Exercice 1

L'énoncé dit que la période propre du pendule vaut : $T_0' = 2{,}00$ [s].

1.1 La dilatation du temps fait que les astronautes mesurent une plus grande période d'oscillation.

La période mesurée par les astronautes vaut : $T_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot T_0'$

On préfère écrire : $T_1 = \gamma \cdot T_0'$, avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ et $\beta = \frac{v}{c}$.

$\beta = 0{,}500$; $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}500^2}} = 1{,}155$ (sans unités)

La période mesurée par les astronautes vaut : $T_1 = 1{,}155 \cdot 2{,}00\,[s] = \underline{2{,}31\,[s]}$.

1.2 L'énoncé nous indique que $T_2 = 3{,}00\,[s]$, donc $\gamma_2 = \frac{T_2}{T_0'} = 1{,}50$.

De $\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}}$ on en déduit que $\beta_2 = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma_2^2}}$

Ici, $\beta_2 = \sqrt{1-\frac{1}{1{,}50^2}} = 0{,}745$, donc la vitesse de l'autre groupe d'astronautes relativement au pendule est de $0{,}745 \cdot c$.

Exercice 2

L'énoncé dit que la distance propre entre la Terre et le Soleil vaut : $L_0 = 8{,}3$ [minutes · c].

2.1 La contraction des longueurs fait que les observateurs dans la fusée mesurent une plus petite distance, qui vaut : $L' = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot L_0$

On préfère écrire : $L' = \frac{1}{\gamma} \cdot L_0$, avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ et $\beta = \frac{v}{c}$.

$\beta = 0{,}600$; $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}600^2}} = 1{,}25$

La longueur mesurée par les observateurs de la fusée vaut :

$L' = \frac{1}{1{,}25} \cdot 8{,}3\,[minutes \cdot c] = \underline{6{,}64\,[minutes\,lumière]}$.

2.2 L'énoncé nous indique que $L_2' = 4{,}15\,[minutes\,lumière]$, donc $\gamma_2 = \frac{L_0}{L_2'} = 2{,}00$.

On a vu dans l'exercice 1 que $\beta_2 = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma_2^2}}$

Ici, $\beta_2 = \sqrt{1-\frac{1}{2{,}00^2}} = 0{,}866$, donc les observateurs se trouvant dans l'autre fusée mesurent relativement au système solaire une vitesse de $0{,}866 \cdot c$.

Exercice 3

L'énoncé dit que la durée de vie propre du muon vaut : $T_0' = 2{,}26 \cdot 10^{-6}$ [s].

3.1 La dilatation du temps fait que la durée de vie du muon mesurée depuis la Terre vaut :

$$T = \gamma \cdot T_0' \text{, avec } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ et } \beta = \frac{v}{c}.$$

Ici, $\beta = 0{,}866$; $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}866^2}} = 2{,}00$ (sans unités)

La durée de vie du muon mesurée depuis la Terre vaut : $T = 2{,}00 \cdot 2{,}26 \cdot 10^{-6}\,[s] = 4{,}52 \cdot 10^{-6}\,[s]$.

Donc vu depuis la Terre, le muon peut parcourir une distance de :

$$\Delta x = 0{,}866 \cdot 3{,}00 \cdot 10^8\,[m/s] \cdot 4{,}52 \cdot 10^{-6}\,[s] = \underline{1'174\,[m]}$$

Cette distance étant plus grande que l'altitude de sa création, oui, le muon peut atteindre la Terre.

3.2 L'énoncé dit que la distance propre entre l'endroit de sa création et la Terre vaut : $L_0 = 1'150$ [m].

La contraction des longueurs fait que le muon "voit" une plus petite distance, qui vaut :

$$L' = \frac{1}{\gamma} \cdot L_0 \text{, avec } \beta = 0{,}866 \text{ ; } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}866^2}} = 2{,}00 \text{ (sans unités)}$$

La longueur "vue" par le muon vaut : $L' = \frac{1}{2{,}00} \cdot 1'150\,[m] = \underline{575\,[m]}$.

3.3 À la vitesse de $0{,}866 \cdot 3{,}00 \cdot 10^8$ [m/s], il met $\frac{575\,[m]}{0{,}866 \cdot 3{,}00 \cdot 10^8\,[m/s]} = 2{,}21 \cdot 10^{-6}\,[s]$ pour parcourir la distance de 575 [m]. Ce temps est inférieur à sa durée de vie, il peut donc parcourir cette distance.

Exercice 4

L'énoncé dit que la distance propre entre le Soleil et Alpha du Centaure vaut : $L_0 = 4{,}37$ [a.l.].

4.1 À la vitesse de $0{,}995 \cdot c$, la sonde met $T_1 = 4{,}37 / 0{,}995 = 4{,}39$ années pour aller du Soleil à Alpha du Centaure, selon une horloge terrestre.

4.2 La dilatation du temps fait que du point de vue de la sonde le temps du voyage vaut :

$$T_0' = \frac{T_1}{\gamma} \text{, avec } \beta = 0{,}995 \text{ ; } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}995^2}} = 10{,}0 \text{ (sans unités)}$$

Du point de vue de la sonde, le voyage a duré : $T_0' = \frac{4{,}39}{10{,}0} = \underline{0{,}439\,[a.l.]}$.

C'est la sonde qui mesure le temps propre T_0', celui qui est le plus court.

4.3 Du point de vue de la sonde, la distance à parcourir vaut $L' = \frac{1}{\gamma} \cdot L_0 = \frac{4{,}37}{10{,}0} = 0{,}437\,[a.l.]$

À la vitesse de $0{,}995 \cdot c$ elle parcourt exactement cette distance durant le temps T_0'.

Il n'y a donc pas de contradiction. La sonde a mesuré une durée 10,0 fois plus petite, mais également une distance 10,0 fois plus petite.

Exercice 5, le paradoxe des jumeaux de Paul Langevin

5.1 La dilatation du temps fait que la durée du voyage mesurée depuis la Terre vaut :

$T = \gamma \cdot T_0{}'$, avec $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ et $\beta = \dfrac{v}{c}$.

Ici, $\beta = 0{,}900$; $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}900^2}} = 2{,}29$ (sans unités)

La durée du voyage mesurée depuis la Terre vaut : $T = 2{,}29 \cdot 20\ [\mathit{années}] = 45{,}8\ [\mathit{années}]$.
Le jumeau resté sur Terre donc vieilli de 45,8 années, il a 75,8 ans.
Rappelons que celui de la fusée à vieilli de 20,0 années, il a donc 50,0 ans.

5.2 Le problème n'est pas symétrique, car c'est le jumeau de la fusée qui accélère dans un premier temps, puis décélère pour accélérer dans l'autre sens. C'est particulièrement cette phase de changement de vitesse lors du demi-tour qui rend le problème asymétrique. C'est bien le jumeau de la fusée qui a moins vieilli et se retrouve plus jeune que son frère.
Des expériences ont été réalisées avec des horloges atomiques placées dans des avions qui tournent autour de la Terre. Elles confirment que celles qui tournent dans le sens de rotation de la Terre retardent sur celles restées sur Terre. Celles qui tournent dans le sens inverse de rotation de la Terre avancent. L'expérience est plus compliquée, car le champ gravitationnel modifie aussi l'écoulement du temps. Cela se mesure facilement de nos jours sur Terre.