\Delta E_{pot\_2} = M_2 \cdot g \cdot h/2 = 0{,}300 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}015 = 0{,}0441$ [J]

M_3 gagne de l'énergie potentielle : $\Delta E_{pot\_3} = M_3 \cdot g \cdot h/2 = 0{,}020 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}015 = 0{,}00294$ [J]

Globalement, l'énergie potentielle totale du système augmente de 0,00294 joules.