Loi des aires

Buts de l'expérience

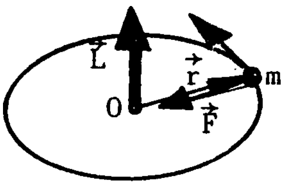
Le but de l'expérience est la vérification de la LOI des AIRES dans le cas d'un mouvement pendulaire elliptique.

Matériel à disposition

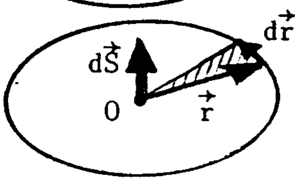
Pendule simple ; dispositif producteur d'étincelles consécutives à des décharges électriques ; papier thermosensible ; chronomètre ; instruments de géométrie ; balance.

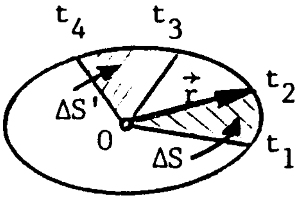
Eléments de théorie

Si un point matériel de masse m, en mouvement, est soumis à une force $\vec{F}$ dont le support passe constamment par le même point fixe O, son moment $\vec{M}$ relatif à O, s'annule et le moment cinétique $\vec{L}$, relatif au même point O, reste constant.
Cela a pour conséquence que le vecteur rayon $\vec{r}$, qui repère le point matériel par rapport à O, balaie des **aires égales pendant des intervalles de temps égaux**.



Si $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$, alors $\Delta S = \Delta S'$.





$$\vec{L} = \overrightarrow{constante} \Rightarrow \frac{d\vec{S}}{dt} = \overrightarrow{constante}$$

donc $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \text{constante}$

Dans le cas de notre expérience, le corps en mouvement est attaché à l'extrémité d'un long fil de masse négligeable. L'ensemble constitue ainsi un pendule simple.
On peut montrer que, pour des oscillations de faible amplitude, le corps attaché au fil du pendule effectue un mouvement selon une trajectoire plane qui, dans le cas le plus général, est une **ellipse**.
En effet, la force résultante sur m peut s'écrire $\vec{F}_{rés} = -C \cdot \vec{r}$ (où C est une constante) et l'horaire le plus général du mouvement de m, exprimé dans un système d'axes cartésiens centré au point O et situé dans le plan de la trajectoire, est donné par :

$$\vec{r}(t) = \langle A \cdot \sin(\omega \cdot t + \Phi_1) ; B \cdot \sin(\omega \cdot t + \Phi_2) \rangle \quad A, B, \Phi_1, \Phi_2 \text{ sont des constantes.}$$

C'est l'horaire d'un mouvement elliptique.
Dans le cas où : $\Phi_1 - \Phi_2$ est un multiple de π, la trajectoire est rectiligne.
Dans le cas où : $\Phi_1 - \Phi_2 + \pi/2$ est un multiple de π, la trajectoire est un cercle.

Pour la commodité des calculs demandés lors de l'expérience, nous choisirons un système d'axes cartésiens selon les axes de symétrie de l'ellipse et la position $\vec{r}_0 = \vec{r}(t = 0\,[s])$ à l'extrémité du grand axe. On peut écrire alors l'horaire :

$\vec{r}(t) = \langle a \cdot \cos(\omega \cdot t) ; b \cdot \sin(\omega \cdot t) \rangle$, $2 \cdot a$ = la longueur du grand axe, $2 \cdot b$ = la longueur du petit axe.

d'où l'on peut tirer, avec une relative aisance, la vitesse maximum et la vitesse minimum de m :

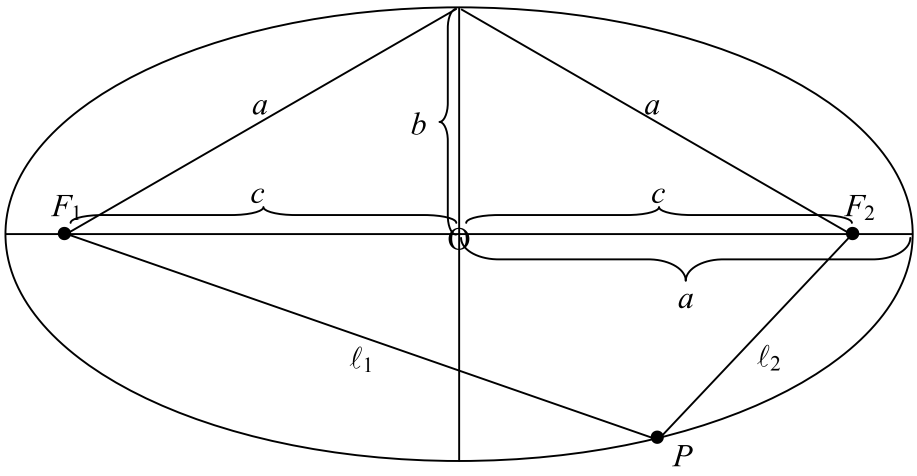
$$\|\vec{V}_{\max}\| = \frac{2\pi}{T} \cdot a \quad \text{et} \quad \|\vec{V}_{\min}\| = \frac{2\pi}{T} \cdot b$$

ainsi que la valeur constante du moment cinétique de m : $\|\vec{L}\| = \dfrac{2\pi \cdot m \cdot a \cdot b}{T}$

suite au verso...

Manipulations

- Mesurez la masse M_{pendule} du pendule.
- Mesurez la période T du pendule à partir de la durée Δt de N oscillations complètes de faible amplitude ($T = \Delta t / N$).
- Enclenchez le circuit électrique. Procédez à quelques essais de production d'étincelles en réglant convenablement la vitesse de rotation du moteur (les étincelles ne sont produites que si l'on maintient fermé l'interrupteur de type Morse).
- Après avoir réglé la fréquence de production des étincelles à une valeur constante judicieuse, placez et fixez une feuille de papier thermosensible sur la plaque métallique horizontale. Immobilisez le pendule, puis actionnez l'interrupteur; sur la feuille de papier est ainsi marquée l'origine O, centre de la future ellipse. Il s'agit maintenant de communiquer au pendule un mouvement elliptique. Ecartez le pendule de sa position d'équilibre, donnez-lui une impulsion latérale de telle sorte que le rapport a / b des longueurs des axes de l'ellipse soit de l'ordre de 2 à 3 et actionnez l'interrupteur pendant une durée <u>d'une</u> période. La trajectoire de l'extrémité du pendule, pendant un tour, est jalonnée de points régulièrement séparés dans le temps.
- Déterminez l'intervalle de temps entre deux points de l'ellipse.
- Passons à la géométrie:
  Tracez la trajectoire, déterminez les positions des extrémités de ses axes de symétrie et tracez ces axes ainsi que les foyers de l'ellipse. En vous rappelant qu'une ellipse est le lieu géométrique des points tels que la somme de leurs distances aux deux foyers est constante, vérifiez que la trajectoire étudiée est bien une ellipse en évaluant cette somme de distances pour cinq points au moins de la courbe.
  Vérifiez la **loi des airs** pour cinq couples de points au moins, séparés par des intervalles de temps de même valeur.
  Evaluez la vitesse maximum, la vitesse minimum et le moment cinétique du pendule, de deux manières différentes et comparez.



a = la longueur du demi-grand axe.
b = la longueur du demi-petit axe.
c = la distance entre les foyers et l'origine O placé au centre de l'ellipse.
a, b et c forment un triangle rectangle, donc $a^2 = b^2 + c^2$.
F_1 et F_2 sont les deux foyers.

Si P est un point quelconque de l'ellipse et
ℓ_1 = la distance de F_1 à P et
ℓ_2 = la distance de F_2 à P,
alors $\boxed{\ell_1 + \ell_2 = 2 \cdot a}$. C'est une propriété de l'ellipse.