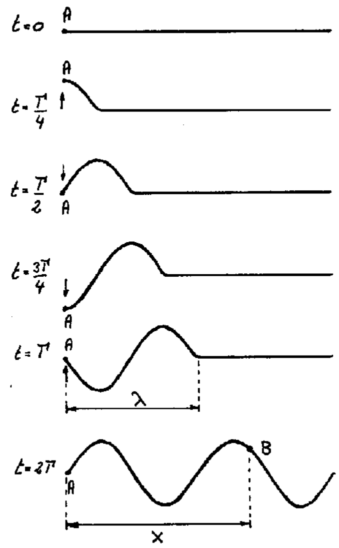
I. Ondes progressives

Une onde progressive est le phénomène résultant de la propagation d'une vibration périodique. Nous nous restreindrons au cas où la vibration est sinusoïdale, car c'est le cas le plus simple et le plus répandu. De plus toute vibration périodique peut être décomposée en une somme de vibrations sinusoïdales (voir plus loin dans le cours).



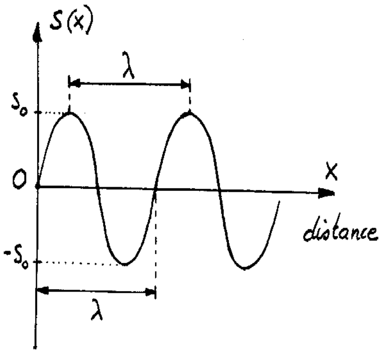
Définissons les grandeurs caractéristiques en considérant une onde progressive se déplaçant le long d'une corde.

La vibration sinusoïdale produite à l'extrémité (point A) de la corde se propage le long de celle-ci à la vitesse V.

Au terme d'une oscillation complète du point A, la vibration a parcouru la distance $\lambda = V \cdot T$ appelée **longueur d'onde** où T est la **période** de la vibration.

Graduellement tous les points de la corde entrent en oscillation. Ils effectuent tous le même mouvement vibratoire de période T mais avec un décalage dans le temps proportionnelle à la distance x qui les sépare du point A.

Deux points du milieu de propagation sont **en phase** s'ils effectuent le même mouvement simultanément.



*La **longueur d'onde λ** est la distance qui sépare deux points consécutifs en phase. C'est la distance parcourue par la vibration en une période.*

$$\lambda = V \cdot T = \frac{V}{\nu} \rightarrow \boxed{V = \lambda \cdot \nu}$$

<u>Remarques:</u>

L'onde progressive possède une double périodicité : périodicité **temporelle** de la vibration caractérisée par la **période** et périodicité **spatiale** caractérisée par la **longueur d'onde**.
La longueur d'onde dépend du milieu par l'intermédiaire de la vitesse de propagation alors que la **fréquence** de l'onde est **indépendante** du milieu de propagation car elle est imposée par la source de l'onde (l'émetteur).
On appelle **front d'onde** toute ligne ou surface dont l'ensemble des points vibrent en phase.

Expression mathématique d'une onde sinusoïdale

La fonction mathématique qui décrit le comportement d'une onde sinusoïdale est appelée **l'équation d'onde** ou **fonction d'onde**. Elle s'obtient en faisant le raisonnement suivant par exemple sur une corde :

Le mouvement du point A est décrit par la fonction : $S(t) = S_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi\right)$.

Chaque point de la corde est affecté par le même mouvement de vibration, mais avec un retard Δt qui est fonction de son éloignement x du point A. Si la vibration se propage à la vitesse V alors le retard $\Delta t = \frac{x}{V}$.

L'amplitude du point A ($x = 0$) à l'instant t est donné par : $S(0,t) = S_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi\right)$.

Au même instant t, le point B, situé à une distance x du point A, est dans la même position que se trouvait le point A au temps $t - \Delta t$: $S(x,t) = S_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot (t - \Delta t) + \varphi\right)$.

$$S(x,t) = S_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \left(t - \frac{x}{V}\right) + \varphi\right) = S_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x + \varphi\right)$$

On préfère écrit : $\boxed{S(x,t) = S_0 \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t + \varphi)}$ avec :

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \nu$ la **pulsation** ou fréquence angulaire de l'onde

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ le **nombre d'onde**

$\varphi =$ la **phase**

On obtient alors, après ces quelques manipulations algébriques, la fonction mathématique qui donne pour chaque point de la corde son amplitude à chaque instant. C'est donc une fonction qui dépend de deux variables, x pour la position et t pour l'instant considéré.

> ***L'équation d'onde** ou **la fonction d'onde** caractéristique d'une onde sinusoïdale se propageant à la vitesse V le long d'un axe x (sens positif) s'écrit:*
>
> $$S(x,t) = S_0 \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t + \varphi)$$
>
> *avec* $V = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu = \frac{\omega}{k}$

Remarques:

- En **fixant la variable** t, la fonction d'onde se réduit à une fonction à une seule variable x, on obtient alors la forme que prend la corde à l'instant t. (photo de la corde à l'instant t)
- En **fixant la variable** x, la fonction d'onde se réduit à une fonction à une seule variable t qui décrit le mouvement au cours du temps du point situé à la coordonnée x.
- Si l'onde **se déplace en sens inverse** le long de l'axe x (onde **rétrograde**) seul le signe de k change: On remplace $-k$ par $+k$.

II. Principe de superposition

Que se passe-t-il lorsque deux ondes se croisent, par exemple, deux vagues sur l'eau ou deux oscillations dans une corde ?

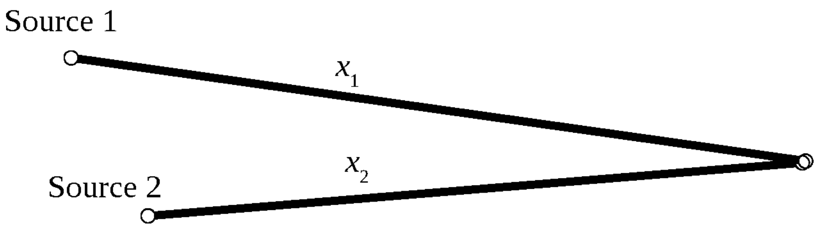
Le **principe de superposition** dit simplement que dans le cas où deux ondes de même nature se trouvent au même endroit x à un instant t donné, alors les deux ondes s'additionnent et l'amplitude résultante est la somme des amplitudes des deux ondes.

<u>Exemple :</u>
Soient les deux ondes d'équation d'ondes suivantes :

$S_1(x,t) = S_{01} \cdot \sin(k \cdot x_1 - \omega \cdot t)$ x_1 = la distance entre la source et l'endroit du croisement.

$S_2(x,t) = S_{02} \cdot \sin(k \cdot x_2 - \omega \cdot t)$ x_2 = la distance entre la source et l'endroit du croisement.

On a pris le cas particulier mais fréquent d'avoir la même pulsation et le même nombre d'onde pour les deux ondes.



L'amplitude résultante au croisement est : à compléter...

$$S_{rés}(x,t) = S_{01} \cdot \sin(k \cdot x_1 - \omega \cdot t) + S_{02} \cdot \sin(k \cdot x_2 - \omega \cdot t)$$

Prenons le cas particulier où $S_{01} = S_{02}$.
Utilisez la table CRM pour transformer une somme de sinus en produit, pour décrire l'amplitude résultante :

$$S_{rés}(x,t) = 2 \cdot S_0 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{x_1 - x_2}{2}\right) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} - \omega \cdot t\right)$$

Que constatez-vous ?

Que se passe-t-il lorsque $k \cdot (x_1 - x_2)$ égale multiple impair de π ?

III. Interférences lumineuses

Lorsque deux ondes lumineuses de même fréquence parviennent en un point de l'espace, leur superposition produit une interférence qui dépend de leur déphasage $\Delta\varphi$.

Il se produit :

Une <u>interférence constructive</u> si les ondes sont en **phase.**

$$\Delta\varphi = j\cdot 2\pi \qquad j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Une <u>interférence destructive</u> si les ondes sont en **opposition de phase.**

$$\Delta\varphi = \left(j+\frac{1}{2}\right)\cdot 2\pi \qquad j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

La cause du déphasage peut-être, par exemple:

- une <u>différence de chemin</u> $\Delta\ell$

$$\Delta\varphi = k\cdot\Delta\ell = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\Delta\ell$$

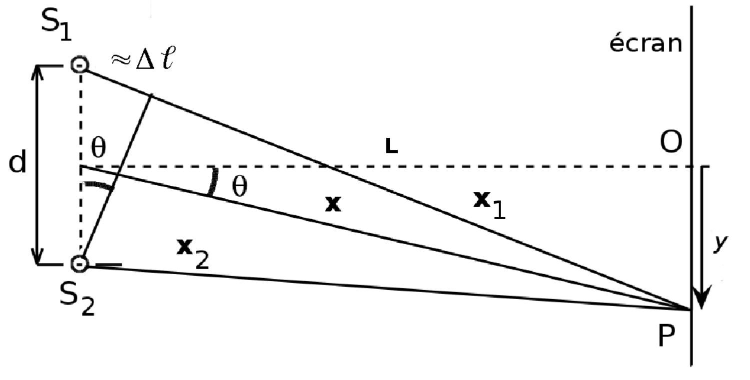
avec: $\Delta\ell = j\cdot\lambda$ $\rightarrow$ **interférence constructive**

$\Delta\ell = \left(j+\frac{1}{2}\right)\cdot\lambda$ $\rightarrow$ **interférence destructive**

A.- Interférences spatiales produites par deux sources synchrones

La lumière issue de deux sources ponctuelles synchrones (oscillations à la même fréquence et en phase) produit des interférences caractéristiques sur un écran.
Pour avoir deux sources lumineuses synchrones on utilise un faisceau laser que l'on dirige sur une double fente car la lumière du laser est monochromatique (une seule fréquence) et cohérente (toutes les ondes lumineuses produites sont en phase).

Calculs des conditions pour obtenir des interférences constructives et destructives :



Pour observer, sur l'écran, une interférence constructive au point P (OP = y), il faut que :

$$\Delta\varphi = k\cdot\Delta\ell = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\Delta\ell = j\cdot 2\pi$$

donc la différence des chemins parcourus est :

$$\Delta\ell = x_1 - x_2 = j\cdot\lambda$$

Par Pythagore exprimons x_1^2 et x_2^2 en fonction de y, L et d :

$$x_1^2 = L^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad x_2^2 = L^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2$$

Développons

$$x_1^2 = L^2 + y^2 + d \cdot y + \frac{d^2}{4} \quad \text{et} \quad x_2^2 = L^2 + y^2 - d \cdot y + \frac{d^2}{4}$$

La différence donne : $x_1^2 - x_2^2 = 2 \cdot d \cdot y$

Par ailleurs, en utilisant une identité remarquable on obtient : $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2)$

Ainsi, on obtient : $(x_1 - x_2) = \dfrac{2 \cdot d \cdot y}{(x_1 + x_2)}$

Si $d << L$ nous pouvons faire l'approximation : $x_1 + x_2 \cong 2\,x$

La différence de chemin parcourue par les deux ondes est donc : $\Delta \ell = x_1 - x_2 = \dfrac{d \cdot y}{x}$

Comme $\dfrac{y}{x} = \sin(\theta)$, on obtient la simple relation : $\boxed{\Delta \ell = d \cdot \sin(\theta)}$.

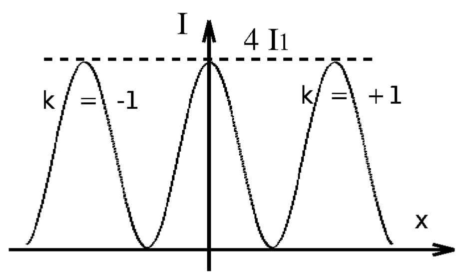
Conditions pour obtenir une interférence

- constructive : $d \cdot \sin(\theta_j) = j \cdot \lambda$
- destructive : $d \cdot \sin(\theta_j) = \left(j + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda$

avec $j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Remarques :

1) On montre que l'énergie contenue dans une portion d'onde est proportionnelle au carré de l'amplitude S_0. **Énergie ~ S_0^2** .
2) On définit **l'intensité lumineuse** comme étant égale à l'énergie contenue dans une portion d'onde durant un petit intervalle de temps. Pour une onde lumineuse, elle s'exprime en joules par seconde par m^2, donc l'**unité de l'intensité lumineuse I** est : $\left[\dfrac{W}{m^2}\right]$.
3) Aux points d'interférences constructives l'intensité lumineuse s'obtient à partir des amplitudes:



$S_{01} = S_{02}$

$S(t) = S_{01} \cdot \sin(\omega\, t) + S_{02} \cdot \sin(\omega\, t) = 2 \cdot S_{01} \cdot \sin(\omega\, t)$

$I \sim S_0^2 = (2 \cdot S_{01})^2 = 4 \cdot S_{01}^2 = 4 \cdot I_1$

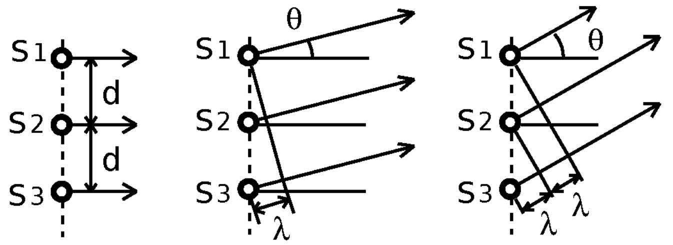
où I_1 est l'intensité lumineuse produite par l'une des sources au point P.

Aux points d'interférences destructives l'intensité lumineuse est nulle. En moyenne elle est égale à la somme des intensités lumineuses des sources, ce qui satisfait le principe de conservation d'énergie.

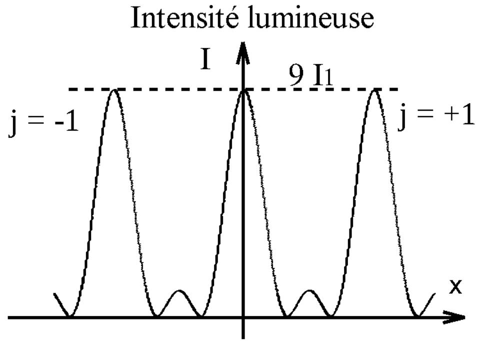
B.- Interférences spatiales de plusieurs sources: réseaux

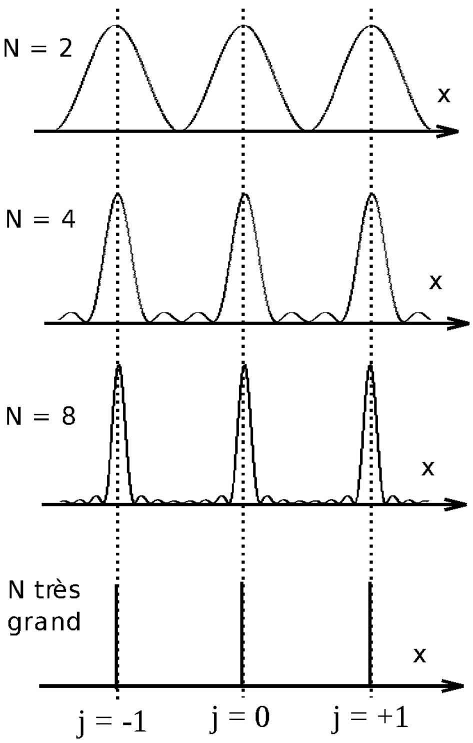
On nomme <u>réseau</u> un alignement de N sources ponctuelles de lumière, séparées entre elles par une distance d appelée <u>constante du réseau</u>. Pour simplifier, l'écran est placé à une distance L >> d. De ce fait, les rayons qui produisent la figure d'interférence sur l'écran peuvent être considérés comme parallèles.

Exemple : $N = 3$ $S01 = S02 = S03$ $I_{01} = I_{02} = I_{03} \sim S01^2$



max. principal $\underline{j = 0}$ $I = 9\,I_1$ max.secondaire $I = I_1$ max. principal $\underline{j = 1}$ $I = 9\,I_1$





- En augmentant le nombre de sources N la condition sur les maxima principaux reste inchangée :

$$\boxed{d \cdot \sin(\theta_j) = j \cdot \lambda \qquad j \in \mathbb{Z}}$$

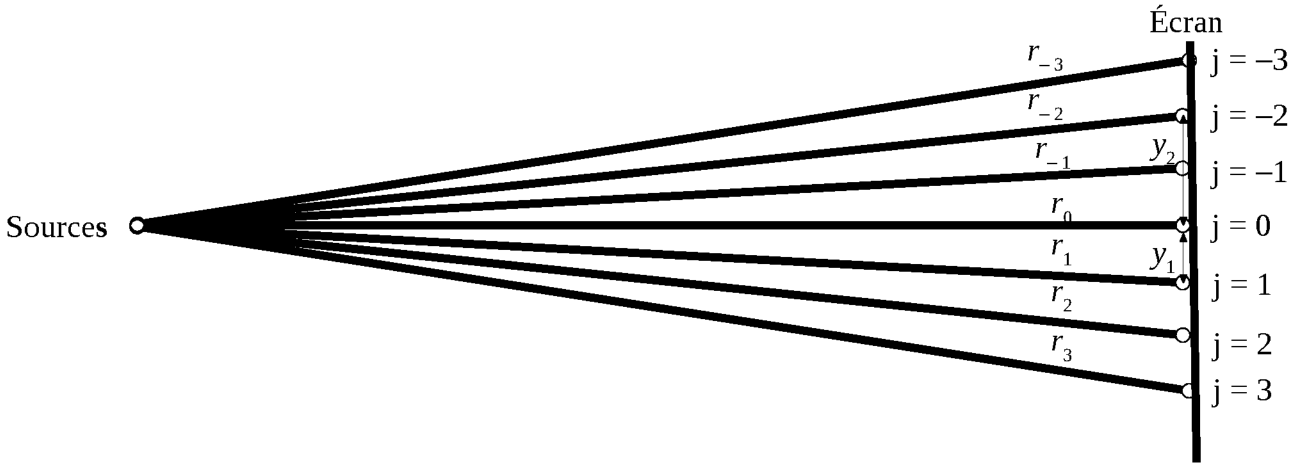
- L'intensité des maxima principaux devient de plus en plus grande. De plus ils deviennent de plus en plus fins.

- Le nombre de maxima secondaires est de $N - 2$.

Position des maxima principaux :

$$\sin(\theta_j) = \frac{y_j}{r_j}, \text{ donc } \boxed{d \cdot \frac{y_j}{r_j} = j \cdot \lambda \qquad j \in \mathbb{Z}}$$

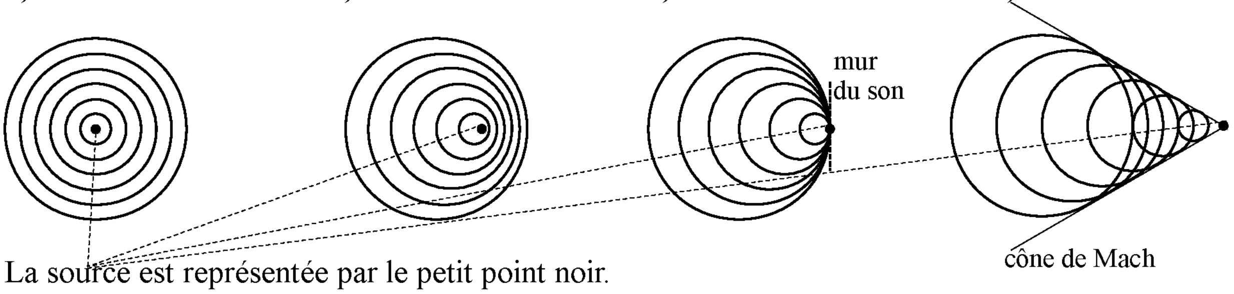
r_j = distance entre les sources, qui sont presque au même endroit, et le $j^{\text{ème}}$ maximum.
y_j = distance sur l'écran entre le point central ($j = 0$), et le $j^{\text{ème}}$ maximum.



IV. Ondes émises par une source en mouvement

Étudions le cas d'une source ponctuelle émettant des ondes dans un milieu matériel. Considérons le cas où cette *source se déplace à vitesse constante* $\mathbf{V_s}$ relativement au milieu. Notons $\mathbf{V_o}$ la vitesse de l'onde. Dessinons les fronts d'onde dans un cas à deux dimensions. Dans un cas à trois dimensions, les fronts d'ondes sont des sphères, mais le phénomène est similaire.

a) Cas où $V_s = 0$ **b) Cas où $V_s < V_o$** **c) Cas où $V_s = V_o$** **d) Cas où $V_s > V_o$**



La source est représentée par le petit point noir.
Les fronts d'ondes sont représentés par les cercles.

a) Quand la source ne se déplace pas dans le milieu, $V_s = 0$, tous les fronts d'onde sont concentriques. Quel que soit l'endroit ou se placerait un observateur immobile par rapport au milieu, il observerait le même nombre d'oscillations de la perturbation par seconde. Donc la fréquence de l'onde est indépendante de l'endroit où il se trouve.

b) Quand la source se déplace dans le milieu à une vitesse inférieur à celle de l'onde, $V_s < V_o$, tous les fronts d'onde contiennent la source et ils ne se croisent pas.
Quand la source se rapproche d'un observateur immobile par rapport au milieu, il observe plus d'oscillations de la perturbation par seconde que celles émises par la source. Donc la fréquence de l'onde augmente à l'endroit où se trouve l'observateur. Pour des ondes sonores, cela s'observe par une augmentation de la tonalité du son.
Quand la source s'éloigne d'un observateur immobile par rapport au milieu, il observe moins d'oscillations de la perturbation par seconde que celles émises par la source. Donc la fréquence de l'onde diminue à l'endroit où se trouve l'observateur. Pour des ondes sonores, cela s'observe par une diminution de la tonalité du son.
Vous pouvez observer ce phénomène quand une voiture de pompier ou une ambulance se rapproche de vous, vous dépasse, puis s'éloigne de vous.
Ce phénomène de changement de fréquence d'une onde s'appelle **l'effet Doppler**.

c) Quand la source se déplace dans le milieu à la même vitesse que celle de l'onde, $V_s = V_o$, tous les fronts d'onde se croisent sur la source. A cet endroit, toutes les perturbations s'additionnent. Pour des ondes sonores, cela correspond à une très grosse pression, qui forme ce qu'on appelle **le mur du son.**

d) Quand la source se déplace dans le milieu à une vitesse supérieur à celle de l'onde, $V_s > V_o$, tous les fronts d'onde se croisent et aucun ne contient la source. Dans ce cas, les fronts d'ondes forment un cône dont la source est le sommet. Sur ce cône, appelé **cône de Mach**, la perturbation a une intensité élevée. Un exemple typique d'un tel cône est fourni par les avions supersoniques. Leur bruit est localisé à l'intérieur d'un cône qu'ils traînent derrière eux. Sur le cône lui-même, la perturbation est si intense, que le passage de celle-ci sur un observateur est ressenti comme une détonation et peut casser des vitres.

Dans un cas plus général, l'observateur se déplace également.
Si on se limité au cas où les trois vitesses sont dans la même direction, (pas forcément le même sens), avec les conventions suivantes :
V_{onde} est toujours positive.
$V_{observateur}$ est positive lorsque l'observateur se déplace vers la source, négative sinon.
V_{source} est positive lorsque la source se déplace vers l'observateur, négative sinon.

La fréquence $\nu_{apparent}$ observée par l'observateur vaut : $\boxed{\nu_{apparent} = \nu_{réelle} \cdot \frac{V_{onde} + V_{observateur}}{V_{onde} - V_{source}}}$

Cela n'est pas vrai pour une onde électromagnétique, car elle ne se déplace pas relativement à un milieu.
De plus, l'effet relativiste de dilatation du temps intervient. dans ce cas, la fréquence $\nu_{apparent}$ observée par l'observateur vaut :

$$\boxed{\nu_{apparent} = \nu_{réelle} \cdot \frac{c+V}{c \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}}$$

V est la vitesse de l'observateur relativement à celle de la source.
Elle est positive lorsque la source se déplace vers l'observateur,
négative lorsque la source s'éloigne de l'observateur.
c est la vitesse de la lumière.

Elle ressemble à la formule classique, avec V_{source} = 0 [m/s].

Le facteur $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ provient d'un effet relativiste de dilatation du temps du côté de l'observateur.

<u>Exercice :</u>

Montrez que l'effet Doppler s'écrit aussi : $\nu_{apparent} = \nu_{réelle} \cdot \frac{c \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{c - V}$

Elle ressemble à la formule classique, avec $V_{observateur}$ = 0 [m/s].

Le facteur $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ provient d'un effet relativiste de dilatation du temps du côté de la source.

V. Puissance et intensité sonores

Les ondes transportent de l'énergie et il est donc normal de parler de puissance acoustique P, mesurée en Watts. Une grandeur souvent utilisée est l'intensité sonore, définie comme la valeur moyenne de la puissance par unité de surface S. L'unité SI de l'intensité sonore I est donc [W/m²].

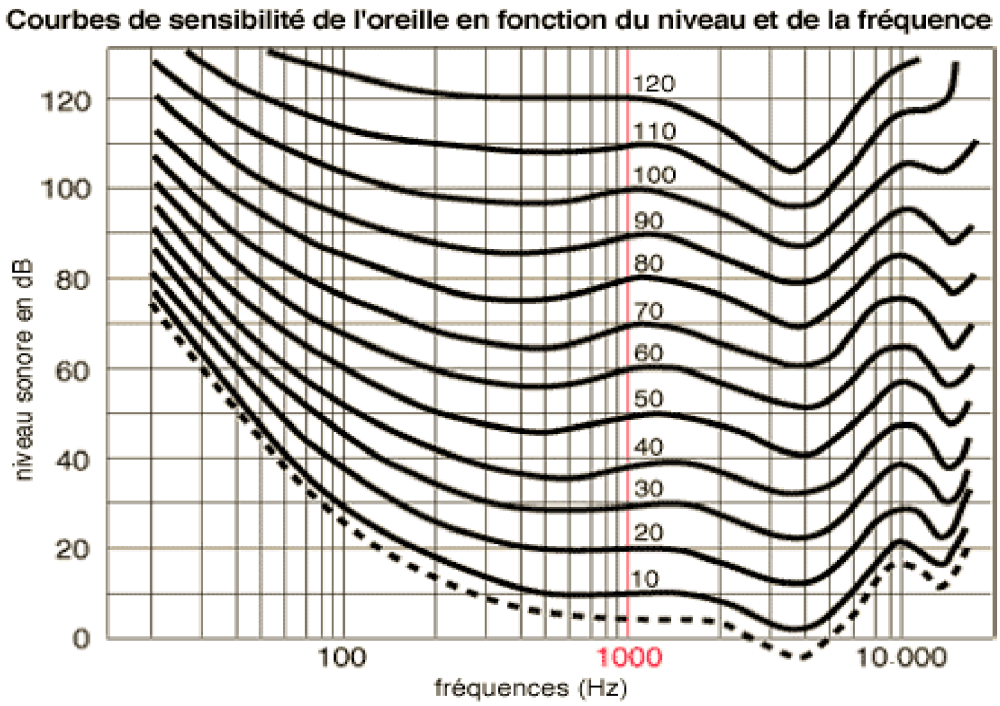
Sans dissipation d'énergie, la relation entre ces trois grandeurs est : $I = \frac{P}{S}$.

L'intensité la plus faible que l'oreille humaine peut déceler est de l'ordre de $I_0 = 10^{-12}$ [W/m²]. Elle dépend cependant de la fréquence écoutée. Le seuil de douleur est atteint pour une intensité de l'ordre de 1 [W/m²]. À l'intérieur de ces limites, la sensation auditive varie à peu près comme le logarithme de l'intensité sonore (loi de Fechner). La prodigieuse extension de la sensibilité de l'oreille ainsi que la loi de Fechner ont conduit à construire une autre échelle pour mesurer l'intensité sonore :

$$\beta = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

I_0 a été choisi arbitrairement comme le seuil de la sensibilité moyen de la population pour une fréquence de 1000 [Hz]. Ce seuil fut mesuré à $I_0 = 1 \cdot 10^{-12}$ [W/m²]. L'unité choisie pour log (I/I_0) a été le bel (du nom de l'inventeur du téléphone W. Bell). Plus tard on jugea plus pratique de mesurer en dixièmes de bels, c'est à dire en décibels [dB].

Le schéma ci-dessous reproduit les courbes d'isosonie de Fletcher et Munson (1918). Elles montrent comment les sons graves demandent à être entendus à un niveau sonore plus élevé que les sons aigus pour être perçus avec la même intensité.



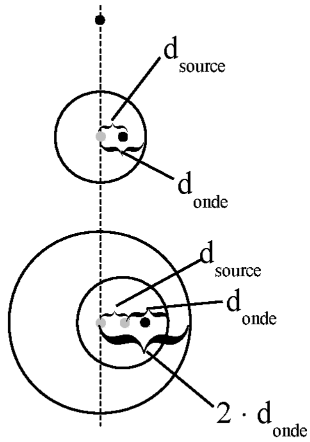
L'intensité I du son dépend du carré de l'amplitude de la variation de pression p. Pour une source ponctuelle, cette intensité diminue avec la distance car la surface du front d'onde (sphère) augmente comme le carré de la distance (rayon de la sphère) et que l'onde est amortie par le milieu ambiant (transformation de l'énergie vibratoire en chaleur lors des chocs entre les particules). ($I \approx (p / 20)^2$).

I [W/m²]	$1 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-4}$	1
p [N/m²]	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{1}$
β [dB]	0 (seuil d'audibilité)	40	80	120 (seuil de la douleur)

La fréquence $\nu_{apparent}$ observée par l'observateur vaut : $\nu_{apparent} = \nu_{réelle} \cdot \frac{V_{onde} + V_{observateur}}{V_{onde} - V_{source}}$

<u>Montrons cette formule.</u>

1) Considérons un premier cas où *l'observateur est immobile* $V_{observateur} = 0$ [m/s].



Notons $T_{réelle}$ la période de l'onde émise par la source. $\nu_{réelle} = 1 / T_{réelle}$
Au temps $t = 0$ [s], la source émet un premier front d'onde.

Au temps $t = T_{réelle}$, la source émet un deuxième front d'onde.
Le premier front d'onde s'est déplacé d'une distance de $d_{onde} = V_{onde} \cdot T_{réelle}$.
La source et s'est déplacée d'une distance de $d_{source} = V_{source} \cdot T_{réelle}$.

Au temps $t = 2 \cdot T_{réelle}$, la source émet un troisième front d'onde.
Le premier front d'onde s'est déplacé d'une distance de $2 \cdot d_{onde}$.
Le deuxième front d'onde s'est déplacé d'une distance de : $d_{source} + d_{onde}$

Les points gris sont les positions des sources lors de l'émission du premier et deuxième front d'onde.

Donc la distance entre le deuxième front d'onde et le premier front d'onde égale la distance parcourue par le premier front d'onde moins celle parcourue par le second front d'onde. Elle est égale à $2 \cdot d_{onde} - (d_{source} + d_{onde})$
qui est égale à $d_{onde} - d_{source} = V_{onde} \cdot T_{réelle} - V_{source} \cdot T_{réelle} = (V_{onde} - V_{source}) \cdot T_{réelle}$.

La fréquence apparente égale l'inverse du temps entre deux fronts d'onde, qui est égal à la vitesse de l'onde sur la distance entre deux fronts d'ondes, donc :

$$\nu_{apparent} = \frac{V_{onde}}{(V_{onde} - V_{source}) \cdot T_{réelle}} = \nu_{réelle} \cdot \frac{V_{onde}}{V_{onde} - V_{source}} .$$

C'est la formule ci-dessus pour un observateur immobile.

2) Considérons un deuxième cas où *la source est immobile* $V_{source} = 0$ [m/s].
La distance entre deux fronts d'ondes est de : $\lambda_{onde} = V_{onde} \cdot T_{réelle}$
Relativement au front d'onde, l'observateur se déplace à une vitesse : $V_{observateur} = V_{onde} + V_{observateur}$.
Pour passer d'un front d'onde au suivant, il lui faut donc un temps : $T_{obsservateur} = \lambda_{onde} / (V_{onde} + V_{observateur})$

Donc $$\nu_{apparent} = \frac{1}{T_{observateur}} = \frac{V_{onde} + V_{observateur}}{V_{onde} \cdot T_{réelle}} = \nu_{réelle} \cdot \frac{V_{onde} + V_{observateur}}{V_{onde}}$$

C'est la formule ci-dessus pour une *source immobile*.

On aurait aussi pu déterminer le temps T_{obs} en considérant que la somme du déplacement de l'observateur et du déplacement du front d'onde égale à la distance entre deux fronts d'ondes. On aurait eu : $V_{obs} \cdot T_{obs} + V_{onde} \cdot T_{obs} = \lambda_{onde}$, qui donne le même résultat que précédemment.

3) Pour montrer la formule finale, il suffit de remarquer que pour l'observateur, une source qui se déplace est identique à une source immobile, qui émet à une fréquence égale à :

$$\nu_{source\ immobile} = \nu_{réelle} \cdot \frac{V_{onde}}{V_{onde} - V_{source}}$$ selon la première formule établie.

On est donc ramené au cas de la deuxième formule établie, *d'un observateur mobile et d'une source immobile*. En remplaçant $\nu_{réelle}$ dans la deuxième formule établie par $\nu_{source\ immobile}$, on obtient la formule annoncée.