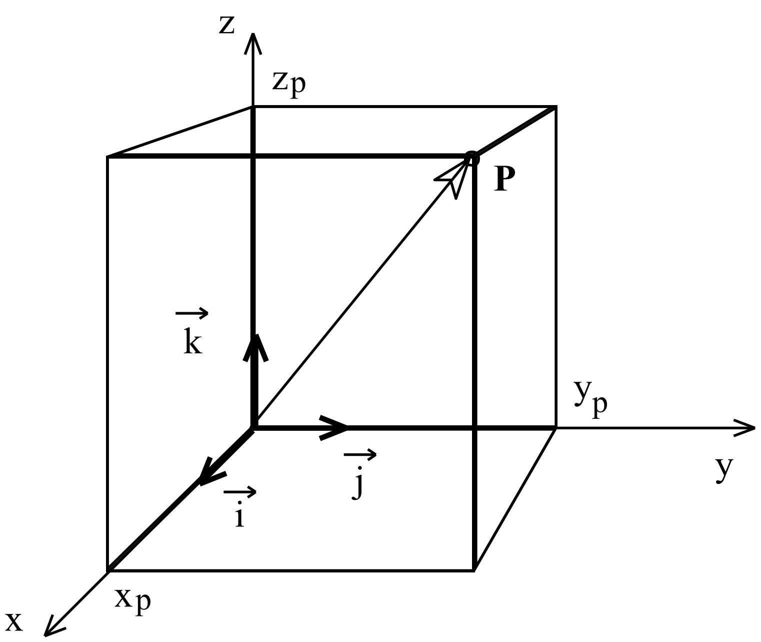
Cinématique 3OS

1. Mouvement et référentiel

Pour décrire le mouvement d'un corps, il faut pouvoir repérer sa position à chaque instant par rapport un système de référence, un **référentiel**. L'idéal serait évidemment de trouver dans l'espace quelque chose d'immobile et d'étudier les mouvements par rapport à ce quelque chose (mouvements absolus). Mais tout est en mouvement dans l'univers...
Il faut donc étudier les mouvements par rapport à des référentiels qui sont eux-mêmes en mouvement (mouvements relatifs). Les lois de la mécanique sont énoncées pour des **référentiels d'inertie**, c'est-à-dire des systèmes de référence dont la vitesse propre est constante en grandeur et en direction, donc sans accélération (mouvement rectiligne uniforme).
Les physiciens utilisent souvent le "référentiel du laboratoire" pour étudier les phénomènes à l'échelle humaine. Il est considéré **en première approximation,** comme un système d'inertie. Il ne l'est cependant pas rigoureusement, puisque la terre effectue un double mouvement de rotation et non pas un mouvement rectiligne uniforme.

1.1 Coordonnées spatiales

Nous vivons dans un espace euclidien à trois dimensions. Dans un tel espace, la position d'un point P est repérée par un **vecteur position** r partant d'une origine fixe O. Si l'on prend un système d'axes orthonormés Ox, Oy et Oz, le vecteur r a trois composantes numériques x_p, y_p et z_p appelées coordonnées cartésiennes du point P.



1.2 Décrire le mouvement

Lorsqu'un **mobile** se déplace, le vecteur position associé varie au cours du temps.

La connaissance de $\vec{r}(t)$ suffit à décrire le mouvement : on peut en déduire la trajectoire, la vitesse et l'accélération du mobile.

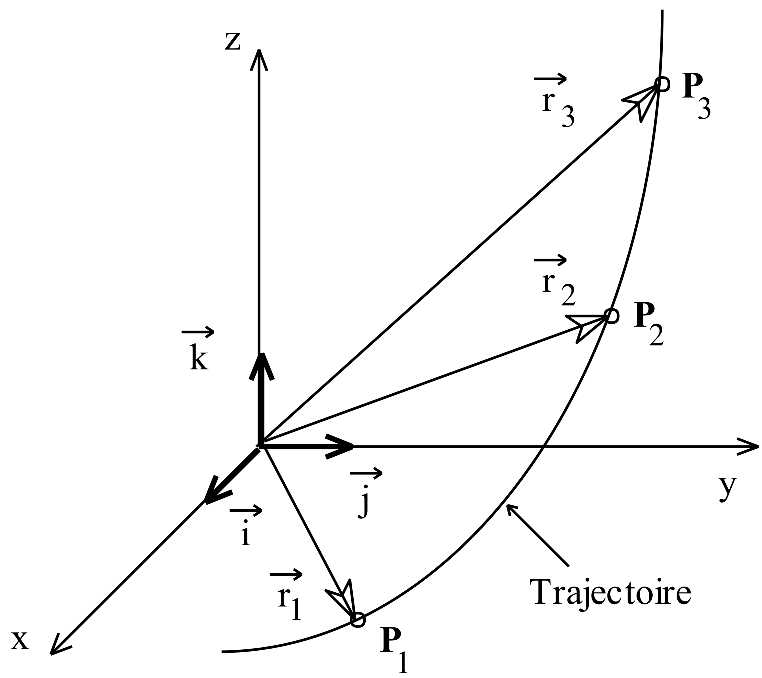
Exemple: $\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} + (t+3)\,\vec{j} + (-5t^2 + 10t)\,\vec{k}$

On peut également écrire ceci sous forme d'un système de 3 équations donnant l'évolution des coordonnées du mobile en fonction du temps (équations horaires):

$x = 2t$
$y = t + 3$
$z = -5t^2 + 10t$

Trajectoire

La **trajectoire** est le lieu des points occupés successivement par le mobile. Il s'agit donc d'une courbe dans l'espace dont l'équation peut être obtenue par élimination du temps dans le système d'équations ci-dessus.

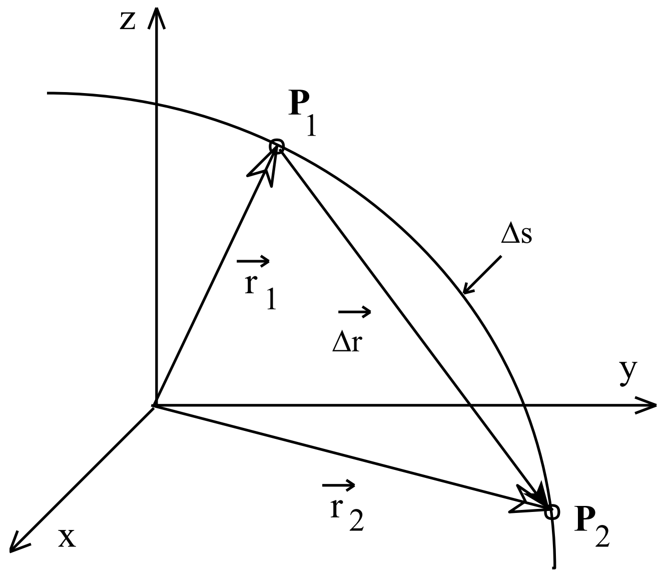


2. Vitesse

Considérons un mobile en mouvement le long d'une trajectoire.

Au temps t_1, le mobile se trouve au point P_1, repéré par le vecteur position $\vec{r}_1$

Au temps $t_2 = t_1 + \Delta t$, le mobile se trouve au point P_2, repéré par le vecteur position $\vec{r}_2$



Le déplacement entre ces deux points peut se mesurer de deux façons :

1) Par le déplacement curviligne Δs
2) Par le vecteur déplacement $\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

2.1 Mouvement et vitesse

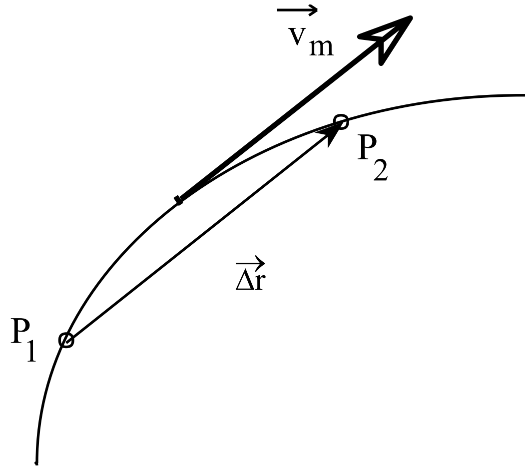
Vitesse moyenne

La vitesse moyenne entre P_1 et P_2 est définie :

scalairement par : $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

et vectoriellement par : $\vec{v}_m = \dfrac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \left\langle \dfrac{\Delta x}{\Delta t}, \dfrac{\Delta y}{\Delta t}, \dfrac{\Delta z}{\Delta t} \right\rangle$

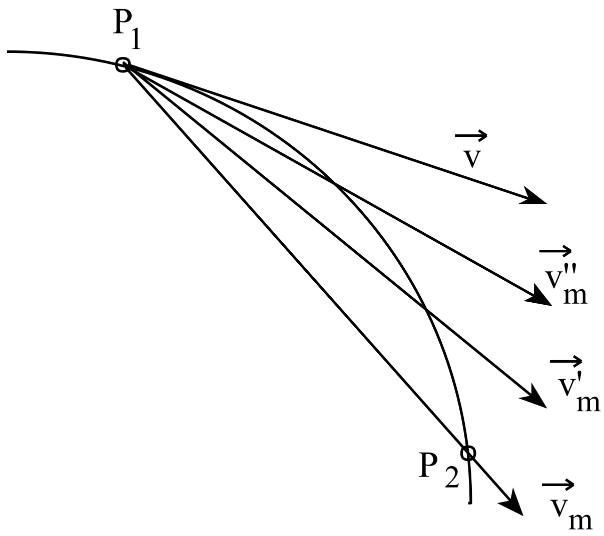
$\vec{v}_m$ est un vecteur parallèle au vecteur déplacement $\overrightarrow{\Delta r}$:



Vitesse (vitesse instantanée)

En faisant tendre Δt vers 0,
P_2 se rapproche de P_1 et la vitesse moyenne entre P_2 et P_1 tend vers la vitesse (instantanée) en P_1.

La direction du vecteur vitesse devient la tangente à la trajectoire au point P_1.



La vitesse (ou vitesse instantanée) en un point P_1 est définie :

scalairement par : $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$

vectoriellement par : $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$

Les définitions ci-dessus nous indiquent que *la fonction* vitesse v(t) (ou $\vec{v}$)) est la *dérivée par rapport au temps* de *la fonction* s(t) (ou $\vec{r}$).

Notation :

scalairement : $v(t)$ ou $v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$ (dérivée par rapport au temps)
vectoriellement : $\vec{v}(t)$ ou $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$ (dérivée par rapport au temps)
En coordonnées cartésiennes $\vec{v} = \left< \frac{dx}{dt} ; \frac{dy}{dt} ; \frac{dz}{dt} \right>$ ou $\vec{v} = \left< \dot{x} ; \dot{y} ; \dot{z} \right>$

L'intensité (ou la norme) du vecteur vitesse $\vec{v}$ est notée $\|\vec{v}\|$ ou simplement v.

Remarque :

Δs (ou $\Delta\vec{r}$) et Δt sont des intervalles quelconques.

Pour le physicien, ds (ou $d\vec{r}$) et dt sont des intervalles finis, très petits mais non nuls dans lesquels on admet que $ds = \|d\vec{r}\|$.

D'où : $$\|\vec{v}\| = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = v = \frac{ds}{dt}$$

$$\|\vec{v}_m\| = \left\| \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right\| \neq v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Unité

L'unité du système international (**SI**) est le mètre par seconde [m/s]
Rappel : 1 [m/s] = 3,6 [km/h].

Exemple

Le mouvement d'un mobile est donné par

$$\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} + (t+3)\,\vec{j} + (-5t^2 + 10t)\,\vec{k}$$

Pour trouver la vitesse, il suffit de dériver chaque composante, ce qui donne

$$\vec{v}(t) = 2\,\vec{i} + \vec{j} + (-10t + 10)\,\vec{k}$$

2.2 Détermination graphique ou numérique de la vitesse

La plupart du temps, le physicien ne dispose, pour décrire le mouvement d'un mobile, que d'un certain nombre de couples de points (s ; t) ou d'une courbe enregistrée par un appareil de mesure. Dans ce cas, il n'est pas possible de "calculer" mathématiquement la dérivée de cette fonction. Il faut utiliser des méthodes numériques ou graphiques pour déterminer approximativement la vitesse du mobile.

Exemple 1 :

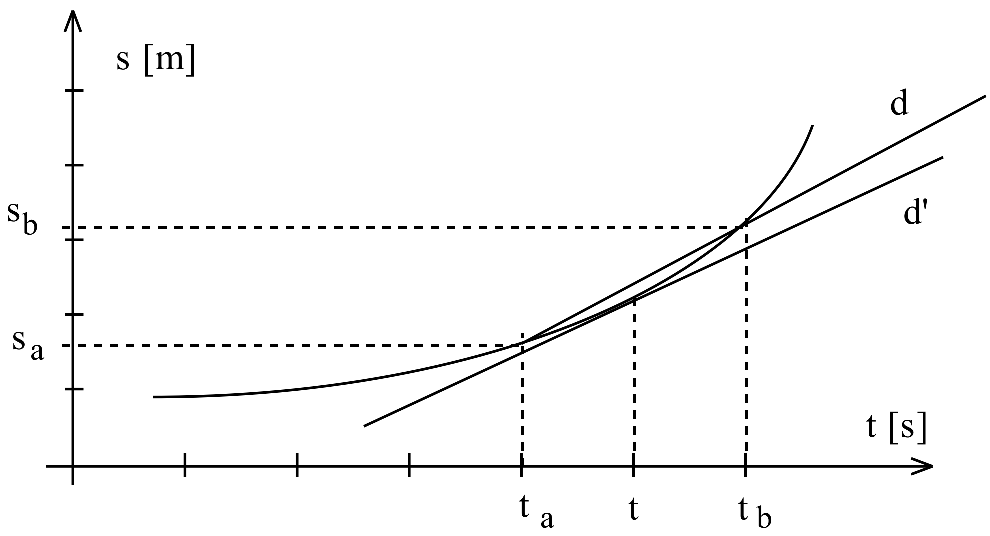
t[s]	0	1	2	3	4	5
s[m]	3	5	11	21	35	53

Que vaut la vitesse à t = 3 [s] ?
Prenons un intervalle de 1[s] avant et après t = 3 [s] $\rightarrow$ $\Delta t = 4\,[s] - 2\,[s] = 2\,[s]$
A cet intervalle de temps correspond un déplacement $\Delta s = s_4 - s_2 = 35 - 11 = 24\,[m]$

La vitesse moyenne dans cet intervalle vaut $v_{m3} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{24\,[m]}{2\,[s]} = 12\,\frac{[m]}{[s]}$. La vitesse instantanée au temps t = 3 [s] n'a certainement pas la même valeur...

Exemple 2 :

Sur le diagramme du mouvement s(t) suivant, que vaut la vitesse au temps t ?



Prenons un intervalle de temps autour de t $\rightarrow \Delta t = t_b - t_a$
A cet intervalle de temps correspond un déplacement $\Delta s = s_b - s_a$

La vitesse $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ correspond à la pente de la droite sécante d.

En passant à la limite ($\Delta t \rightarrow 0$), la vitesse instantanée au temps t correspond à la pente de la droite d', tangente à la courbe du diagramme du mouvement.

d' n'est pas parallèle à d :
la vitesse instantanée en t, au milieu de l'intervalle,
n'est généralement pas égale à la vitesse moyenne entre t_a et t_b

2.3 Intégration : $\vec{v}(t) \rightarrow \vec{r}(t)$

Si l'on connaît $\vec{v}(t)$, c'est à dire l'évolution de la vitesse d'un mobile au cours du temps, il est possible de déterminer $\vec{r}(t)$, donc la position du mobile au cours du temps. On comprend bien qu'il s'agit dans ce cas de faire l'opération inverse de la dérivation, c'est-à-dire une **intégration.**

Connaissant $\vec{v}(t)$, il faut trouver une fonction $\vec{r}(t)$ qui, une fois dérivée par rapport au temps, nous redonne $\vec{v}(t)$.

Cette fonction $\vec{r}(t)$ est appelée la fonction *primitive* de $\mathbf{v}(t)$.

Notation : $\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t) \cdot dt = < \int v_x(t) \cdot dt \,;\, \int v_y(t) \cdot dt \,;\, \int v_z(t) \cdot dt >$

Déterminer la fonction primitive connaissant la fonction dérivée est du ressort du cours de mathématique de fin de 3ème année! Cependant, avec un peu d'intuition, et en utilisant les tables CRM (p.78 à 79 par exemple), il est possible de résoudre bon nombre de problèmes simples.

Exemple : Un mobile se déplace le long d'un axe x à la vitesse $v_x(t) = 2\cdot t$, déterminer l'équation du mouvement du mobile.

La table CRM nous indique que la primitive de la fonction x^m est $\frac{x^{m+1}}{m+1}$;

nous en déduirons que la primitive de $2\cdot t$ est $2\cdot \frac{t^2}{2} = t^2 \rightarrow x(t) = t^2$

En dérivant cette expression par rapport à t, nous retrouvons : $\dot{x}(t) = v_x(t) = 2\cdot t$

Remarque : Si nous dérivons l'expression $x'(t) = t^2 + a$ (ou a est une constante), on retrouve aussi : $\dot{x}'(t) = v_x(t) = 2\cdot t$

Cette constatation permet d'illustrer une propriété importante :

> *La primitive d'une fonction est définie à une constante près.*

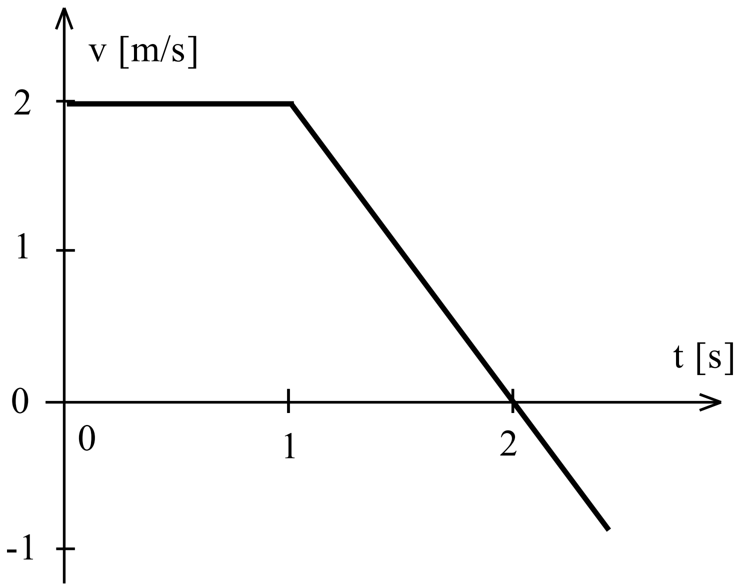
A une vitesse $v_x(t)$ correspond donc une *infinité* de fonctions du mouvement.
$x(t)$ + constante. Pour pouvoir choisir une fonction particulière, il est nécessaire de préciser, en plus de la fonction $v_x(t)$, une valeur particulière de la fonction $x(t)$. En général, on donne l'ordonnée à l'origine du mobile $x(0)$ ou x_0 (c'est-à-dire la position du mobile pour $t = 0$ [s]).

Si, dans notre exemple, nous précisons qu'à $t = 0$ [s], la position du mobile est de 3 [m], nous pouvons trouver la solution particulière $x^*(t)$.
La solution générale est donnée par l'expression : $x(t) = t^2 + a$
Sachant que $x(0) = 3$, nous en déduisons que : $x(0) = 0^2 + a = 3 \rightarrow a = 3$
La solution particulière $x^*(t)$ est donnée par la fonction : $\mathbf{x^*(t) = t^2 + 3}$

2.3 Détermination graphique ou numérique du mouvement

De même que pour la détermination numérique ou graphique de la vitesse, il existe des techniques numériques ou graphiques d'intégration. Ces techniques permettent de déterminer approximativement le mouvement du mobile.

Exemple : On enregistre le diagramme des vitesses suivant :
Avec s(0) = 0,5 [m]

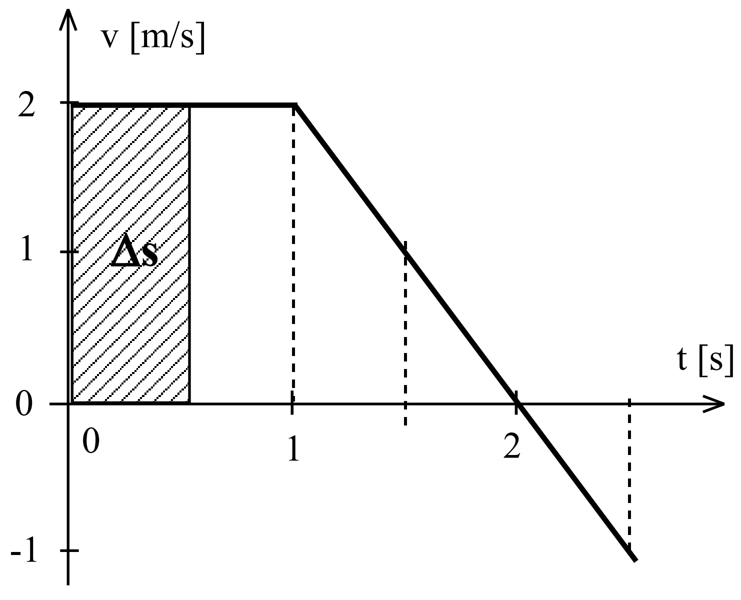


Posons-nous la question suivante :
« de combien varie la position de l'objet pendant la première demi-seconde ? »

Pendant la première demi-seconde, la vitesse est constante et vaut 2 [m/s].

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow \Delta s = v_m \cdot \Delta t = 2\ [m/s] \cdot 0{,}5\ [s] = 1\ [m]$$

Le produit $v_m \cdot \Delta t$ correspond à la pseudo-aire comprise entre la courbe et l'axe du temps dans une "tranche" comprise entre 0 [s] et 0,5 [s].



Cette propriété reste valable même si la vitesse n'est pas constante. Il est donc possible de calculer la variation de position correspondant aux "tranches" suivantes.

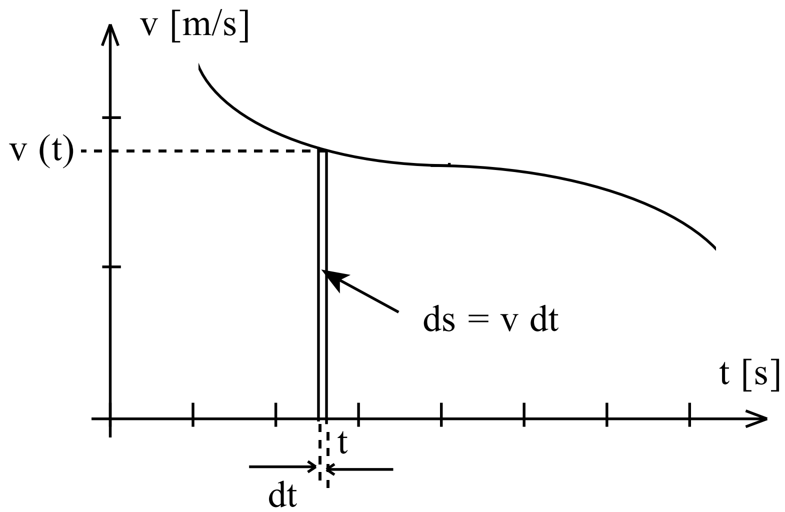
Δt[s]	0 à 0,5	0,5 à 1	1 à 1,5	1,5 à 2	2 à 2,5	etc
Δs[m]	1	1	0,75	0,25	- 0,25	…

Comme nous savons que s(0) = 0,5 [m], nous pouvons déterminer l'horaire du mobile.

t[s]	0	1	2	3	4	5
s[m]	0,5	1,5	2,5	3,25	3,5	3,25

Remarque : la notation $s(t) = \int v(t) \cdot dt$ peut s'illustrer de la façon suivante:

La fonction s(t) est la somme d'un nombre infini de $ds = v \cdot dt$ ou dt est une "tranche" infiniment mince de temps. (Comparer $ds = v \cdot dt$ avec $\Delta s = v_m \cdot \Delta t$).



3. Accélération

3.1 Introduction

D'une façon générale, la vitesse d'un mobile varie au cours de son mouvement. Cette variation dans le temps est mesurée par l'accélération.
Dans le langage courant, le terme "accélération" a souvent une signification restrictive, à savoir variation "du nombre de km/h : une voiture de sport accélère de 0 à 100 [km/h] en 7,8 secondes" (remarquons la belle cohérence des unités...).
Il faut donc d'emblée élargir ce concept et admettre qu'une voiture prenant un virage avec "une vitesse constante de 90 [km/h]" subit également une accélération...

3.2 Définitions

Si pendant un laps de temps Δt la vitesse varie de $\Delta \mathbf{v}$, l'accélération moyenne est définie par :

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = < \frac{\Delta v_x}{\Delta t} ; \frac{\Delta v_y}{\Delta t} ; \frac{\Delta v_z}{\Delta t} >$$

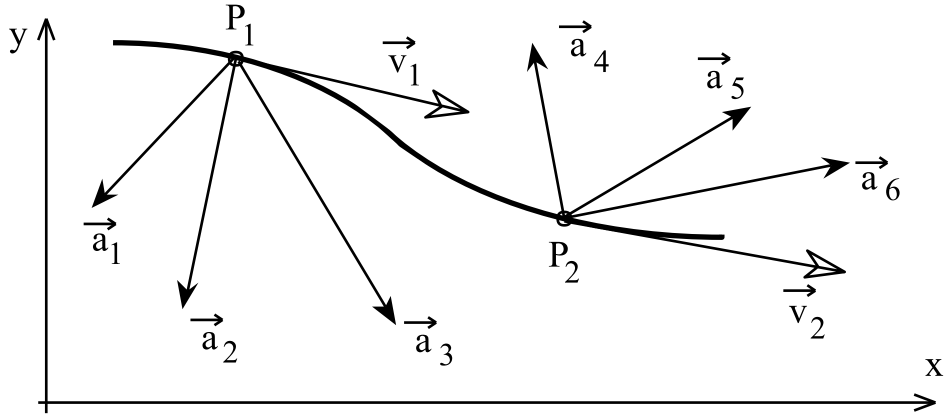
L'accélération moyenne n'est généralement pas utile en physique. Ou bien le mouvement est à accélération constante (mouvement rectiligne uniformément accéléré, mouvement parabolique d'un corps en chute libre dans le champ de pesanteur...) et l'accélération moyenne est toute trouvée, ou bien cette accélération varie au cours du temps et seule sa valeur instantanée offre de l'intérêt dans l'étude du mouvement.

L'accélération est donc définie par :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \qquad \text{et réciproquement :}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int \vec{a}(t) \cdot dt = \vec{v}_0 + < \int a_x(t) \cdot dt ; \int a_y(t) \cdot dt ; \int a_z(t) \cdot dt >$$

Il n'est pas possible de connaître a priori l'allure du vecteur accélération. La seule chose que l'on peut affirmer est que ce vecteur doit être dirigé "vers l'intérieur" de la trajectoire.



Tous les vecteurs $\vec{a}_i$ dessinés aux points P_1 et P_2 sont possibles. Seule la connaissance de l'évolution de $\vec{v}$ au cours du temps permet de déterminer l'accélération en un point donné.

3.3 Variations de la vitesse

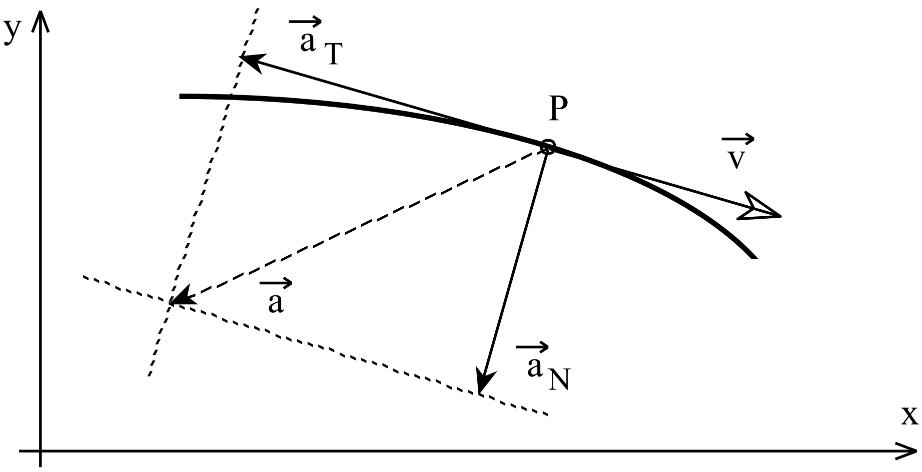
La vitesse est une grandeur vectorielle: sa variation peut se faire de deux façons :

en norme et/ou en direction.

Si le vecteur vitesse ne varie qu'en norme, c'est que l'accélération est de même direction que $\vec{v}$ (de même sens si v augmente, de sens opposé si v diminue).

Si le vecteur vitesse ne varie qu'en direction, c'est que l'accélération est perpendiculaire à $\vec{v}$.

Si les deux variations ont lieu simultanément, ce qui est le cas généralement, l'accélération n'est donc ni perpendiculaire, ni parallèle à $\vec{v}$. Il est alors tout indiqué de décomposer l'accélération dans ces deux directions.



La composante de l'accélération dans la direction de la vitesse s'appelle :

accélération tangentielle $\vec{a}_T$

Elle mesure la variation de la norme de $\vec{v}$.

L'autre composante s'appelle :

accélération normale $\vec{a}_N$

Elle mesure la variation de la direction de $\vec{v}$

Rappel : la vitesse est toujours tangente à la trajectoire.

Nous avons les relations suivantes:

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N \qquad a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$

Que valent les normes de $\vec{a}_T$ et $\vec{a}_N$?

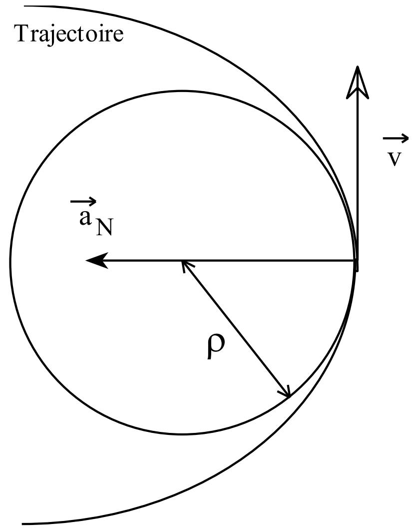
Pour $\vec{a}_T$, la réponse est simple, $a_T = \dot{v}$. Mais il faut faire attention: $\dot{v}$ veut dire dérivée de la norme de $\vec{v}$. Ceci n'est pas égal à la norme de la dérivée de $\vec{v}$... (aïe, ma tête !) :

$$\dot{v} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = a_T \qquad \left\|\dot{\vec{v}}\right\| = \left\|\frac{d\vec{v}}{dt}\right\| = \|\vec{a}\| = a$$

La norme de $\mathbf{a}_N$ vaut (la démonstration en sera faite plus tard) :

$$a_N = \frac{v^2}{\rho}$$

ρ étant le rayon de courbure de la trajectoire au point considéré (ce rayon de courbure varie en fonction du temps, dans le cas général).



3.4 Mouvements particuliers

a- Mouvement rectiligne uniforme (MRU)

La vitesse est constante, en norme et en direction.	Ainsi : $a_N = 0$ et $a_T = 0$, ce qui entraîne que : $\vec{a} = \vec{0}$

b- Mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA)

La vitesse est constante en direction seulement.	Ainsi : $a_N = 0$ et $a_T = \text{cste}$ On en déduit : $\vec{a} = \vec{a}_T$

Remarque : Le fait que $a_N = 0$ revient à dire que le rayon de courbure d'une trajectoire rectiligne est infini...

c- Mouvement circulaire uniforme (MCU)

La vitesse est constante en norme seulement et le rayon de courbure est constant (rayon du cercle).	Ainsi : $a_T = 0$ et $a_N = \text{cste}$.

Question : Que peut-on dire de l'accélération moyenne dans ce type de mouvement si Δt correspond à un demi-tour ou à un tour ? (voir début du chapitre)

d- Mouvement parabolique dans le champ de pesanteur (MUA)

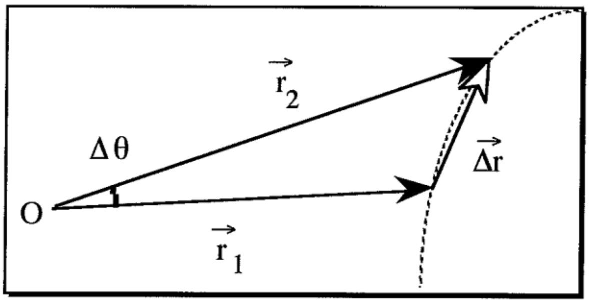
L'accélération est constante en norme et direction : c'est l'accélération terrestre $\vec{g}$. La vitesse varie en norme et en direction.	Ainsi : ni $\vec{a}_T$ ni $\vec{a}_N$ ne sont constantes, mais leur somme vectorielle l'est : $\vec{a}_T + \vec{a}_N = \vec{a}$

Remarque : Cette décomposition de l'accélération revient à dire que tout mouvement peut être considéré, à un instant donné, comme la superposition d'un MRUA tangent à la trajectoire et d'un MCU.

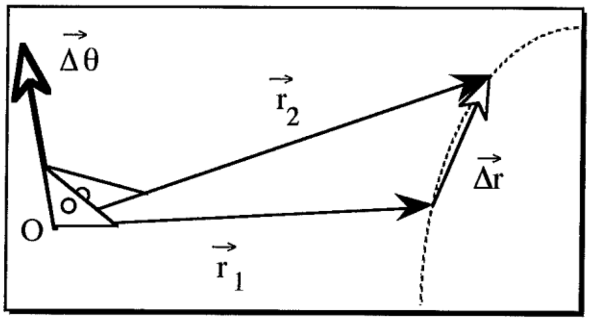
4. Rotation

4.1 Introduction

Pour tout déplacement $\vec{\Delta r}$ on peut définir, par rapport à n'importe quel point O de l'espace, un angle $\Delta\theta$ (déplacement angulaire), angle délimité par les deux vecteurs position $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$.



Ces deux vecteurs déterminent un plan. On choisit de définir $\vec{\Delta\theta}$ par un vecteur perpendiculaire à ce plan.



Remarque :

Il est possible de définir dans ce plan un vecteur position angulaire $\vec{\theta}$ à partir d'une origine choisie.

4.2 Vitesse angulaire

Avec la définition de $\vec{\Delta\theta}$ on peut parler de vitesse angulaire; de manière similaire à la vitesse de translation on établit les relations :

$$\vec{\omega}_{\text{moyen}} = \frac{\vec{\Delta\theta}}{\Delta t} \qquad [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}] \text{ ou } [\text{s}^{-1}]$$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta\theta}}{\Delta t} = \dot{\vec{\theta}} \qquad [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}] \text{ ou } [\text{s}^{-1}]$$

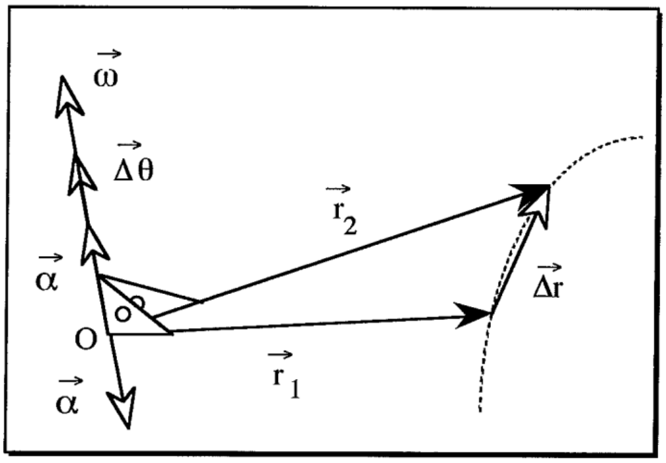
4.3 Accélération angulaire

De même on peut définir l'accélération angulaire $\vec{\alpha}$:

$$\vec{\alpha} = \frac{\overrightarrow{\Delta\omega}}{\Delta t} \qquad [\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}] \text{ ou } [\text{s}^{-2}]$$

$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta\omega}}{\Delta t} = \dot{\vec{\omega}} \qquad [\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}] \text{ ou } [\text{s}^{-2}]$$

Représentons ces vecteurs:



Les vecteurs $\overrightarrow{\Delta\theta}$, $\vec{\omega}$ et $\vec{\alpha}$ sont des vecteurs colinéaires, en effet, ces vecteurs sont liés par une grandeur scalaire, le temps.

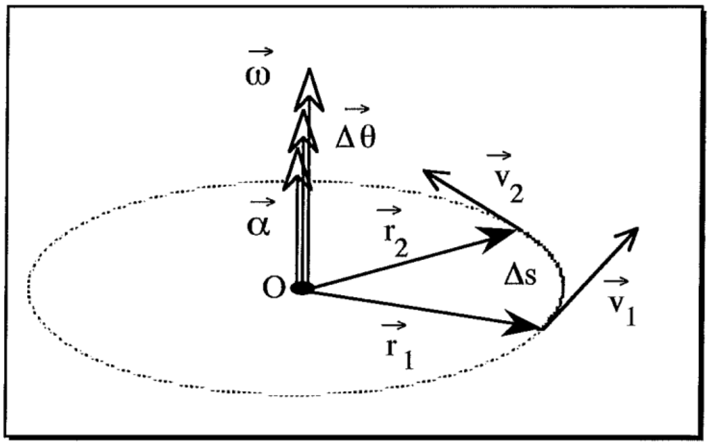
Remarques :

- Le vecteur accélération angulaire peut être de sens opposé au vecteur vitesse angulaire.

- Ces vecteurs de rotation n'ont pas de rapport simple avec les vecteurs de position et de déplacement.

4.4 Mouvement circulaire

Pour décrire le mouvement circulaire le centre du cercle s'impose naturellement comme origine, ainsi les vecteurs positions sont les rayons du cercle et leur intensité est constante.



Nous pouvons, dans ces conditions, établir des relations simples entre les vecteurs de rotation et les vecteurs de translation.

$\Delta\theta$ est définit par le rapport: $\Delta s : r$, dérivons par rapport au temps:

$$\|\vec{\omega}\| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{r \cdot \Delta t} = \frac{1}{r}\,\dot{s} = \frac{1}{r}\,v$$

Les trois vecteurs $\vec{v}$, $\vec{r}$ et $\vec{\omega}$ sont perpendiculaires entres eux et ont peut établir la relation :

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

Remarque: la vitesse donnée dans ce cas est bien la vitesse tangentielle.

Définissons maintenant, de manière analogue, l'accélération tangentielle:

$$\boxed{\vec{a}_{\text{tangentielle}} = \vec{\alpha} \times \vec{r}}$$

Mais utilisons l'expression de $\vec{v}$ et dérivons pour obtenir une forme plus générale de l'accélération.

$$\boxed{\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\overline{\vec{\omega} \times \vec{r}}} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}}_{\vec{a}\ \text{tangentielle}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{\vec{a}\ \text{centripète}}}$$

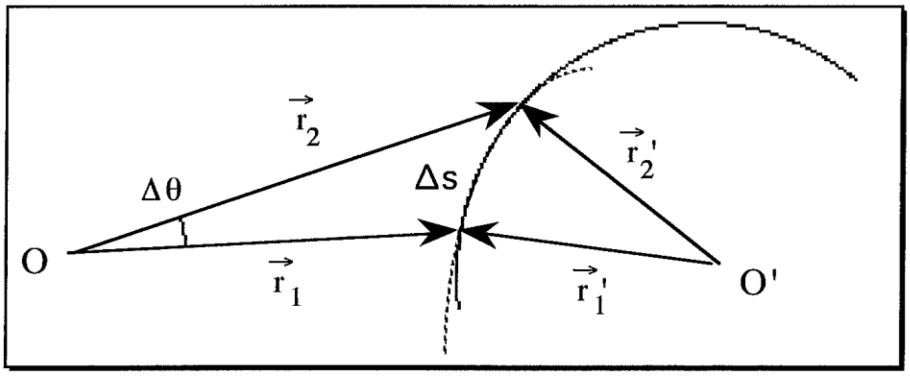
Le premier terme est bien **l'accélération tangentielle** et le deuxième est un vecteur de sens opposé à $\vec{r}$, donc une **accélération centripète**.

Développons ce terme :

$$\vec{a}_{\text{centripète}} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 \vec{r}$$

4.5 Généralisation à un mouvement curviligne

Une décomposition en accélération tangentielle et normale avait déjà été introduite pour un mouvement curviligne car elle correspond à la variation en intensité ($\vec{a}_{\text{tangentielle}}$) et en direction ($\vec{a}_{\text{normale}}$) du vecteur vitesse.



Lorsque $\Delta\theta$ tend vers zéro, Δs peut toujours être confondu avec un arc de cercle de centre O' et de rayon ρ (appelé rayon de courbure).

$$\| \vec{r}'_1 \| = \| \vec{r}'_2 \| = \rho$$

La démonstration que nous venons de faire reste valable pour un mouvement curviligne, nous constatons que l'accélération normale correspond justement à une accélération centripète.

$$\vec{a}_{\text{normale}} = \vec{a}_{\text{centripète}} = -\omega^2 \vec{r}$$

avec les relations $\omega = v / r$ et $\|\vec{r}\| = \rho$ on obtient :

$$a_{\text{normale}} = a_{\text{centripète}} = -\frac{v^2}{\rho}$$

4.6 Cas particulier : mouvement circulaire uniforme

C'est la vitesse angulaire qui est uniforme :

$$\vec{\omega} = \vec{cte} \qquad \text{ce qui entraîne : } \|\vec{v}\| = \text{cte}$$

L'accélération tangentielle est nulle et on a :

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{centripète}} = -\,\omega^2 \vec{r}$$

Ce mouvement est un mouvement périodique et on peut définir :

- La période T : temps pour effectuer un tour.

$$\boxed{\Delta t_{\text{1tour}} = T = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}}$$

- La fréquence ν : nombre de tours effectués par unité de temps.

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T} = \; = \frac{\omega}{2\pi}}$$

Rappel :

Dans un mouvement circulaire uniforme le vecteur position est donné par :

$$\vec{r} = R \sin(\omega t)\,\vec{i} + R\cos(\omega t)\,\vec{j}$$

en dérivant on obtient : $\vec{v} = R\omega \cos(\omega t)\,\vec{i} - R\omega \sin(\omega t)\,\vec{j}$

la seconde dérivée donne : $\vec{a} = -\,R\omega^2 \sin(\omega t)\,\vec{i} - R\omega^2 \cos(\omega t)\,\vec{j}$

On peut vérifier, à partir des vecteurs donnés par leurs composantes, les expressions obtenues précédemment et en particulier s'assurer que la norme de ces trois vecteurs est bien constante en utilisant la relation $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$.

En substituant $\omega = \frac{2\pi}{T}$ on obtient : $\vec{r} = R \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\vec{i} + R\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\vec{j}$

expression dans laquelle on vérifie aisément que si $t = nT$ (périodicité temporelle) alors l'argument est égal à $n\,2\pi$ (périodicité du sinus et du cosinus).