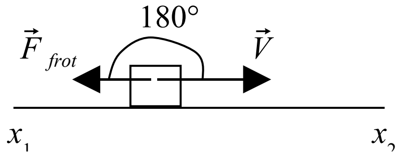
1. masse $m = 0{,}40$ [kg]. Vitesse initiale : $V_1 = 3{,}0$ [m/s]. Position initiale : $x_1 = 0$ [m].
Vitesse finale : $V_2 = 0$ [m/s]. Position finale : $x_2 = 1{,}2$ [m].

a) Par Torricelli, $V_2^2 = V_1^2 + 2 \cdot a \cdot (x_2 - x_1)$, donc:

la décélération du plot en bois vaut : $a = \dfrac{V_2^2 - V_1^2}{2 \cdot (x_2 - x_1)} = \dfrac{0 - 9}{2 \cdot (1{,}2 - 0)} = -3{,}75 \left[\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$

b) La force de frottement égale la force résultante qui vaut : $F_{\text{frot}} = F_{\text{rés}} = m \cdot a = 0{,}4 \cdot (-3{,}75) = -1{,}5\,[\text{N}]$.

c) L'énergie cinétique au départ vaut : $E_{\text{cin}} = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot V_1^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}4 \cdot 3^2 = 1{,}8\,[\text{J}]$.



d) Le travail de la force de frottement sur 1,2 [m] vaut :
$W_{F\_\text{frot}} = |F_{\text{frot}}| \cdot (x_2 - x_1) \cdot \cos(180°) = 1{,}5 \cdot 1{,}2 \cdot (-1) = -1{,}8\,[\text{J}]$

e) La variation d'énergie cinétique sur ces 1,2 mètres égale le travail de la force de frottement sur cette distance.
Elle vaut $-1{,}8$ [J]. Cela se déduit de c) tout comme de d).

2. masse $m = 0{,}40$ [kg]. Vitesse initiale : $V_1 = 3{,}0$ [m/s]. Position initiale : $x_1 = 0$ [m].
Vitesse intermédiaire : $V_2 = ?$ [m/s]. Position intermédiaire : $x_2 = 0{,}40$ [m].
Vitesse finale : $V_3 = 0$ [m/s]. Position finale : $x_3 = 1{,}2$ [m].

a) Sur les 0,40 premiers mètres, $F_{\text{frot}} = -2{,}0$ [N]. Le signe "–" indique que le sens de la force est opposé au sens de déplacement.
Puisque $F_{\text{rés}} = F_{\text{frot}}$, on sait que
$a = F_{\text{rés}} / m = -2{,}0 / 0{,}40 = -5$ [m/s²].
Par Torricelli, $V_2^2 = V_1^2 + 2 \cdot a \cdot (x_2 - x_1)$, donc:

La vitesse après 0,4 [m] vaut : $V_2 = \sqrt{V_1^2 + 2 \cdot a \cdot (x_2 - x_1)} = \sqrt{3^2 + 2 \cdot (-5) \cdot 0{,}4} = \sqrt{5} = 2{,}24 \left[\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right]$

b) Sur les 0,80 derniers mètres, $F_{\text{frot}} = -1{,}25$ [N]. Puisque $F_{\text{rés}} = F_{\text{frot}}$, on sait que
$\tilde{a} = F_{\text{rés}} / m = -1{,}25 / 0{,}40 = -3{,}125$ [m/s²]. L'accélération a changé.
Par Torricelli, $V_3^2 = V_2^2 + 2 \cdot \tilde{a} \cdot (x_3 - x_2)$, donc:

La vitesse après 1,2 [m] vaut : $V_3 = \sqrt{V_2^2 + 2 \cdot \tilde{a} \cdot (x_3 - x_2)} = \sqrt{5 + 2 \cdot (-3{,}125) \cdot 0{,}8} = 0 \left[\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right]$

c) Le travail de la force de frottement sur les premiers 0,4 [m] vaut :
$W_{F\_\text{frot\_A}} = |F_{\text{frot\_A}}| \cdot (x_2 - x_1) \cdot \cos(180°) = 2{,}0 \cdot 0{,}4 \cdot (-1) = -0{,}8\,[\text{J}]$

d) Le travail de la force de frottement sur les derniers 0,8 [m] vaut :
$W_{F\_\text{frot\_B}} = |F_{\text{frot\_B}}| \cdot (x_3 - x_2) \cdot \cos(180°) = 1{,}25 \cdot 0{,}8 \cdot (-1) = -1{,}0\,[\text{J}]$

e) Le travail total de la force de frottement sur ces 1,2 mètres est de $-1{,}8$ [J] !

f) La variation d'énergie cinétique sur ces 1,2 mètres égale le travail de la force de frottement sur cette distance. Elle vaut $-1{,}8$ [J], soit l'opposé de l'énergie cinétique au départ :
$E_{\text{cin\_initiale}} = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot V_1^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}4 \cdot 3^2 = 1{,}8\,[\text{J}]$. $E_{\text{cin\_finale}} = 0\,[\text{J}]$, car $V_{\text{finale}} = V_3 = 0\,[\text{m/s}]$

3. masse $m = 0{,}30$ [kg]. Vitesse initiale : $V_1 = 0$ [m/s]. Position initiale : $x_1 = 0$ [m].
Vitesse finale : $V_2 = 5{,}0$ [m/s]. Position finale : $x_2 = ?$ [m].

L'énergie cinétique au départ vaut : $E_{cin\_1} = 0\,[J]$.

L'énergie cinétique à l'arrivée vaut : $E_{cin\_2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}3 \cdot 5^2 = \underline{\underline{3{,}75\,[J]}}$.

On sait que le travail de la force résultante égale la variation d'énergie cinétique.

$F_{rés} \cdot (x_2 - x_1) \cdot \cos(0°) = E_{cin\_2} - E_{cin\_1} \;\Rightarrow\; F_{rés} \cdot x_2 = E_{cin\_2} \;\Rightarrow\; x_2 = E_{cin\_2} / F_{rés}$

On sait que la force résultante vaut : $F_{rés} = m \cdot g - F_{frot} = 0{,}30 \cdot 9{,}81 - F_{frot} = 2{,}94\,[N] - F_{frot}$

a) $F_{frot} = 0\,[N] \Rightarrow F_{rés} = 2{,}94\,[N] \Rightarrow x_2 = E_{cin\_2} / F_{rés} = 3{,}75/2{,}94 = 1{,}28\,[m]$ = hauteur de chute.

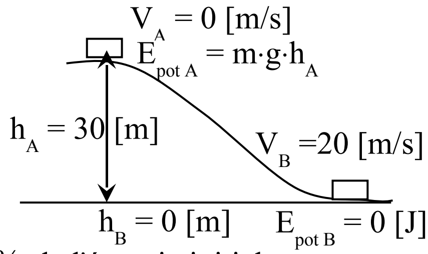
b) $F_{frot} = 0{,}90\,[N] \Rightarrow F_{rés} = 2{,}04\,[N] \Rightarrow x_2 = E_{cin\_2} / F_{rés} = 3{,}75/2{,}04 = 1{,}84\,[m]$ = hauteur de chute.

c) $F_{frot} = 2{,}90\,[N] \Rightarrow F_{rés} = 0{,}04\,[N] \Rightarrow x_2 = E_{cin\_2} / F_{rés} = 3{,}75/0{,}04 = 93{,}8\,[m]$ = hauteur de chute.

4. Comparons l'énergie mécanique du traîneau au sommet (A) et au bas (B) de la colline :

En haut de la colline : $E_{cin\,A} = ½\, m\, V_A^2 = 0$ [J], $E_{pot\,A} = m\, g\, h_A = 11'772$ [J] $\Big\}\; E_{méc\,A} = E_{cin\,A} + E_{pot\,A} = 11'772$[J]

En bas de la colline : $E_{cin\,B} = ½\, m\, V_B^2 = 8'000$ [J], $E_{pot\,B} = m\, g\, h_B = 0$ [J] $\Big\}\; E_{méc\,B} = E_{cin\,B} + E_{pot\,B} = 8'000$[J]



$W_{moteur} + W_{frottement} = E_{méc\,B} - E_{méc\,A} = 8'000\,[J] - 11'772\,[J] = -3'772\,[J]$

Puisqu'il n'y a pas de force motrice ($W_{moteur} = 0$ [J]), cette diminution d'énergie mécanique est entièrement due à la force de frottement. Elle transforme une partie de l'énergie mécanique en chaleur !

La fraction d'énergie dissipée par le frottement vaut : $\frac{3'772}{11'772} = 0{,}32 = 32\%$ de l'énergie initiale.

5. Par Thalès, dy_1 et dy_2 sont reliés par : $\frac{dy_1}{\ell_1} = \frac{dy_2}{\ell_2}$, donc $dy_2 = \frac{\ell_2}{\ell_1} \cdot dy_1$.

Le travail fournit par $\vec{F_1}$ vaut : $W_{F\_1} = F_1 \cdot dy_1$ (Le cosinus de l'angle vaut 0°).

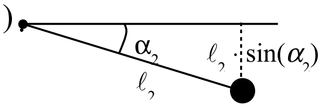
Le travail fournit par $\vec{F_2}$ vaut : $W_{F\_2} = F_2 \cdot dy_2 = F_2 \cdot \frac{\ell_2}{\ell_1} \cdot dy_1$ (Le cosinus de l'angle vaut 0°).

Si ces deux travaux sont les mêmes, alors $F_1 \cdot dy_1 = F_2 \cdot \frac{\ell_2}{\ell_1} \cdot dy_1$.

On en déduit que $F_1 \cdot \ell_1 = F_2 \cdot \ell_2$. On peut en conclure que cette grandeur est importante.

(20° = 180° – 160°)

6. Energie potentielle de m_1 : $E_{pot\_1} = -g \cdot m_1 \cdot \ell_1 \cdot \sin(\alpha_1) = -g \cdot m_1 \cdot \ell_1 \cdot \sin(20° - \alpha_2)$



Energie potentielle de m_2 : $E_{pot\_2} = -g \cdot m_2 \cdot \ell_2 \cdot \sin(\alpha_2)$.

Si l'une de ces énergies diminue, l'autre augmente ! car $m_1 \cdot \ell_1 = m_2 \cdot \ell_2$

$E_{pot\_totale} = -g \cdot m_1 \cdot \ell_1 \cdot \sin(20° - \alpha_2) - g \cdot m_2 \cdot \ell_2 \cdot \sin(\alpha_2) = -g \cdot m_1 \cdot \ell_1 \cdot \left(\sin(20° - \alpha_2) + \sin(\alpha_2)\right)$

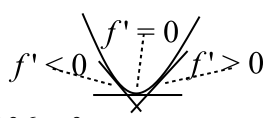
Elle est minimale lorsque $\frac{E_{pot\_totale}}{g \cdot m_1 \cdot \ell_1} \underbrace{=}_{\text{définition}} f(\alpha_2) = -\sin(20° - \alpha_2) - \sin(\alpha_2)$ est minimale.

On peut vérifier numériquement et graphiquement que le minimum se trouve en $\alpha_1 = \alpha_2 = 10°$.

On peut aussi vérifier que la dérivée de f s'annule en $\alpha_2 = 10°$.

$f'(\alpha_2) = \cos(20° - \alpha_2) - \cos(\alpha_2)$

$f'(10°) = \cos(20° - 10°) - \cos(10°) = 0$.



$f'(9°) = \cos(20° - 9°) - \cos(9°) = -0{,}006 < 0$. $f'(11°) = \cos(20° - 11°) - \cos(11°) = 0{,}006 > 0$.

Donc, $\alpha_1 = \alpha_2 = 10°$ correspond bien à un minimum d'énergie potentielle.