Oscillateurs harmoniques couplés

Buts de l'expérience

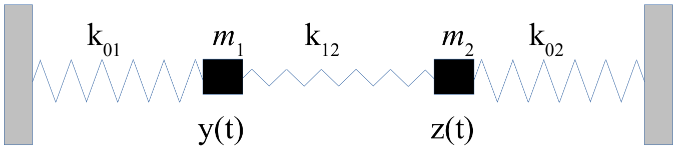
Le but de l'expérience est d'étudier deux oscillateurs harmoniques couplés et les relations entre diverses périodes.

Matériel à disposition

On dispose de deux billes en acier reliés chacun à un fil. L'autre extrémité de chacun de ces fils est relié à un troisième fil don chacune de ses extrémités est relié à une planche faisant office de "plafond". Le tout de manière symétrique. Faites un schéma.

Éléments de théorie

Le système est équivalent au schéma ci-dessous :



Dans cette expérience le cas $m_1 = m_2 = m$ et $k_{01} = k_{02} = k$ sera étudié ici, pour simplifier.

Notons :

y(t) = l'écart à l'équilibre de la masse $m_1 = m$.

z(t) = l'écart à l'équilibre de la masse $m_2 = m$.

k/m = k / m = le coefficient de rappel du ressort n°1 ou du ressort 2 divisé par la masse m.

k_{12}/m = k_{12} / m = le coefficient de rappel du ressort de couplage divisé par la masse m.

Écrivez la force résultante agissant sur la masse m_1.

Écrivez la force résultante agissant sur la masse m_2.

Justifiez le système d'équation différentielle du mouvement donné ci-dessous :

Équation différentielle décrivant le mouvement : (la dérivée se fait par rapport au temps)

$$y'' = -\mathrm{k/m}\cdot y + \mathrm{k}_{12}/\mathrm{m}\cdot(z-y) \quad \text{et}$$

$$z'' = -\mathrm{k/m}\cdot z - \mathrm{k}_{12}/\mathrm{m}\cdot(z-y)$$

On constate de grosses simplifications en faisant la somme, et la différence de ces deux équations.

$$(z+y)'' = -\mathrm{k/m}\cdot(z+y) \quad \text{et}$$

$$(z-y)'' = -(\mathrm{k/m}+2\cdot\mathrm{k}_{12}/\mathrm{m})\cdot(z-y)$$

Vérifiez que la solution générale de ces deux équations différentielles est :

$$z(t)+y(t) = 2\cdot A\cdot\cos(\omega\cdot t)+2\cdot B\cdot\sin(\omega\cdot t) \quad \text{où} \quad \omega = \sqrt{\mathrm{k/m}}\,.$$

$$z(t)-y(t) = 2\cdot\tilde{A}\cdot\cos(\tilde{\omega}\cdot t)+2\cdot\tilde{B}\cdot\sin(\tilde{\omega}\cdot t) \quad \text{où} \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\mathrm{k/m}+2\cdot\mathrm{k}_{12}/\mathrm{m}}\,.$$

(Le facteur 2 est pour simplifier la suite.)

Par addition et soustraction, on obtient la solution générale :

$$y(t) = A\cdot\cos(\omega\cdot t)+B\cdot\sin(\omega\cdot t)-\tilde{A}\cdot\cos(\tilde{\omega}\cdot t)-\tilde{B}\cdot\sin(\tilde{\omega}\cdot t)$$

$$z(t) = A\cdot\cos(\omega\cdot t)+B\cdot\sin(\omega\cdot t)+\tilde{A}\cdot\cos(\tilde{\omega}\cdot t)+\tilde{B}\cdot\sin(\tilde{\omega}\cdot t)$$

A ; B ; $\tilde{A}$; $\tilde{B}$ sont quatre paramètres dépendant des conditions initiales.

Rappel de la solution générale :

$$y(t)=A\cdot\cos(\omega\cdot t)+B\cdot\sin(\omega\cdot t)-\tilde{A}\cdot\cos(\tilde{\omega}\cdot t)-\tilde{B}\cdot\sin(\tilde{\omega}\cdot t) \qquad \omega=\sqrt{k/m}$$

$$z(t)=A\cdot\cos(\omega\cdot t)+B\cdot\sin(\omega\cdot t)+\tilde{A}\cdot\cos(\tilde{\omega}\cdot t)+\tilde{B}\cdot\sin(\tilde{\omega}\cdot t) \qquad \tilde{\omega}=\sqrt{k/m+2\cdot k_{12}/m}$$

Cas particuliers intéressants :

Oscillation synchrone :

$A=1\,;\quad B=\tilde{A}=\tilde{B}=0$

$y(t)=A\cdot\cos(\omega\cdot t)$

$z(t)=A\cdot\cos(\omega\cdot t)$

Les deux oscillateurs oscillent de manière synchrone. La mesure de la période T de cette oscillation permet de déterminer la période T, la fréquence ν et la pulsation ω et donc k/m.

Oscillation en opposition de phase :

$\tilde{A}=1\,;\quad A=B=\tilde{B}=0$

$y(t)=-\tilde{A}\cdot\cos(\tilde{\omega}\cdot t)$

$z(t)=\ \tilde{A}\cdot\cos(\tilde{\omega}\cdot t)$

Les deux oscillateurs oscillent en opposition, avec une fréquence légèrement plus grande, puisque $\tilde{\omega}>\omega$.

La mesure de la période de cette oscillation permet de déterminer $\tilde{\omega}$ et donc $k/m + 2 \cdot k_{12}/m$.

Cas de transfert d'énergie, c'est la cas le plus intéressant :

$A=\tilde{A}=1\,;\quad B=\tilde{B}=0$

$y(t)=\cos(\omega\cdot t)-\cos(\tilde{\omega}\cdot t)$ qui s'écrit : $y(t)=2\cdot\sin\left(\frac{\tilde{\omega}-\omega}{2}\cdot t\right)\cdot\sin\left(\frac{\tilde{\omega}+\omega}{2}\cdot t\right)$ Justifiez-le

$z(t)=\cos(\omega\cdot t)+\cos(\tilde{\omega}\cdot t)$ qui s'écrit : $z(t)=2\cdot\cos\left(\frac{\tilde{\omega}-\omega}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\tilde{\omega}+\omega}{2}\cdot t\right)$ Justifiez-le

Chaque masse suit une oscillation rapide de pulsation $\frac{\tilde{\omega}+\omega}{2}$ ayant une amplitude modulée par une oscillation lente de pulsation $\frac{\tilde{\omega}-\omega}{2}$.

L'amplitude d'oscillation de chaque oscillateur varie lentement avec une pulsation $\frac{\tilde{\omega}-\omega}{2}$ pour alterner entre une valeur maximale et zéro. De plus les amplitudes d'oscillations des deux masses sont déphasées de telle sorte que lorsqu'une est maximale, l'autre est nulle.

Une conclusion :

La fréquence de transfert d'énergie d'une oscillation à l'autre est égale à la différence des fréquences "d'oscillation en opposition de phase" moins "oscillation synchrone" !

Ceci sera à vérifier expérimentalement.

Manipulations

Toutes les mesures devront être faites avec une grande précision. Pour cela, il est bon de mesurer le temps d'une vingtaine d'oscillations (ou plus).
Il faudra répéter plusieurs fois chaque mesure pour vérifier qu'elles sont correctes et pour déterminer leur incertitude.

Placez le matériel de telle sorte que les billes sont dans des conditions symétriques.

1) Faites osciller une bille en tenant l'autre immobile et mesurez sa période d'oscillation.
2) Faites osciller l'autre bille en tenant la première immobile et mesurez sa période d'oscillation.
3) Faites osciller les deux billes de manière synchrone et mesurez la période d'oscillation.

Ces trois périodes d'oscillations devraient être idéalement les mêmes.
La troisième est plus importante pour la suite.

4) Déterminez la fréquence et la pulsation d'oscillation dans ce cas. Déduisez-en la valeur de k/m.

5) Faites osciller les deux billes en opposition et mesurez la période d'oscillation.
6) Déterminez la fréquence et la pulsation d'oscillation dans ce cas. Déduisez-en la valeur de k_{12}/m.

7) Lancez une bille en ayant l'autre immobile et mesurez le temps de transfert d'amplitude d'oscillation d'une bille à l'autre, puis retour à l'oscillation de la première bille.
   Remarquez que ce temps ne correspond qu'à la moitié de la période de transfert d'amplitude d'oscillation.
8) Déterminez la fréquence et la pulsation de se transfert d'oscillation.

Présentation des résultats

Pour chaque manipulation, indiquez clairement les temps mesurés, la période, la fréquence et la pulsations que vous en déduisez. Indiquez chaque fois l'incertitude.

Vérifiez la théorie qui relie trois pulsations déterminées lors des manipulations.

Amélioration de la précision lors de la détermination de k_{12}/m :

Justifiez que : $2\cdot k_{12}/m = \tilde{\omega}^2 - \omega^2 = (\tilde{\omega}-\omega)\cdot(\tilde{\omega}+\omega) = (\tilde{\omega}-\omega)\cdot(2\cdot\omega+(\tilde{\omega}-\omega))$.

$\tilde{\omega}-\omega$ et ω étant déterminés, utilisez l'égalité ci-dessus pour déterminer k_{12}/m et son incertitude avec plus de précision que celle obtenue précédemment.