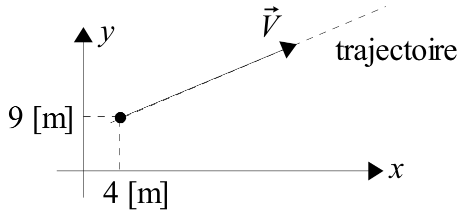
1.



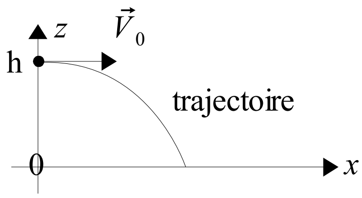
a) Dessin.

b) L'intensité de la vitesse est :
$\|\vec{V}\|=\sqrt{V_x^2+V_y^2+V_z^2}=\sqrt{12^2+5^2+0^2}=13[m/s]$

c) $x(t)=12[m/s]\cdot t$; $y(t)=5[m/s]\cdot t$; $z(t)=0[m]$.

d) $y=\frac{5}{12}\cdot x$; $z=0[m]$ est l'équation cartésienne de la trajectoire.

2.a Dessin.



b) $x(t)=V_x\cdot t$; $y(t)=0[m]$; $z(t)=h-0,5\cdot g\cdot t^2$.

c) $t=\frac{x}{V_x}$, donc

$z=h-0,5\cdot g\cdot\left(\frac{x}{V_x}\right)^2$ et $y=0[m]$ est l'équation cartésienne de la trajectoire.

d) La vitesse de l'objet en fonction du temps est : $\vec{V}(t)=\langle V_x\ ;\ 0\ ;\ -g\cdot t\rangle$.

e) L'objet touche le sol lorsque : $z(t)=h-0,5\cdot g\cdot t^2=0[m]$, donc $t=\sqrt{\frac{h}{0,5\cdot g}}$.

Le mouvement horizontal ne change pas cette valeur.

f) L'objet touche le sol à la vitesse $\vec{V}(t)=\langle V_x\ ;\ 0\ ;\ -\sqrt{2\cdot g\cdot h}\rangle$. (On retrouve Torricelli)
Son intensité vaut : $\|\vec{V}(t)\|=\sqrt{V_x^2+g^2\cdot t^2}=\sqrt{V_x^2+2\cdot g\cdot h}$

3.a Les deux points matériels entre en collision $\Leftrightarrow$ $\vec{r}_1(t)=\vec{r}_2(t)$.
Donc il faut que $a\cdot t=c$, $t=c/a$.
A cet instant, $\vec{r}_1(c/a)=\langle a\cdot c/a\ ;\ a\cdot c/a+b\cdot c^2/a^2\ ;\ 0\rangle=\langle c\ ;\ c+b\cdot c^2/a^2\ ;\ 0\rangle=\vec{r}_2(c/a)$.
Ils rentrent bien en collision à l'instant : $t=c/a$.

b) Pour a = 10 [m/s] ; b = –5,0 [m/s] et c = 30 [m], l'instant de la collision est : t = 3,0 [s].
Sa position est : $\vec{r}_1(3,0[s])=\langle 30\ ;\ -15\ ;\ 0\rangle[m]$

4.a Au temps t = 0 [s], $\vec{V}_0=\langle V_0\cdot\cos(\alpha)\ ;\ 0\ ;\ V_0\cdot\sin(\alpha)\rangle$.
L'équation paramétrique du mouvement est : $\vec{r}(t)=\langle V_0\cdot\cos(\alpha)\cdot t\ ;\ 0\ ;\ V_0\cdot\sin(\alpha)\cdot t-0,5\cdot g\cdot t^2\rangle$

b) On a : $t=\frac{x}{V_0\cdot\cos(\alpha)}$, donc l'équation cartésienne de la trajectoire est :

$y=0[m];\ z=\tan(\alpha)\cdot x-\frac{g}{2\cdot V_0^2\cdot\cos^2(\alpha)}\cdot x^2$.

c) $\vec{V}(t)=\langle V_0\cdot\cos(\alpha)\ ;\ 0\ ;\ V_0\cdot\sin(\alpha)-g\cdot t\rangle$.

Le sommet est atteint lorsque : $V_0\cdot\sin(\alpha)-g\cdot t=0$, donc lorsque : $t=\frac{V_0\cdot\sin(\alpha)}{g}$.

Les coordonnées du sommet sont : $\vec{r}\left(\frac{V_0\cdot\sin(\alpha)}{g}\right)=\left\langle\frac{V_0^2\cdot\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)}{g}\ ;\ 0\ ;\ \frac{V_0^2\cdot\sin^2(\alpha)}{2\cdot g}\right\rangle$

d) On peut aussi écrire : $\vec{r}\left(\frac{V_0\cdot\sin(\alpha)}{g}\right)=\left\langle\frac{V_0^2\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{2\cdot g}\ ;\ 0\ ;\ \frac{V_0^2\cdot\sin^2(\alpha)}{2\cdot g}\right\rangle$

La portée du tire est : $X_P=\frac{V_0^2\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{g}$. C'est le double du r_x précédent.

e) La portée est maximale lorsque $\sin(2\cdot\alpha)=1$, c'est-à-dire lorsque α = 45°.
Dans ce cas, la portée est : $x_P=V_0^2/g$.

5. L'équation du mouvement du projectile est :

$\vec{r}_P(t)=\langle V_0\cdot\cos(\alpha)\cdot t\ ;\ 0\ ;\ V_0\cdot\sin(\alpha)\cdot t-0,5\cdot g\cdot t^2\rangle$

L'équation du mouvement de la cible est : $\vec{r}_C(t)=\langle d\ ;\ 0\ ;\ H-0,5\cdot g\cdot t^2\rangle$.

Pour avoir collision, il faut que :

$$\begin{cases} V_0\cdot\cos(\alpha)\cdot t=d \\ V_0\cdot\sin(\alpha)\cdot t-0,5\cdot g\cdot t^2=H-0,5\cdot g\cdot t^2 \end{cases}.$$

Après simplifications : $\begin{cases} V_0\cdot\cos(\alpha)\cdot t=d \\ V_0\cdot\sin(\alpha)\cdot t=H \end{cases}.$

Donc $\dfrac{H}{d}=\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

Pour que le projectile touche la cible, il faut que $H=d\cdot\tan(\alpha)$, indépendamment de V_0..
Autrement dit, il faut que la cible soit dans la direction de la vitesse initiale du projectile.

---

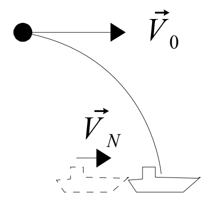
6. L'équation du mouvement du projectile est : $\vec{r}_P(t)=\langle V_0\cdot t\ ;\ 0\ ;\ H-0,5\cdot g\cdot t^2\rangle$.

$V_0=200[km/h]=55,56[m/s]$, $H=1'000[m]$, $g=9,81[m/s^2]$.

L'équation du mouvement du navire est : $\vec{r}_N(t)=\langle d+V_N\cdot t\ ;\ 0\ ;\ 0\rangle$.

$V_N=20[km/h]=5,556[m/s]$,

d = ? = distance entre l'avion et le navire au moment où le projectile est lancé.
On a collision lorsque :



$$\begin{cases} V_0\cdot t=d+V_N\cdot t \\ H-0,5\cdot g\cdot t^2=0 \end{cases}.$$

Donc $t=\sqrt{\dfrac{2\cdot H}{g}}=\sqrt{\dfrac{2'000}{9,81}}=14,29[s]$ et

$$d=V_0\cdot t-V_N\cdot t=(V_0-V_N)\cdot\sqrt{\frac{2\cdot H}{g}}=50[m/s]\cdot 14,29[s]=714[m] .$$

La distance horizontale doit être de 714 mètres.

---

7. $\vec{r}(t)=\langle b\cdot t\ ;\ c+d\cdot t^2\ ;\ 0\rangle$, $t=x/b$. b = 2,0 [m/s], c = 1,0 [m] et d = 1,0 [m/s²].

a) L'équation cartésienne est : $y=c+d\cdot x^2/b^2$, z = 0 [m].

b) $\vec{V}(t)=\langle b\ ;\ 2\cdot d\cdot t\ ;\ 0\rangle$, $\|\vec{V}(t)\|=\sqrt{b^2+4\cdot d^2\cdot t^2}=\sqrt{4+4\cdot t^2}=2\cdot\sqrt{1+t^2}$ unités : mksa.

c) $\vec{a}(t)=\langle 0\ ;\ 2\cdot d\ ;\ 0\rangle$, $\|\vec{a}(t)\|=2\cdot d=2[m/s^2]$. L'accélération est constante !

d) L'accélération tangentielle est la dérivée de la norme de la vitesse par rapport au temps.

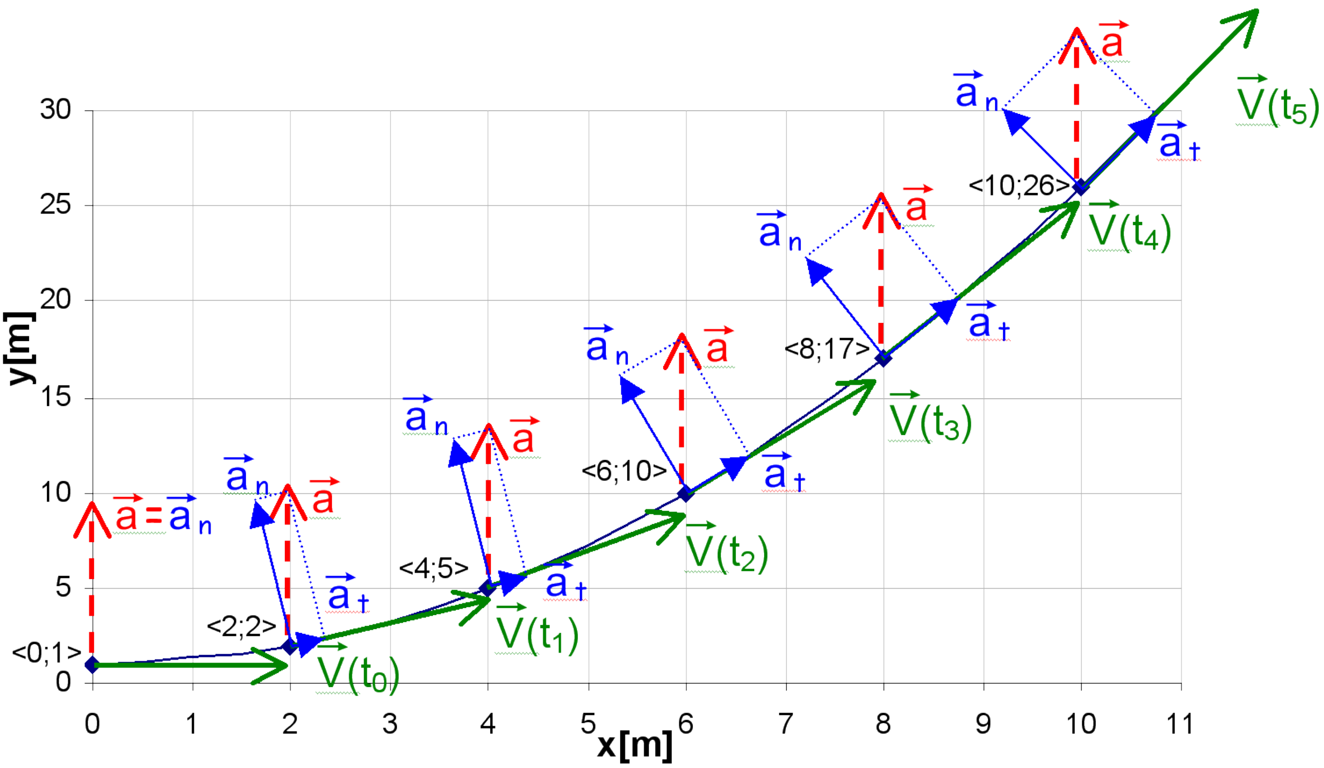
$$a_t(t)=\frac{d\|\vec{V}(t)\|}{dt}=\frac{d\sqrt{b^2+4\cdot d^2\cdot t^2}}{dt}=\frac{4\cdot d^2\cdot t}{\sqrt{b^2+4\cdot d^2\cdot t^2}}=\frac{2\cdot t}{\sqrt{1+t^2}} .$$

L'accélération normale vaut : $a_n(t)=\sqrt{a^2-a_t(t)^2}=\sqrt{4-\dfrac{4\cdot t^2}{1+t^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+t^2}}$.

e) Le rayon de courbure en fonction du temps est donc :

$$\rho(t)=\frac{\|\vec{V}(t)\|^2}{a_n(t)} ,\quad \rho(t)=2\cdot(1+t^2)^{3/2}$$

7. suite.



---

8. $\vec{r}(t) = \langle A_x \cdot \cos(\omega \cdot t)\ ;\ A_y \cdot \sin(\omega \cdot t)\ ;\ 0 \rangle$.

a) L'équation cartésienne est : $\dfrac{x^2}{A_x^2} + \dfrac{y^2}{A_y^2} = 1$, $z = 0$ [m]. C'est l'équation d'une ellipse.

Lorsque $A_x = A_y = A$, l'équation de la trajectoire est : $x^2 + y^2 = A^2$.
C'est l'équation d'un cercle centré à l'origine, de rayon A.

b) $\vec{V}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} = \langle -A_x \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)\ ;\ A_y \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)\ ;\ 0 \rangle$, $\|\vec{V}(t)\| = A \cdot \omega$ = constante.

c) $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{V}(t)}{dt} = \langle -A_x \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)\ ;\ -A_y \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)\ ;\ 0 \rangle$, $\vec{a}(t) = -\omega^2 \cdot \vec{r}(t)$

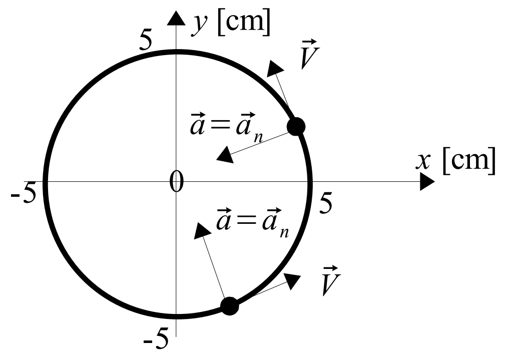
Le vecteur accélération est toujours proportionnelle au vecteur position, de sens opposé.
$\|\vec{a}(t)\| = A \cdot \omega^2$ = constante.

d) L'accélération tangentielle est la dérivée de la norme de la vitesse par rapport au temps.
Elle est nulle, car la norme de la vitesse est constante. $a_t(t) = 0\,[m/s^2]$.

L'accélération normale vaut : $a_n(t) = \dfrac{\|\vec{V}(t)\|^2}{A} = A \cdot \omega^2$ = la norme de l'accélération.

e) Le rayon de courbure en fonction du temps est donc : $\rho(t) = \dfrac{\|\vec{V}(t)\|^2}{a_n(t)}$, $\rho(t) = A$ = constante.

f, g)



9. Distance Terre-Lune : $d = 3{,}844 \cdot 10^8$ [m].
Période de révolution : $T = 27$ jours 7 h 43 min 11,5 [s] $= 2{,}3605915 \cdot 10^6$ [s].
Vitesse moyenne = $\frac{2 \cdot \pi \cdot d}{T} = 1'023\,[m/s]$.

Accélération moyenne : $a = a_n = \frac{V^2}{d} = 0{,}00272\,[m/s^2]$

10. Distance Terre-Soleil : $d = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ [m].
Période de révolution : $T = 356{,}256\,360\,42$ jours $= 3{,}1558 \cdot 10^7$ [s].
Vitesse moyenne = $\frac{2 \cdot \pi \cdot d}{T} = 29'785\,[m/s]$.

Accélération moyenne : $a = a_n = \frac{V^2}{d} = 0{,}00593\,[m/s^2]$