

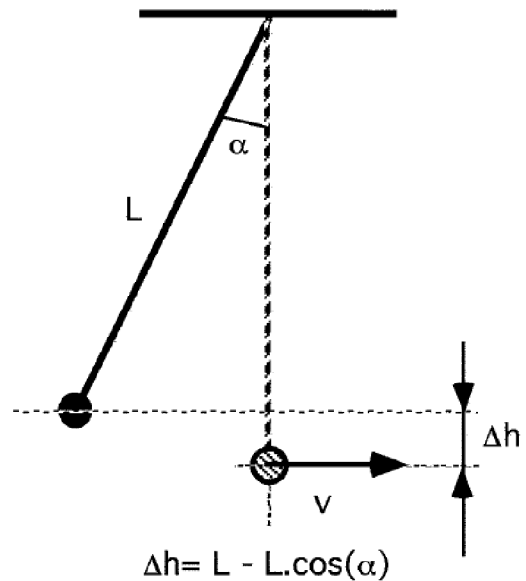
1

Si les frottements sont nuls, l'énergie mécanique du pendule est conservée :

$$\Delta \varepsilon_{\text{mec}} = 0 = \Delta \varepsilon_{\text{cin}} + \Delta \varepsilon_{\text{pot}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + (-m \cdot g \cdot \Delta h)$$

$$\text{donc } v = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h} = 1,49 \text{ [m/s]}$$



2.

Le mouvement se fait sous l'effet de deux forces: pesanteur (constante) et tension du fil (variable).

b- La condition limite pour que le fil ne se détende pas au sommet est que la tension soit nulle. Dans ce cas, il ne reste que la force de pesanteur verticale et donc perpendiculaire à v_s .

On a donc un MCU local dans lequel F_p joue le rôle de force centripète :

$$F_c = m \cdot a_c = \frac{m \cdot v_s^2}{L} = F_p = m \cdot g$$

$$\Rightarrow v_s^2 = g \cdot L$$

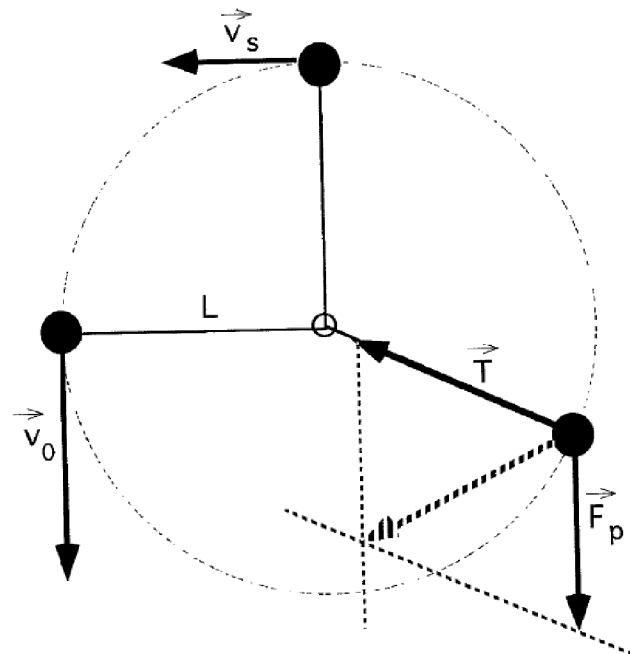
c- Comme il n'y a pas de frottement, l'énergie mécanique est conservée. En choisissant l'altitude de départ comme niveau 0 pour l'énergie potentielle, on a :

$$\frac{1}{2} m \cdot v_0^2 + 0 = \frac{1}{2} m \cdot v_s^2 + m \cdot g \cdot L \Rightarrow v_0^2 = v_s^2 + 2 \cdot g \cdot L = 3 \cdot g \cdot L \Rightarrow v_0 = 5,94 \text{ [m/s]}$$

d- Si le frottement n'était pas négligeable, il faudrait pouvoir calculer son travail afin de déterminer la perte d'énergie mécanique:

$$A = \int_{r_0}^{r_s} \vec{F}_f \cdot \vec{dr} \quad \text{On sait que } F_f \text{ est opposé à } \vec{dr}, \text{ donc } A = \int_0^s -F_f \cdot dr.$$

Seulement voilà, la force de frottement n'est pas constante dans le mouvement (elle est probablement de type turbulent, donc proportionnelle à v^2). Dans ce cas, le calcul de cette intégrale dépasse largement les compétences gymnasiales... La seule façon d'estimer ce travail serait d'évaluer une force de frottement moyenne, ce qui donnerait un travail $A = -F_{f \text{ moy}} \cdot 1,5 \cdot \pi \cdot L$



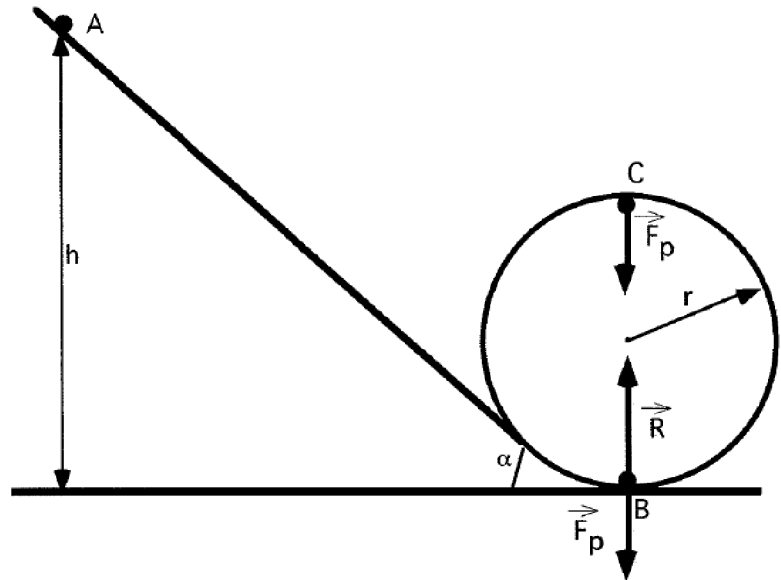
3.

a- Pas de frottement.

La condition limite pour que la bille puisse faire le looping est que la réaction du rail au point C soit nulle. En ce point, la seule force est F_p et la vitesse est minimum. Le mouvement en ce point peut être considéré comme un MCU local dans lequel F_p est la force centripète :

$$m \cdot g = m \frac{v_c^2}{r}$$

ce qui donne $v_c^2 = g \cdot r$



Dans le mouvement, l'énergie mécanique est conservée. Si on choisit le niveau 0 de l'énergie potentielle au point B, on peut écrire:

$$\mathcal{E}_{\text{mecA}} = \mathcal{E}_{\text{mecC}} = m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v_c^2 + m \cdot g \cdot 2 \cdot r$$

En remplaçant la vitesse par sa valeur, on trouve $h = \frac{5 \cdot r}{2} = 3,75 \text{ [m]}$

b- Si il y a du frottement, l'énergie mécanique diminue d'une valeur égale au travail de la force de frottement:

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{mec}} = A_{F_f} = \frac{1}{2} m \cdot v_c^2 + m \cdot g \cdot 2 \cdot r - m \cdot g \cdot h = F_f \cdot (d_1 + d_2)$$

$$F_f = 0,1 \cdot m \cdot g$$

$$d_1 = \text{distance le long de la pente} = \frac{h}{\sin(\alpha)}$$

$$d_2 = \text{distance le long du cercle} = \pi \cdot r$$

$$\frac{1}{2} m \cdot g \cdot r + m \cdot g \cdot 2 \cdot r - m \cdot g \cdot h = 0,1 \cdot m \cdot g \cdot \left(\frac{h}{\sin(\alpha)} + \pi \cdot r \right)$$

$$\text{On en tire } h = \frac{r \cdot (0,1\pi + 2,5)}{1 - \frac{0,1}{\sin(\alpha)}} = 4,92 \text{ [m]}$$

4.

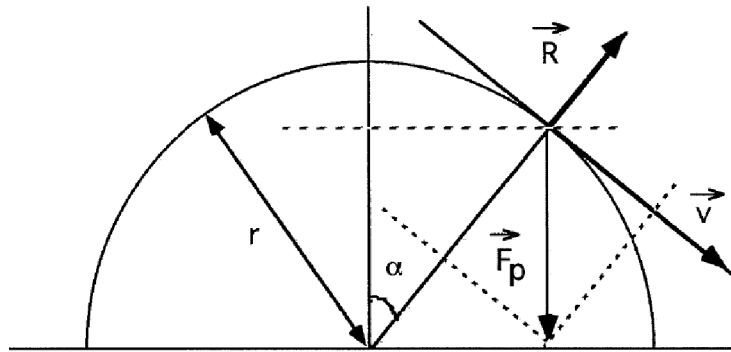
La condition pour que l'enfant quitte la butte sur laquelle il glisse est $R = 0$.

Newton :

$$\vec{F}_{\text{rés}} = m \cdot \vec{a} = \vec{F}_p + \vec{R}$$

Projection tangentielle :

$$F_p \cdot \sin(\alpha) = m \cdot a_T$$



Projection normale :

$$F_p \cdot \cos(\alpha) - R = m \cdot a_N = m \cdot g \cdot \cos(\alpha) - R = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow R = m \cdot g \cdot \cos(\alpha) - m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Pour déterminer la vitesse, on utilise la conservation de l'énergie mécanique.

En posant $\mathcal{E}_{\text{pot}} = 0$ au niveau du sol, on a :

$$m \cdot g \cdot r = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot r \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos(\alpha))$$

En remplaçant dans R et en posant $R = 0$:

$$m \cdot g \cdot \cos(\alpha) - 2 \cdot m \cdot g \cdot (1 - \cos(\alpha)) = 0 \quad \text{donc} \quad \cos(\alpha) = \frac{2}{3} \quad \alpha = 48^\circ$$

5. On choisit $\mathcal{E}_{\text{pot}} = 0$ au niveau du sol. L'énergie mécanique au départ est donc

$$\mathcal{E}_{\text{mécA}} = \mathcal{E}_{\text{cinA}} + \mathcal{E}_{\text{potA}} = 0 + m \cdot g \cdot h_A = 2,00 \text{ [J]}$$

a- Juste avant de toucher le sol, l'énergie mécanique est la même:

$$\mathcal{E}_{\text{mécB}} = \mathcal{E}_{\text{cinB}} + \mathcal{E}_{\text{potB}} = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 + 0 = 2,00 \text{ [J]} \Rightarrow v_B = 10,8 \text{ [m/s]}$$

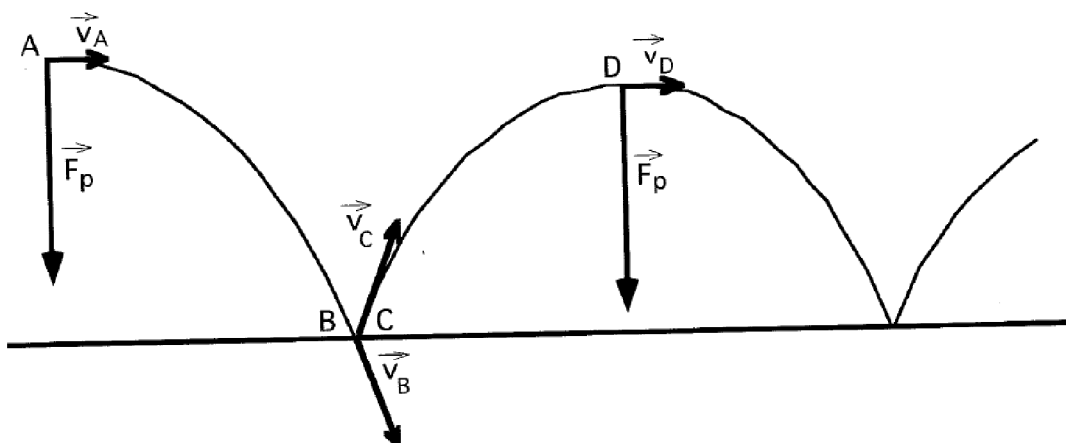
b- Après le rebond, l'énergie mécanique a diminué de 12%. Donc

$$\mathcal{E}_{\text{mécC}} = 0,88 \cdot \mathcal{E}_{\text{mécB}} = 1,76 \text{ [J]}$$

Lors de la remontée, l'énergie se conserve. A la hauteur maximum, on a

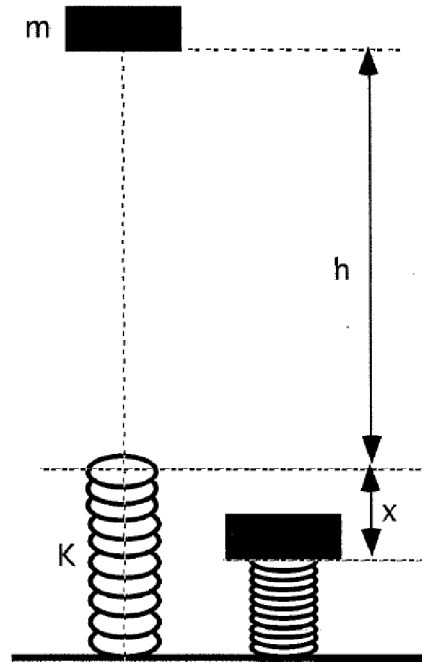
$$\mathcal{E}_{\text{mécD}} = \mathcal{E}_{\text{cinD}} + \mathcal{E}_{\text{potD}} = 0 + m \cdot g \cdot h_D = 1,76 \text{ [J]} \Rightarrow h_D = 5,28 \text{ [m]}$$

c- Si on lance la balle avec une vitesse horizontale, l'énergie mécanique de départ est plus grande (2,11 [J]). La vitesse v_B sera donc plus grande (11,1 [m/s]). Pour calculer la hauteur maximum à laquelle la balle remonte, il faudrait connaître l'énergie cinétique au point D, donc savoir comment se fait le rebond (même angle ou conservation de la vitesse horizontale ?). Mais dans les deux cas, la hauteur max sera différente de celle calculée ci-dessus...



6.

Pendant la chute, l'énergie potentielle du corps se transforme en énergie cinétique. Lorsqu'il commence à comprimer le ressort, l'énergie cinétique diminue et le ressort accumule de l'énergie potentielle de déformation élastique jusqu'au moment où la vitesse du corps devient nulle. A ce moment, toute l'énergie potentielle de pesanteur du corps s'est transformée en énergie potentielle de déformation du ressort (en admettant évidemment qu'il n'y a pas de frottement et que le ressort est parfaitement élastique...)



$$\Delta \epsilon_{\text{pot-pesanteur}} = -\Delta \epsilon_{\text{pot-ressort}} = -m \cdot g \cdot (h + x) = -\frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2$$

$$K \cdot x^2 - 2 \cdot m \cdot g \cdot x - 2 \cdot m \cdot g \cdot h = 0$$

Solutions: $x_1 = 0,073$ [m] et $x_2 = -0,068$ [m]

La solution négative n'a pas beaucoup de sens physique...

b- Le ressort ne va évidemment pas resté comprimé. Il va se détendre et propulser le corps vers le haut, jusqu'à sa hauteur de départ...

7.

Le mouvement d'un satellite en orbite autour de la Terre se fait dans le champ de **gravitation** terrestre. Dans ce cas, l'énergie potentielle est :

$$\epsilon_{\text{pot}} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

G est la constante de gravitation ($6,67 \cdot 10^{-11}$ [N·m²/kg²])

M est la masse de la Terre ($6 \cdot 10^{24}$ [kg])

m est la masse du satellite

r est la distance entre le satellite et le **centre** de la Terre.

L'énergie potentielle est toujours négative. Elle tend vers 0 lorsque r tend vers l'infini...

$$\text{a- } \epsilon_{\text{cin p}} = \frac{1}{2} m \cdot v_p^2 = 0,5 \cdot 1230 \cdot (8055)^2 = 3,99 \cdot 10^{10} \text{ [J]}$$

$$\text{b- } \epsilon_{\text{pot p}} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r_p} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{(6400+520) \cdot 10^3} = -7,11 \cdot 10^{10} \text{ [J]}$$

$$\text{c- } \epsilon_{\text{mec p}} = \epsilon_{\text{pot p}} + \epsilon_{\text{cin p}} = -3,12 \cdot 10^{10} \text{ [J]}$$

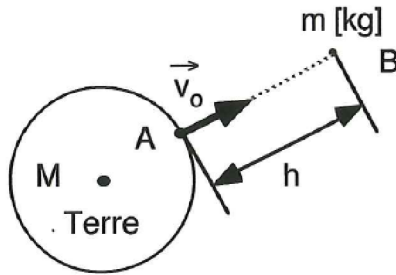
d- L'énergie mécanique est conservée dans le mouvement:

$$\epsilon_{\text{pot a}} + \epsilon_{\text{cin a}} = \epsilon_{\text{pot p}} + \epsilon_{\text{cin p}} \quad E_{\text{pot a}} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r_a} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 1230}{(2,44+6,37) \cdot 10^6} = -5,58 \cdot 10^{10} \text{ [J]}$$

$$-\frac{G \cdot M \cdot m}{r_p} + \frac{1}{2} m \cdot v_p^2 = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r_a} + \frac{1}{2} m \cdot v_a^2$$

$$v_a^2 = v_p^2 + 2 \cdot G \cdot M \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_p} \right) \Rightarrow v_a = 6,30 \cdot 10^3 \text{ [m/s]}$$

8.



Hypothèse : à l'altitude h (au point B), la masse m a perdu toute son énergie cinétique, $v_B = 0$ (m est lancée verticalement).

Si on néglige les frottements, la masse n'est soumise qu'à une force conservative : la force de pesanteur. L'énergie mécanique est conservée.

$$\mathcal{E}_{\text{mec A}} = \mathcal{E}_{\text{mec B}} \rightarrow \mathcal{E}_{\text{pot A}} + \mathcal{E}_{\text{cin A}} = \mathcal{E}_{\text{pot B}} + \mathcal{E}_{\text{cin B}}$$

On pose $\mathcal{E}_{\text{pot}} = 0$ à l'infini.

$$-G \frac{mM}{R} + \frac{1}{2} mv_0^2 = -G \frac{mM}{R+h}$$

$$\Rightarrow v_0^2 = \frac{2GMh}{(R+h)R} = \frac{2GMh}{\left(\frac{R}{h}+1\right)R}$$

$$\text{si } h \rightarrow \infty \Rightarrow v_0^2 \rightarrow \frac{2GM}{R} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 11,2 \cdot 10^3 \text{ [m/s]} \text{ (Vitesse de libération)}$$

$$\text{si } h \ll R \Rightarrow v_0^2 \rightarrow \frac{2GMh}{R^2} = 2gh \text{ car } g = \frac{GM}{R^2}$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}$$

9.

On pose $\mathcal{E}_{\text{pot}} = 0$ à l'infini.

On utilise $\Delta \mathcal{E}_{\text{mec}} = A_F$ non conservatives (Théorème de l'énergie mécanique).

Pour le satellite : $\Delta \mathcal{E}_{\text{mec}} = \mathcal{E}_m(h) - \mathcal{E}_m(0) = \mathcal{E}_{\text{pot}}(h) + \mathcal{E}_{\text{cin}}(h) - \mathcal{E}_{\text{pot}}(0) - \mathcal{E}_{\text{cin}}(0) =$

$$-\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2} mv^2 - \left(-\frac{GMm}{R}\right) + 0$$

Remarque : Pour simplifier, on pose $\mathcal{E}_{\text{cin}}(0) = 0$ ce qui n'est pas totalement vrai !

En effet, la Terre tourne. Ce n'est pas un hasard si la majorité des sites de lancement se trouvent près de l'équateur et si les lancements se font vers l'est.

Sur un orbite circulaire, le satellite est soumis à une force centripète $F_c = \frac{mv^2}{r}$; cette force est aussi la force de pesanteur qui agit sur le satellite :

$$F_p = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow \frac{1}{2} mv^2 = \frac{GMm}{2r} \text{ d'où :}$$

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{mec}} = -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{2r} - \left(-\frac{GMm}{R}\right) = -\frac{GMm}{2r} + \frac{GMm}{R} \quad E_{\text{mec sol}} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R} = -3,12 \cdot 10^{10} \text{ [J]}$$

$$GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2(R+h)} \right) = 1,62 \cdot 10^{10} \text{ [J]} \quad E_{\text{mec}} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{2 \cdot r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 500}{2 \cdot (0,270 + 6,37) \cdot 10^6} = -1,50 \cdot 10^{10} \text{ [J]}$$

Dans ce cas, l'énergie cinétique est la moitié de la valeur absolue de l'énergie potentielle.

10.

Par définition, une surface équipotentielle est une surface telle qu'en tout point de cette surface on ait : Énergie potentielle = constante.

$$\text{Donc : } \Delta E_{pot} = W_{force\ conservatives} = 0 [J].$$

$$\text{Donc : } W_{force\ conservatives} = \int_A^B \vec{F}_{conservative} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{conservative} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{conservative} \perp d\vec{r}.$$

Les lignes de forces conservatives sont toujours perpendiculaires aux surfaces équipotentielles !

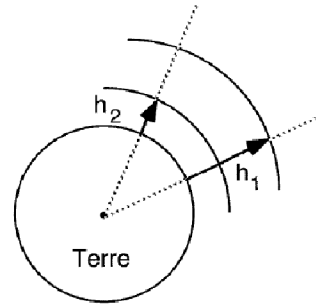
11.

- a) Le mouvement est circulaire, donc la vitesse est liée à la force normale qui est égale à la force de gravitation. $\frac{m \cdot V^2}{r} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}$, donc $V(r) = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$

$$V_1 = V(6,37 \cdot 10^6 + 5,6 \cdot 10^6 [m]) = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6 + 5,6 \cdot 10^6}} = 5'768 [m/s]$$

$$V_2 = V(6,37 \cdot 10^6 + 1,6 \cdot 10^6 [m]) = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6 + 1,6 \cdot 10^6}} = 7'068 [m/s]$$

La variation de vitesse est de $7'068 - 5'768 = 1'300 [m/s]$.



- b) L'énergie potentielle à une altitude h vaut : $E_{pot}(h) = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R_{Terre} + h}$

$$\text{L'énergie cinétique à une altitude } h \text{ vaut : } \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 = \frac{G \cdot M \cdot m}{2 \cdot (R_{Terre} + h)} = -\frac{1}{2} \cdot E_{pot}(h)$$

$$\text{Donc, l'énergie cinétique à une altitude } h \text{ vaut : } E_{mec}(h) = E_{cin}(h) + E_{pot}(h) = \frac{1}{2} \cdot E_{pot}(h)$$

$$E_{pot}(5,6 \cdot 10^6 [m]) = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,96 \cdot 10^{24} \cdot 4,00 \cdot 10^3}{(6,38 + 5,6) \cdot 10^6} = -1,33 \cdot 10^{11} [J]$$

$$E_{cin}(5,6 \cdot 10^6 [m]) = 0,665 \cdot 10^{11} [J]$$

$$E_{mec}(5,6 \cdot 10^6 [m]) = -0,665 \cdot 10^{11} [J]$$

$$E_{pot}(1,6 \cdot 10^6 [m]) = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,96 \cdot 10^{24} \cdot 4,00 \cdot 10^3}{(6,38 + 1,6) \cdot 10^6} = -2,00 \cdot 10^{11} [J]$$

$$E_{cin}(1,6 \cdot 10^6 [m]) = 1,00 \cdot 10^{11} [J]$$

$$E_{mec}(1,6 \cdot 10^6 [m]) = -1,00 \cdot 10^{11} [J]$$

$$\text{La variation d'énergie mécanique est de : } \Delta E_{mec} = E_{mec}(1,6 \cdot 10^6 [m]) - E_{mec}(5,6 \cdot 10^6 [m])$$

$$\Delta E_{mec} = -1,00 \cdot 10^{11} - (-0,665 \cdot 10^{11}) [J] = -0,335 \cdot 10^{11} [J]$$

- c) Le travail de la force de freinage est égal à la variation d'énergie mécanique : $-0,335 \cdot 10^{11} [J]$.

$$\text{Le rayon moyenne est de } 6,38 + \frac{5,6 + 1,6}{2} = 9,98 [Mm] = 9,98 \cdot 10^6 [m].$$

$$\text{Une révolution fait en moyenne : } 2 \cdot \pi \cdot 9,98 \cdot 10^6 [m] = 62,7 \cdot 10^6 [m].$$

La distance totale parcourue vaut $n \cdot 62,7 \cdot 10^6 [m]$. Multiplié par la force de 10,0 [N] cela doit donner la valeur absolue de l'énergie mécanique.

$$\text{Le nombre de révolutions vaut : } n = \frac{0,335 \cdot 10^{11}}{62,7 \cdot 10^6 \cdot 10} = 53,4 \text{ tours.}$$