Deux questions relatives aux fonctions paraboliques. $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Première question : Quels sont les **zéros** de cette fonction ?

Deuxième question : La fonction possède-t-elle une valeur **minimale** ou une valeur **maximale** ?
Si oui, laquelle et pour quelle valeur de x ?

Soit : $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, écrivons cette fonction différemment :

$$f(x) = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} \right)$$ mise en évidence de a.

$$f(x) = a \cdot \left(\underbrace{x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{première identité remarquable}} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} \right)$$ on a ajouté $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ qui vaut zéro.

$$f(x) = a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4 \cdot a \cdot c}{4a^2} \right)$$ factorisation par la première identité remarquable.

$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4a}$$ distribution du a, simplification et mise au dén. commun.

$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \quad \text{où} \quad \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Discutons le cas où $a > 0$. Le cas où $a < 0$ est similaire.

Le premier terme : $a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ est toujours positif ou nul (toujours négatif ou nul si $a < 0$)

Le deuxième terme $-\frac{\Delta}{4a}$ est indépendant de x. (Il est constant)

Donc

la fonction est **minimale** (maximale si $a < 0$) lorsque $\underline{\underline{x = -\frac{b}{2a}}}$. Dans ce cas elle vaut : $\underline{\underline{y = -\frac{\Delta}{4a}}}$.

On remarque également que : $x = -\frac{b}{2a}$ est un axe de symétrie de la fonction.

Puisque le premier terme est toujours positif, la fonction ne s'annule que si le deuxième terme $\left(-\frac{\Delta}{4a} \right)$ est négatif ou nul. Il faut donc que $\Delta \geq 0$. Dans ce cas :

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}}$$

Remarque :

Autre écriture si $\Delta \geq 0$: $\frac{f(x)}{a} = \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \cdot \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)$,

qui permet de trouver les zéros de la fonction.