Exercice 1 :

$\nu_{réelle} = 2'000$ [Hz] ; $V_{onde} = 343$ [m/s] ; $V_{source} = \pm 27{,}8$ [m/s] ; $V_{observateur} = 0$ [m/s].

$$\nu_{apparent} = \nu_{réelle} \cdot \frac{V_{onde} + V_{observateur}}{V_{onde} - V_{source}} = 2'000\ [Hz] \cdot \frac{343[m/s]+0}{343\ [m/s] + -27{,}8\ [m/s]}$$

Lorsque le train se rapproche de l'observateur, la fréquence augmente et vaut :

$\nu_{apparent} = 2'176$ [Hz]

Lorsque le train s'éloigne de l'observateur, la fréquence diminue et vaut :

$\nu_{apparent} = 1'850$ [Hz].

Exercice 2 :

Ici $\frac{\nu_{apparent}}{\nu_{réelle}} = 0{,}90$; $V_{onde} = 343$ [m/s] ; $V_{source} = ?$; $V_{observateur} = 0$ [m/s].

$$\frac{\nu_{apparent}}{\nu_{réelle}} = \frac{V_{onde}}{V_{onde} - V_{source}}\text{, donc } V_{source} = \left(\frac{\nu_{réelle}}{\nu_{apparent}} - 1\right) \cdot V_{onde} = (0{,}90 - 1) \cdot 343 = -34{,}3\ [m/s]$$

L'observateur s'éloigne à une vitesse de 34,3 [m/s] de la source. Le signe négatif indique que l'observateur s'éloigne. Un signe positif aurait indiqué qu'il s'approche de la source.

Exercice 3 :

a) Lorsque la vitesse V de l'observateur relativement à la source est beaucoup plus petite que celle de la lumière (V << c), le rapport $\frac{V^2}{c^2}$ est négligeable devant 1.

Par exemple, si V = 0,1 ×c, alors $\frac{V^2}{c^2} = \frac{1}{100}$ est 100 fois plus petit que 1.

$\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \sqrt{0{,}99} = 0{,}995$. En négligeant ce facteur on fait une erreur d'un demi pourcent.

En négligeant ce facteur, l'effet Dopplet relativiste devient : $\nu_{apparent} = \nu_{réelle} \cdot \frac{c+V}{c}$, qui correspond bien à la formule classique avec $V_{onde} = c$; $V_{source} = 0$ [m/s] ; $V_{observateur} = V$.

b) En prenant la formule relativiste : $\nu_{apparent} = \nu_{réelle} \cdot \frac{c \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{c - V}$ et en négligeant le rapport $\frac{V^2}{c^2}$ devant 1, on obtient : $\nu_{apparent} = \nu_{réelle} \cdot \frac{c}{c-V}$, qui correspond bien à la formule classique avec $V_{onde} = c$; $V_{source} = V$; $V_{observateur} = 0$ [m/s].

c) Si la galaxie s'éloigne de nous, sa vitesse est considérée négativement, donc V < 0, on obtient :

$$\frac{\lambda_{réelle}}{\lambda_{apparent}} = \frac{\nu_{apparent}}{\nu_{réelle}} = \frac{c \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{c - V} = \frac{c}{c-V} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\ .$$

Le premier facteur est plus petit que 1, car c – (vitesse négative) > c. Le second facteur est aussi plus petit que 1. donc $\lambda_{apparent}$ est plus grand que $\lambda_{réelle}$.

c) suite.

Si la galaxie s'éloigne de nous, sa vitesse est considérée négativement et $V = -0{,}10 \times c$, on obtient :

$$\frac{\lambda_{réelle}}{\lambda_{apparent}} = \frac{\nu_{apparent}}{\nu_{réelle}} = \frac{c+V}{c\cdot\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{c-0{,}1\cdot c}{c\cdot\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{0{,}9}{0{,}995} = 0{,}905$$

En négligeant le terme $\frac{V^2}{c^2}$ on obtient un rapport de 0,900, proche de celui obtenu ci-dessus.

On aurait aussi pu calculer :

$$\frac{\lambda_{réelle}}{\lambda_{apparent}} = \frac{\nu_{apparent}}{\nu_{réelle}} = \frac{c\cdot\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{c-V} = \frac{c}{c-V}\cdot\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = \frac{1}{1+0{,}1}\cdot\sqrt{1-0{,}1^2} = 0{,}905$$, qui donne bien sûr le même résultat.

Exercice 4 :

On simplifie en négligeant $\frac{V^2}{c^2}$ devant 1.

Considérons le décalage obtenu sur la raie Hα. $\lambda_{réelle}$ = 656 [nm] ; $\lambda_{apparent}$ = 683 [nm].

Une approximation donne : $\frac{\lambda_{réelle}}{\lambda_{apparent}} = \frac{\nu_{apparent}}{\nu_{réelle}} = \frac{c+V}{c}$, donc

$$V = c\cdot\left(\frac{\lambda_{réelle}}{\lambda_{apparent}}-1\right) = \left(\frac{656\,[nm]}{683\,[nm]}-1\right)\cdot c = -0{,}0395\cdot c = -1{,}19\cdot 10^7\,[m/s]$$

La vitesse négative indique que la galaxie s'éloigne de nous.

L'autre approximation possible donne : $\frac{\lambda_{réelle}}{\lambda_{apparent}} = \frac{\nu_{apparent}}{\nu_{réelle}} = \frac{c}{c-V}$, donc

$$V = c\cdot\left(1-\frac{\lambda_{apparent}}{\lambda_{réelle}}\right) = \left(1-\frac{683\,[nm]}{656\,[nm]}\right)\cdot c = -0{,}0411\cdot c = -1{,}23\cdot 10^7\,[m/s]$$

Le résultat est proche de celui obtenu avec la première approximation.

Si on considère le décalage obtenu sur la raie Hβ. $\lambda_{réelle}$ = 486 [nm] ; $\lambda_{apparent}$ = 507 [nm].

La première approximation donne :

$$V = c\cdot\left(\frac{\lambda_{réelle}}{\lambda_{apparent}}-1\right) = \left(\frac{486\,[nm]}{507\,[nm]}-1\right)\cdot c = -0{,}0414\cdot c = -1{,}24\cdot 10^7\,[m/s]$$

La deuxième approximation donne :

$$V = c\cdot\left(1-\frac{\lambda_{apparent}}{\lambda_{réelle}}\right) = \left(1-\frac{507\,[nm]}{486\,[nm]}\right)\cdot c = -0{,}0432\cdot c = -1{,}30\cdot 10^7\,[m/s]\,.$$

Ces valeurs sont compatibles, mais montre des limitations de précision.