Centre de masse

Buts de l'expérience

Le but de l'expérience est de déterminer la position du **centre de masse** de chacune des plaques minces et homogènes mises à disposition, chaque plaque ayant une figure géométrique particulière.

Matériel à disposition

Plaques minces et homogènes présentant des figures géométriques différentes – chaque plaque est percée de quelques trous, de manière à suspendre cette plaque à une tige fixe horizontale ; fil à plomb ; grandes feuilles de papier millimétré ; règle métrique ; compas.

Eléments de théorie

Considérons un système matériel constitué d'un nombre fini n de points matériels de masses respectives m_1, m_2, ... , m_i, ... , m_n, repérés – dans un référentiel – par les vecteurs respectifs $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ..., $\vec{r}_i$, ..., $\vec{r}_n$. Dans le référentiel considéré, la position du centre de masse du système s'écrit :

$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{1}{m_{\text{total}}} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i}, \quad \text{où} \quad \boxed{m_{\text{total}} = \sum_{\text{i}=1}^{n} m_i}$$

Si on décompose le système en deux sous-systèmes formés respectivement des masses m_1, ... , m_k et m_{k+1}, ... , m_n, on peut définir $\vec{r}_{C\_1} = \frac{1}{m_{\text{tot\_1}}} \cdot \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot \vec{r}_i$ et $\vec{r}_{C\_2} = \frac{1}{m_{\text{tot\_2}}} \cdot \sum_{i=k+1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i$ où

$m_{\text{tot\_1}} = \sum_{i=1}^{k} m_i$ et $m_{\text{tot\_2}} = \sum_{i=k+1}^{n} m_i$. Montrez que : $\vec{r}_C = \frac{1}{m_{\text{total}}} \cdot \left(m_{\text{tot\_1}} \cdot \vec{r}_{C\_1} + m_{\text{tot\_2}} \cdot \vec{r}_{C\_2} \right)$!

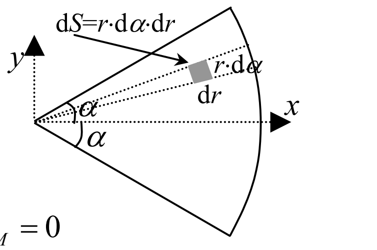
Dans le cas d'une plaque homogène, plane et d'épaisseur constante, la position du centre de masse peut s'écrire : $\boxed{\vec{r}_C = \frac{1}{S_{\text{total}}} \cdot \sum_{i=1}^{n} S_i \cdot \vec{r}_i}$ où

S_i est l'aire de la surface de l'élément i de la plaque, dont le centre de masse est repéré par $\vec{r}_i$.
S_{total} est l'aire totale de la plaque.

Si l'on sait intégrer, on peut calculer : $\vec{r}_C = \frac{1}{S_{\text{total}}} \cdot \int_S \vec{r} \; dS$.

Lorsqu'on suspend un objet par l'un de ces points et qu'il reste immobile, son **centre de masse** est situé sur la verticale du point de suspension.

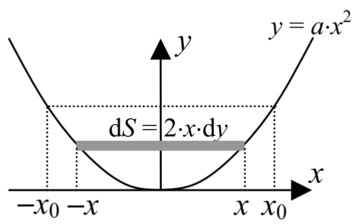
Pour les curieux :
Centre de masse d'un demi-disque :



$$S_{\text{total}} = \int_S dS = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^{r} \tilde{r} \cdot d\tilde{r} \cdot d\tilde{\alpha} = \alpha \cdot r^2 \qquad \alpha = \text{demi-angle du secteur}$$

$$X_{CM} = \frac{1}{S_{\text{total}}} \cdot \int_S x \; dS = \frac{1}{\alpha \cdot r^2} \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^{r} \tilde{r} \cdot \cos(\tilde{\alpha}) \tilde{r} \cdot d\tilde{r} \cdot d\tilde{\alpha} = \underline{\underline{X_{CM} = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}}} \qquad \underline{\underline{Y_{CM} = 0}}$$

Centre de masse d'une portion de parabole :



$$S_{\text{total}} = 2 \cdot x_0 \cdot y_0 - \int_{-x_0}^{x_0} a \cdot x^2 \; dx = \frac{4}{3} \cdot a \cdot x_0^3 = \frac{4}{3} \cdot x_0 \cdot y_0$$

$$Y_{CM} = \frac{1}{S_{\text{total}}} \cdot \int_0^{y_0} y \cdot 2x \; dy = \frac{3}{4 \cdot x_0 \cdot y_0} \cdot \int_0^{y_0} y \cdot 2 \cdot \sqrt{y/a} \; dy = \underline{\underline{Y_{CM} = \frac{3}{5} \cdot y_0}} \qquad \underline{\underline{X_{CM} = 0}}$$

suite au verso...

Manipulations

Suspendez une plaque à l'axe mural fixe, par l'un des trous. Sur l'axe mural, accrochez également le fil à plomb.
Le **centre de masse** de la plaque – en position stable – est situé sur la verticale du point de suspension que l'on peut tracer sur la plaque en suivant le fil à plomb.
Répétez cette opération pour un ou deux autres points de suspension.
Le centre de masse de la plaque se trouve à l'intersection des deux ou trois lignes tracées.
Procédez de la même manière pour les autres plaques mises à votre disposition.

Il est suggéré de commencer avec une forme triangulaire, car vous avez vu comment calculer le centre de gravité d'un triangle.
Continuer avec un quadrilatère est une bonne option, vu qu'un quadrilatère peut se décomposer en deux triangles.
Le disque troué, est la différence de deux disques, dont les centres de masse sont aux centres des disques.

La forme en **F** se décompose en formes dont les centres de masse se déterminent facilement.

Pour les formes en demi-disque, secteur de disque et portion de parabole, référez-vous aux résultats donnés en fin de théorie de la page précédente.

Présentation des résultats

Reproduisez la figure de chaque plaque étudiée sur une feuille millimétrée.
Vérifiez vos résultats par le calcul ou graphiquement selon les cas.