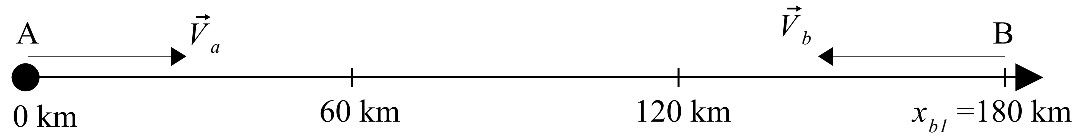
1.



Les deux voitures partent en même temps, appelons l'instant du départ $t_1 = 0$ [s].
La position de départ de la première voiture = $x_{a1} = 0$ [km]
La position de départ de la deuxième voiture = $x_{b1} = 180$ [km]
Notons t_2 l'instant de croisement des deux voitures.
La position du croisement des deux voitures est la même. Appelons-la x_2.
On cherche les valeurs de $\boldsymbol{t_2}$ et de $\boldsymbol{x_2}$.

Ecrivons les équations horaires des deux voitures.
Voiture 1 : $\boldsymbol{x_2} = V_a \cdot \boldsymbol{t_2}$
Voiture 2 : $\boldsymbol{x_2} = x_{b1} - V_b \cdot \boldsymbol{t_2}$

On en déduit : $V_a \cdot \boldsymbol{t_2} = x_{b1} - V_b \cdot \boldsymbol{t_2}$
Résolvons cette équation à une inconnue : $\boldsymbol{t_2}$.
$(V_a + V_b) \cdot \boldsymbol{t_2} = x_{b1}$

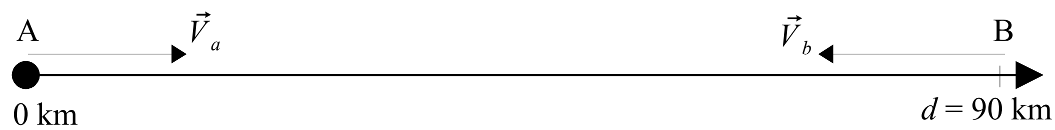
L'instant du croisement est : $\boldsymbol{t_2} = \dfrac{x_{b1}}{V_a + V_b}$ et donc la position est : $\boldsymbol{x_2} = \dfrac{V_a}{V_a + V_b} \cdot x_{b1}$

<u>Application numérique :</u>
$x_{b1} = 180$ [km] ; $V_a = 60$ [km/h] et $V_b = 90$ [km/h].

L'instant du croisement est : $\boldsymbol{t_2} = \dfrac{180[km]}{60+90[km/h]}$ = 1,2 heures = 1 heure et 12 minutes.

La position de croisement est : $\boldsymbol{x_2} = \dfrac{60}{60+90} \cdot 180[km]$ = 72 [km].

2.



Les deux trains partent en même temps, appelons l'instant du départ $t_1 = 0$ [s].
V_A = vitesse du train partant de A = ?
V_B = vitesse du train partant de B = ?
d = 90 [km] = distance entre les gares A et B.
$t_0 = 0$ [s]
t_1 = 18 minutes = instant du croisement.
t_2 = instant de l'arrivée en gare B du train venant de A.
60 [km] = 90 [km] – 30 [km] = distance parcourue par le train B entre t_0 et t_2.

Ecrivons le système de 3 équations à 3 inconnues : $\boldsymbol{V_a}$, $\boldsymbol{V_b}$ et $\boldsymbol{t_2}$.
1 : $\boldsymbol{V_a} \cdot t_1 + \boldsymbol{V_b} \cdot t_1 = d = 90[km]$
2 : $\boldsymbol{V_a} \cdot \boldsymbol{t_2} + \qquad = d = 90[km]$
3 : $\qquad \boldsymbol{V_b} \cdot \boldsymbol{t_2} = 60[km]$
Donc :
$(\boldsymbol{V_a} + \boldsymbol{V_b}) \cdot 18[\text{minutes}] = 90[km]$
$(\boldsymbol{V_a} + \boldsymbol{V_b}) \cdot \boldsymbol{t_2} \qquad = 60 + 90 = 150[km]$

2. suite

Par division des deux équation : $\dfrac{t_2}{18\text{ minutes}} = \dfrac{150[km]}{90[km]}$

En conséquence, le train venant de A arrive en gare B après $t_2 = \dfrac{150}{90} \cdot 18\text{ minutes}$ = 30 minutes.

Vitesse du train venant de A : $V_a = \dfrac{90[km]}{30\text{ minutes}} = 180\left[\dfrac{km}{h}\right]$

Vitesse du train venant de B : $V_b = \dfrac{60[km]}{30\text{ minutes}} = 120\left[\dfrac{km}{h}\right]$

Les trains se croisent à $180[km/h] \cdot \dfrac{18}{60}$ heures = 54 [km] de la gare A.

---

3. Notons : h = la hauteur de chute, t_1 = le temps de chute, t_2 = le temps de retour du son.

La hauteur de chute est de : $h = \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2$ (équ. 1)

Elle est égale à la distance parcourue par le son après l'impact : $h = V_{son} \cdot t_2$ (équ. 2)

L'énoncé nous dit que le temps total vaut 2,5 [s] donc $t_1 + t_2 = 2,5[s]$ (équ. 3).

Donc : $\dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = V_{son} \cdot t_2$ et $t_2 = 2,5[s] - t_1$, donc $\dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = V_{son} \cdot (2,5[s] - t_1)$.

Cela donne l'équation du second degré en t_1 : $9,81 \cdot t_1^2 = 2 \cdot 343 \cdot 2,5 - 2 \cdot 343 \cdot t_1$, t_1 en [s].

$9,81 \cdot t_1^2 + 686 \cdot t_1 - 1715 = 0$, équation du second degré en t_1 .

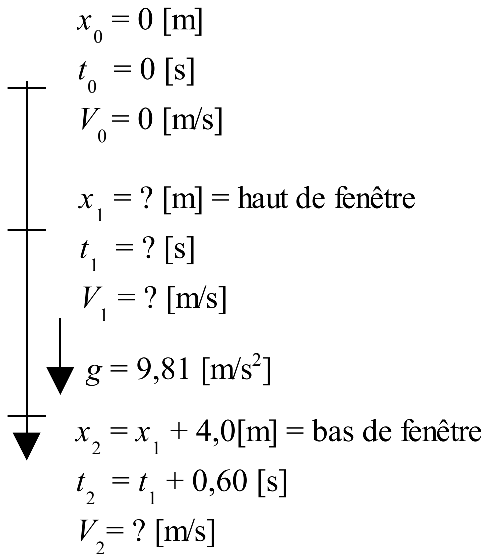
$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 686^2 - 4 \cdot 9,81 \cdot (-1715) = 537'893$. $t_1 = \dfrac{-686 + \sqrt{537'893}}{2 \cdot 9,81} = 2,42[s]$

Donc la hauteur de chute est de : $\boxed{h = \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = 28,7[m]}$.

Si on avait pris une vitesse du son infinie, on aurait obtenu : $h = \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot 2,5^2 = 30,7[m]$.

---

4. $x(t) = \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ Unités : MKSA.



$V(t) = g \cdot t$

On sait que :

$x_1 = 0,5 \cdot g \cdot t_1^2$

$x_2 = 0,5 \cdot g \cdot t_2^2 \;=\; 0,5 \cdot g \cdot (t_1 + 0,6[s])^2$

Différence : $x_2 - x_1 = 4,0[m] = 0,5 \cdot g \cdot (t_1 + 0,6)^2 - 0,5 \cdot g \cdot t_1^2$

Après développement et simplification :

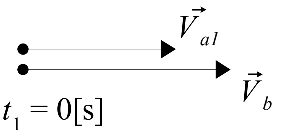
$4,0[m] = 0,5 \cdot g \cdot (1,2 \cdot t_1 + 0,36)$

On en déduit que $t_1 = 0,380[s]$ et $t_2 = 0,980[s]$

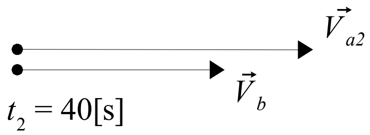
Donc $x_1 = 0,5 \cdot g \cdot 0,380^2 = 0,708[m]$.

Donc l'objet est parti à 0,708 mètres au-dessus du haut de la fenêtre.

5.



$t_1 = 0[s]$



$t_2 = 40[s]$

$V_{a1} = 88[km/h] = 24,44[m/s]$ = vitesse de la voiture A au premier dépassement.

V_b = ? = vitesse de la voiture B.

a = ? = accélération de la voiture B.

$\Delta t = t_2 - t_1 = 40[s]$ = temps mis par la voiture A pour rattraper la voiture B.

$V_{a2} = 124[km/h] = 34,44[m/s]$ = vitesse de la voiture A au deuxième dépassement.

Vitesse de la voiture A en fonction du temps : $V(t) = V_{a1} + a \cdot t$

L'accélération de la voiture A est : $a = \dfrac{V_{a2} - V_{a1}}{t_2 - t_1} = \dfrac{10[m/s]}{40[s]} = 0,25[m/s^2]$

La distance parcourue par les deux voitures entre les deux dépassements est :

$d = V_{a1} \cdot t_2 + 0,5 \cdot g \cdot t_2^2 = 24,44[m/s] \cdot 40[s] + 0,5 \cdot 0,25[m/s^2] \cdot (40[s])^2 = 1177[m]$

La vitesse de la voiture B est :

$V_b = \dfrac{d}{t_2} = \dfrac{1177[m]}{40[s]} = 29,4[m/s] = 106[km/h]$.

---

6. Partons de : $x(t) = x_0 + V_0 \cdot t + \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ que l'on multiplie par $2 \cdot a$ des deux côtés de l'égalité.

$2 \cdot a \cdot (x(t) - x_0) = 2 \cdot V_0 \cdot a \cdot t + a^2 \cdot t^2$

De $V(t) = V_0 + a \cdot t$ on déduit que : $a \cdot t = V(t) - V_0$, que l'on substitue dans l'équation ci-dessus.

$2 \cdot a \cdot (x(t) - x_0) = 2 \cdot V_0 \cdot (V(t) - V_0) + (V(t) - V_0)^2$

Développons : $2 \cdot a \cdot (x(t) - x_0) = 2 \cdot V_0 \cdot V(t) - 2 \cdot V_0^2 + V^2(t) - 2 \cdot V_0 \cdot V(t) + V_0^2$

Après simplification, on obtient la formule de Torricell : $V^2(t) = V_0^2 + 2 \cdot a \cdot (x(t) - x_0)$

---

7. Avec la formule de Torricelli, la résolution du problème est simple :

L'accélération du cycliste est : $a = \dfrac{V^2(t) - V_0^2}{2 \cdot (x(t) - x_0)} = \dfrac{7,611^2 - 8,333^2[m^2/s^2]}{2 \cdot 20[m]} = -0,288[m/s^2]$.

En réalité c'est une décélération, c'est la raison du signe négatif.

Après avoir cessé de pédaler, il s'arrêtera après :

$x(t) - x_0 = \dfrac{V^2(t) - V_0^2}{2 \cdot a} = \dfrac{0^2 - 8,333^2[m^2/s^2]}{2 \cdot (-0,288[m/s^2])} = 121[m]$

$x(t)$ n'est pas le même que dans la première partie.