1.1 $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-(1-\epsilon)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-1+2\cdot\epsilon-\epsilon^2}}\approx\frac{1}{\sqrt{2\cdot\epsilon}}$

1.2 On utilise : $f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x$, ici $\gamma=f(x)=(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot(1-x)^{-\frac{3}{2}}$

$f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x=1+\frac{1}{2}\cdot x$, donc $\gamma\approx 1+\frac{1}{2}\cdot\beta^2$, puisque $x=\beta^2$.

Pour $\frac{1}{\gamma}$, on peut utiliser $\frac{1}{\gamma}=f(x)=(1-x)^{\frac{1}{2}}$, ou l'argument ci-dessous.

$$\frac{1}{\gamma}\approx\frac{1}{1+\frac{1}{2}\cdot\beta^2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2}\cdot\beta^2}{1-\frac{1}{2}\cdot\beta^2}=\frac{1-\frac{1}{2}\cdot\beta^2}{1-\frac{1}{4}\cdot\beta^4}\approx 1-\frac{1}{2}\cdot\beta^2$$

si β^2 est petit, alors β^4 est encore beaucoup plus petit !

1.3 Pour $\beta=0,99999$ on a $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=223.60736$ et $\gamma\approx\frac{1}{\sqrt{2\cdot\epsilon}}=223.60680$

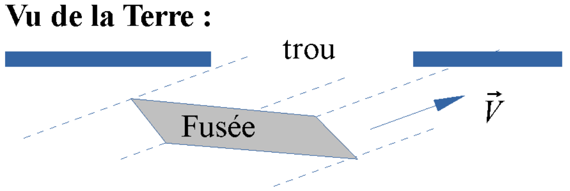
Pour $\beta=0,99$ on a $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=7.0888$ et $\gamma\approx\frac{1}{\sqrt{2\cdot\epsilon}}=7.071$

Pour $\beta=10^{-2}$ on a $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=1,000050004$ et $\gamma\approx 1+\frac{1}{2}\cdot\beta^2=1,00005$

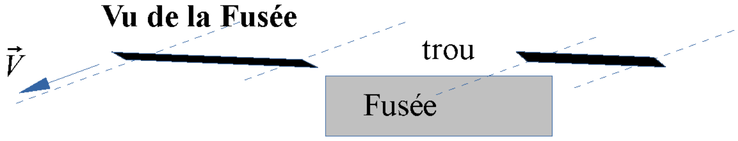
---

2. Le paradoxe de la fusée qui rapetisse pour passer à travers un trou.
L'erreur vient du fait que la contraction des longueurs se fait dans la direction de déplacement et non dans une direction choisie arbitrairement. Les dessins de l'énoncé ne sont pas corrects si la Fusée se déplace également vers le haut. Voici des dessins corrects.

Vu de la Terre :



Vu de la Fusée



Selon la Terre, la Fusée est déformée par contraction dans la direction de déplacement, mais cela ne lui permettra pas de passer à travers le trou. La longueur perpendiculairement au déplacement reste inchangée.
Selon la Fusée, le trou est déformé par contraction dans la direction de déplacement, mais elle ne passera pas à travers le trou. La taille du trou, perpendiculairement au déplacement reste inchangé.

---

3. La quantité de mouvement est :

$$p'=\frac{m\cdot\beta'\cdot c}{\sqrt{1-\beta'^2}}=\frac{m\cdot c\cdot(\beta-u)}{(1-\beta\cdot u)\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\beta-u}{1-\beta\cdot u}\right)^2}}=p'=\frac{m\cdot c\cdot(\beta-u)}{\sqrt{(1-\beta\cdot u)^2-(\beta-u)^2}}$$

$p'=\frac{m\cdot c\cdot(\beta-u)}{\sqrt{1+\beta^2\cdot u^2-\beta^2-u^2}}=p'=\frac{m\cdot c\cdot(\beta-u)}{\sqrt{1-\beta^2}\cdot\sqrt{1-u^2}}$ qui est l'expression cherchée.

L'expression de la quantité de mouvement dans $\boldsymbol{S'}$ reste raisonnablement simple.

4.1 Dans un référentiel : $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 - (m_3 \cdot v_3 + m_4 \cdot v_4) = 0$.

Dans un référentiel allant à vitesse V : $m_1 \cdot (v_1 + V) + m_2 \cdot (v_2 + V) - (m_3 \cdot (v_3 + V) + m_4 \cdot (v_4 + V)) = 0$,

donc : $(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 - m_3 \cdot v_3 - m_4 \cdot v_4) + (m_1 + m_2 - m_3 - m_4) \cdot V = 0$

Les quatre premiers termes s'annulent, donc il faut que le dernier terme soit nul, donc la masse doit être conservée.

4.2 L'exercice 3 indique comment se transforme la quantité de mouvement d'un référentiel à un autre.

$p = m \cdot \gamma \cdot \beta \cdot c$, $p' = p \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - m \cdot \gamma \cdot \frac{u \cdot c}{\sqrt{1-u^2}}$ où $u \cdot c$ = vitesse du référentiel ***S'***.

Conservation : $p_1 + p_2 - p_3 - p_4 = 0$ et $p'_1 + p'_2 - p'_3 - p'_4 = 0$.

Donc $(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - (m_1 \cdot \gamma_1 + m_2 \cdot \gamma_2 - m_3 \cdot \gamma_3 - m_4 \cdot \gamma_4) \cdot \frac{u \cdot c}{\sqrt{1-u^2}} = 0$

Le premier terme est nul par conservation de la quantité de mouvement dans le référentiel ***S***, donc le second doit aussi être nul.

Il y a conservation d'énergie totale : $m_1 \cdot \gamma_1 \cdot c^2 + m_2 \cdot \gamma_2 \cdot c^2 - m_3 \cdot \gamma_3 \cdot c^2 - m_4 \cdot \gamma_4 \cdot c^2 = 0$.

---

5. L'énergie cinétique est définie par : $E = m \cdot \gamma \cdot c^2$.

La conservation d'énergie cinétique s'écrit en relativité sous la forme :

$m_1 \cdot (\gamma_1 - 1) \cdot c^2 + m_2 \cdot (\gamma_2 - 1) \cdot c^2 - m_3 \cdot (\gamma_3 - 1) \cdot c^2 - m_4 \cdot (\gamma_4 - 1) \cdot c^2 = 0$

En développant cela devient :

$(m_1 \cdot \gamma_1 \cdot c^2 + m_2 \cdot \gamma_2 \cdot c^2 - m_3 \cdot \gamma_3 \cdot c^2 - m_4 \cdot \gamma_4 \cdot c^2) - (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \cdot c^2 = 0$

On a vu dans l'exercice 4.2 qu'il y a conservation d'énergie totale, c'est à dire que l'expression se trouvant dans la première parenthèse est nulle.

Par conséquent, on a $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0$, c'est-à-dire que la masse est conservée.

---

6. $E_{totale}^2 - p^2 \cdot c^2 = (m \cdot \gamma \cdot c^2)^2 - m \cdot \gamma \cdot \beta^2 \cdot c^2 \cdot c^2 = m^2 \cdot c^4 \cdot \gamma^2 \cdot (1 - \beta^2) = m^2 \cdot c^4$, l'égalité est montrée.

---

7. *Facultatif* : Les transformations de Lorentz donnent :

$\Delta X' = \gamma \cdot (\Delta X - \beta \cdot c \cdot \Delta T)$; $c \cdot \Delta T' = \gamma \cdot (c \cdot \Delta T - \beta \cdot \Delta X)$; $\Delta Y' = \Delta Y$ et $\Delta Z' = \Delta Z$.

Calculons : $\Delta S'^2 = \Delta X'^2 + \Delta Y'^2 + \Delta Z'^2 - c^2 \cdot \Delta T'^2 =$

$\Delta S'^2 = \gamma^2 \cdot (\Delta X - \beta \cdot c \cdot \Delta T)^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2 - \gamma^2 \cdot (c \cdot \Delta T - \beta \cdot \Delta X)^2 =$

$\Delta S'^2 = \gamma^2 \cdot (\Delta X^2 - 2 \cdot \beta \cdot \cancel{c \cdot \Delta T \cdot \Delta X} + \beta^2 \cdot c^2 \cdot \Delta T^2) + \Delta Y^2 + \Delta Z^2 -$ =
$\gamma^2 \cdot (c^2 \cdot \Delta T^2 - 2 \cdot \beta \cdot \cancel{\Delta X \cdot c \cdot \Delta T} + \beta^2 \cdot \Delta X^2)$

$\Delta S'^2 = \Delta X^2 \cdot (\gamma^2 - \gamma^2 \cdot \beta^2) + \Delta Y^2 + \Delta Z^2 - c^2 \cdot \Delta T^2 \cdot (\gamma^2 - \gamma^2 \cdot \beta^2) =$

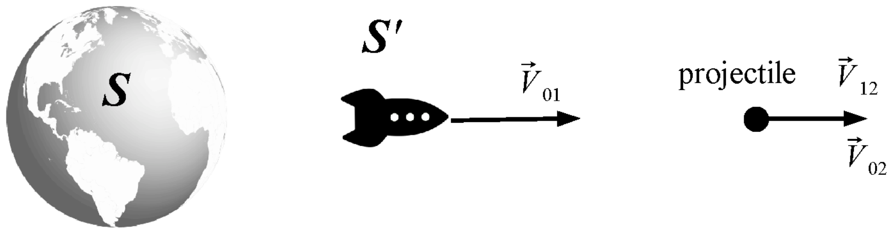
$\Delta S'^2 = \Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2 - c^2 \cdot \Delta T^2 = \Delta S^2$, c'est ce que l'on voulait montrer.

Le but est de montrer qu'en une dimension :

° **la force résultante s'appliquant sur une particule est indépendante du référentiel.**

° **L'accélération observée depuis le référentiel S est égale à l'accélération propre divisée par γ^3 !!**

Voici une image pour fixer les idées :



Rappels et définitions :

° La vitesse du référentiel S' relativement à S est $V_{01} = u \cdot c$

° La vitesse du projectile relativement à S' est $V_{12} = \beta' \cdot c$

° La vitesse du projectile relativement à S est $V_{02} = \beta \cdot c$

° La quantité de mouvement du projectile dans S' vaut : $p' = m_0 \cdot c \cdot \gamma' \cdot \beta'$

° La quantité de mouvement du projectile dans S vaut : $p = m_0 \cdot c \cdot \gamma \cdot \beta$

° $\tau = c \cdot t$ et $\tau' = c \cdot t'$

° La force résultante mesurée dans S' vaut : $F' = \dfrac{d\,p'}{dt'} = c \cdot \dfrac{d\,p'}{d\,\tau'}$

° La force résultante mesurée dans S vaut : $F = \dfrac{d\,p}{dt} = c \cdot \dfrac{d\,p}{d\,\tau}$

° $\gamma_u = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ $\quad \gamma' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta'^2}}$ $\quad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

° $x = \gamma_u \cdot (x' + u \cdot \tau')$ $\quad x' = \gamma_u \cdot (x - u \cdot \tau)$

° $x' = \dfrac{1}{\gamma_u} \cdot x - u \cdot \tau'$ $\quad x = \dfrac{1}{\gamma_u} \cdot x' + u \cdot \tau$ même instant dans S $\Rightarrow$ contraction des longueurs

° $\tau = \gamma_u \cdot (\tau' + u \cdot x')$ $\quad \tau' = \gamma_u \cdot (\tau - u \cdot x)$ même endroit dans S' $\Rightarrow$ dilatation du temps.

° $\tau' = \dfrac{1}{\gamma_u} \cdot \tau - u \cdot x'$ $\quad \tau = \dfrac{1}{\gamma_u} \cdot \tau' + u \cdot x$ unité : [m]

° u et γ_u sont des constantes.

° $\beta' = \dfrac{d\,x'}{d\,\tau'}$ $\quad \beta = \dfrac{d\,x}{d\,\tau}$

° $\alpha' = \dfrac{d\beta'}{d\,\tau'}$ = accélération propre du projectile, si $\beta' = 0$.

° $\alpha = \dfrac{d\beta}{d\,\tau}$ = accélération du projectile vu depuis S. $\quad \alpha = \dfrac{\text{accélération}}{c^2}$ $\left[\dfrac{1}{m}\right]$

° $p' = \gamma_u \cdot (p - m_0 \cdot c \cdot \gamma \cdot u)$ vu à l'exercice 3.

On choisira le référentiel S' allant à la même vitesse que le projectile, donc :

° $\beta' = 0$ $\quad \gamma' = 1$

° $u = \beta$, mais u est constant, alors que β varie dans le temps.

° $\gamma_u = \gamma$

Conséquences :

° $d\,\tau' = \dfrac{1}{\gamma_u} \cdot d\,\tau + u \cdot \beta' \cdot d\,\tau'$ se simplifie, car $\beta' = 0$.

° $d\,\tau' = \dfrac{1}{\gamma_u} \cdot d\,\tau$ $\quad \dfrac{1}{d\,\tau'} = \gamma_u \cdot \dfrac{1}{d\,\tau}$

- $$\frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\beta}{\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^3}\cdot\frac{d\beta}{d\tau} = \beta\cdot\gamma^3\cdot\frac{d\beta}{d\tau} = \beta\cdot\gamma^3\cdot\alpha$$
- $$\frac{d\gamma'}{d\tau'} = \beta'\cdot\gamma'^3\cdot\alpha' = 0\,,\ \text{car}\ \ \beta' = 0.$$

Déterminons le lien entre la force et l'accélération, vu depuis le référentiel ***S'***.

$$\frac{F'}{c} = \frac{dp'}{d\tau'} = m_0\cdot c\cdot\frac{d}{d\tau'}(\gamma'\cdot\beta') = m_0\cdot c\cdot\frac{d}{d\tau'}(\gamma'\cdot\beta') = m_0\cdot c\cdot\left(\frac{d\gamma'}{d\tau'}\cdot\beta' + \gamma'\cdot\frac{d\beta'}{d\tau'}\right)$$

$$\frac{F'}{c} = m_0\cdot c\cdot(0 + 1\cdot\alpha')$$

$\boxed{F' = m_0\cdot c^2\cdot\alpha'}$ C'est la relation classique $F_{\text{résultante}} = m\cdot a$,

Déterminons le lien entre la force et l'accélération, vu depuis le référentiel ***S***.

$$\frac{F}{c} = \frac{dp}{d\tau} = m_0\cdot c\cdot\frac{d}{d\tau}(\gamma\cdot\beta) = m_0\cdot c\cdot\frac{d}{d\tau}(\gamma\cdot\beta) = m_0\cdot c\cdot\left(\frac{d\gamma}{d\tau}\cdot\beta + \gamma\cdot\frac{d\beta}{d\tau}\right)$$

$$\frac{F}{c} = m_0\cdot c\cdot(\beta\cdot\gamma^3\cdot\alpha\cdot\beta + \gamma\cdot\alpha)$$

$$F = m_0\cdot c^2\cdot\gamma^3\cdot\alpha\cdot\left(\beta^2 + \frac{1}{\gamma^2}\right)$$

$$\boxed{F = m_0\cdot c^2\cdot\gamma^3\cdot\alpha}$$

Déterminons le lien entre les forces F et F', ainsi qu'entre les accélérations α et α'.

$$\frac{F'}{c} = \frac{dp'}{d\tau'} = \gamma_u\cdot\frac{dp'}{d\tau} = \gamma_u^2\cdot\left(\frac{dp}{d\tau} - m_0\cdot c\cdot u\cdot\frac{d\gamma}{d\tau}\right)$$

$$\frac{F'}{c} = \gamma_u^2\cdot\left(\frac{dp}{d\tau} - m_0\cdot c\cdot u\cdot\frac{\beta}{\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^3}\cdot\frac{d\beta}{d\tau}\right)$$

$$\frac{F'}{c} = \gamma_u^2\cdot\left(\frac{F}{c} - m_0\cdot c\cdot u\cdot\beta\cdot\gamma^3\cdot\alpha\right)$$

$$F' = \gamma_u^2\cdot(F - m_0\cdot c^2\cdot u^2\cdot\gamma^3\cdot\alpha)$$

$$F' = \gamma_u^2\cdot(F - u^2\cdot F) = \gamma_u^2\cdot(1-u^2)\cdot F$$

On a donc montré que : $\boxed{F = F'}$!!!

La force résultante qui s'applique sur le projectile est indépendante du référentiel.

On a ainsi également montré que : $\boxed{\alpha = \frac{\alpha'}{\gamma^3}}$.

L'accélération observée depuis le référentiel *S* est égale à l'accélération propre divisée par γ^3 !!

<u>L'accélération propre</u> est celle mesurée depuis un référentiel dans lequel le projectile va à une vitesse nulle.

À l'aide de la loi d'addition des vitesses, montrons en page suivante, que l'on retrouve que l'accélération observée depuis un référentiel ***S*** égale l'accélération propre divisée par γ^3 .

Dans le référentiel ***S'***, allant à vitesse nulle relativement au projectile, on peut appliquer la mécanique classique et l'on à : $\beta'(d\tau') = \alpha' \cdot d\tau'$, initialement, la vitesse est nulle.
Cette relation n'est valable que pour des temps petits.

Rappelons que : $d\tau' = \frac{1}{\gamma_u} \cdot d\tau$

Par la loi d'addition des vitesses, on a : $\beta(\tau+d\tau) = \frac{\beta(\tau)+\beta'(d\tau')}{1+\beta(\tau)\cdot\beta'(d\tau')} = \frac{\beta(\tau)+\alpha'\cdot d\tau'}{1+\beta(\tau)\cdot\alpha'\cdot d\tau'}$

$$\beta(\tau+d\tau) = \frac{\beta(\tau)+\alpha'\cdot d\tau/\gamma}{1+\beta(\tau)\cdot\alpha'\cdot d\tau'/\gamma}$$

$$\beta(\tau+d\tau)+\beta(\tau+d\tau)\cdot\beta(\tau)\cdot\alpha'\cdot d\tau/\gamma = \beta(\tau)+\alpha'\cdot d\tau/\gamma$$

$$\beta(\tau+d\tau)-\beta(\tau) = (1+\beta(\tau+d\tau)\cdot\beta(\tau))\cdot\alpha'\cdot d\tau/\gamma$$

$$\frac{\beta(\tau+d\tau)-\beta(\tau)}{d\tau} = (1+\beta^2(\tau))\cdot\alpha'/\gamma$$

$\frac{d\beta(\tau)}{d\tau} = \frac{\alpha'}{\gamma^3}$ $= \alpha =$ l'accélération vue depuis le référentiel ***S***.

C'est une équation différentielle, qui se résout. $\frac{d\beta(\tau)}{d\tau} = \alpha'\cdot(1-\beta^2)^{3/2}$ $\beta(0) = 0$.

Notons : $\dot\beta = \frac{d\beta(\tau)}{d\tau}$.

On a donc $\gamma^3\cdot\dot\beta = \alpha'$ = constante.

On a déjà vu en début de page précédente que : $\dot\gamma = \frac{d\gamma}{d\tau} = \beta\cdot\gamma^3\cdot\alpha = \beta\cdot\gamma^3\cdot\dot\beta$

Donc $\frac{d\gamma}{d\tau} = \beta\cdot\alpha'$.

Calculons : $\frac{d}{d\tau}(\gamma\cdot\beta) = \dot\gamma\cdot\beta+\gamma\cdot\dot\beta = \beta^2\cdot\alpha'+\gamma\cdot\dot\alpha = \beta^2\cdot\alpha'+\gamma\cdot\dot\alpha'/\gamma^3 = \alpha'\cdot\left(\beta^2+\frac{1}{\gamma^2}\right) = \alpha'$ = constante.

Donc : $\gamma\cdot\beta = \alpha'\cdot\tau$ $\beta(0) = 0$.

Plus explicitement : $\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \alpha'\cdot\tau$.

En mettant au carré et en isolant β on obtient : $\boxed{\beta(\tau) = \frac{\alpha'\cdot\tau}{\sqrt{1+\alpha'^2\cdot\tau^2}}}$.

C'est l'évolution de la vitesse du projectile vu depuis le référentiel ***S***.

Pour de petit temps, $\beta(\tau) = \alpha'\cdot\tau$, c'est l'évolution classique de la vitesse.
Pour de grand temps, $\beta(\tau) \approx 1$, en restant inférieur à 1.
Il est intéressant d'écrire également l'évolution de γ en fonction du temps.
De $\gamma\cdot\beta = \alpha'\cdot\tau$ on obtient : $\gamma^2\cdot\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right) = \alpha'^2\cdot\tau^2$, donc $\gamma^2-1 = \alpha'^2\cdot\tau^2$

Finalement : $\gamma = \sqrt{1+\alpha'^2\cdot\tau^2}$.
Au début, γ vaut 1, puis il croit linéairement avec le temps.
L'apport d'énergie étant constante, il est normale que l'énergie cinétique croisse linéairement.