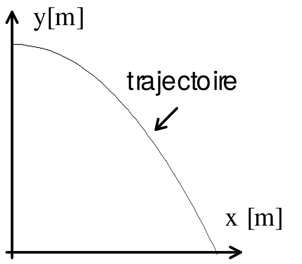
1 Relativité et description du mouvement.

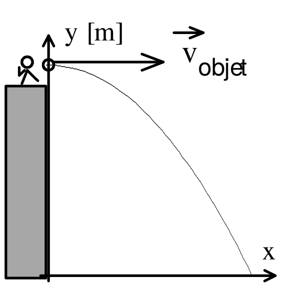
1.1 Le principe de relativité.

Lorsqu'on désire observer un mouvement, il est indispensable de définir **un référentiel** qui servira à déterminer les positions successives de l'objet au cours du temps.

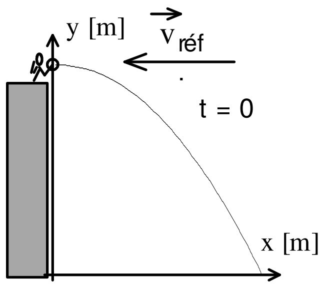
Si on laisse tomber un objet pesant du haut d'une tour et que l'on observe la trajectoire suivante :

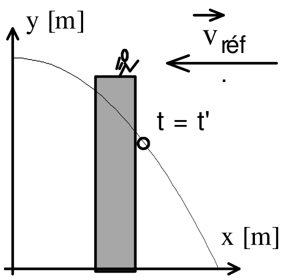


On peut en déduire que, soit l'objet a été lancé du haut de la tour avec une certaine vitesse horizontale, soit qu'il tombe le long de la tour, mais est observé à partir d'un référentiel en translation horizontale :



ou





Il est naturel de se poser la question suivante :

Les phénomènes physiques sont-ils les mêmes dans tous les référentiels ou, au contraire, existe-t-il des référentiels privilégiés ?

Pour **Aristote**, la seconde hypothèse était la bonne. Il postulait qu'il n'existait qu'un seul référentiel où les corps tombaient verticalement : c'était un référentiel en repos absolu. Dans tous les référentiels en mouvement par rapport à ce référentiel en repos absolu, les corps tombaient en décrivant une courbe semblable à la trajectoire dessinée ci-dessus. Comme sur la Terre, les objets lâchés sans vitesse horizontale tombent verticalement, Aristote postulait que la Terre était ce référentiel en immobilité absolue par rapport à tout l'univers !

Galilée, persuadé du mouvement de rotation de la Terre autour du Soleil, fut amené à réfuter l'affirmation d'Aristote, construisant ainsi la première théorie de la relativité.

1.2 Le principe de relativité de Galilée-Newton.

La **première loi de Newton** est souvent appelée **principe d'inertie** :
Tout corps s'il n'est pas soumis à l'action d'une force (ou si la force résultante est nulle), reste au repos ou est animé d'un M.R.U.

Cette loi n'est pas le simple énoncé d'un principe qui avait été découvert par Galilée mais sa généralisation. **Galilée** était resté lié à la **Terre**. **Newton**, au contraire, donne une **validité cosmique à sa loi**.

Comment parler de repos et de mouvement rectiligne alors que la Terre n'est pas fixe ? Il n'y a pas de solution !

Mais Newton ayant besoin d'une solution **postule** l'existence d'un **espace absolu** et de même il envisage l'existence d'un **"temps absolu, vrai, mathématique"** qui s'écoule de la même façon pour tous les observateurs.

Newton énonça ce que nous appelons maintenant "**le principe de relativité newtonienne**" :

" les mouvements relatifs des corps enfermés dans un espace donné sont identiques, que cet espace soit au repos ou animé d'un mouvement rectiligne uniforme, sans mouvement circulaire"

Newton énonce ainsi qu'à l'intérieur d'un laboratoire qui se déplace en M.R.U. dans l'espace absolu, les phénomènes mécaniques se dérouleront comme si celui-ci était immobile.
Ce principe de relativité troublait Newton : Grâce à l'espace absolu il disposait d'un cadre pour **définir le repos et le mouvement** mais d'autre part, sa physique du mouvement lui **interdisait de distinguer le repos du mouvement rectiligne uniforme !**

Pour contourner cette difficulté Newton dû poser une **hypothèse** (extérieure à ses lois) : **le centre du monde est immobile et devient la référence du repos absolu**.

Actuellement nous pouvons énoncer **Le principe de relativité de Galilée-Newton** de la façon suivante :

Les lois de la dynamique sont les mêmes dans tous les référentiels d'inertie.

Par définition :
*Un **référentiel d'inertie** (ou de Galilée) est un référentiel dans lequel, le principe d'inertie est valable.*

Si un référentiel $\boldsymbol{S}$ est d'inertie, tout référentiel $\boldsymbol{S'}$ qui se déplace à vitesse constante (vectoriellement) par rapport à $\boldsymbol{S}$ est aussi un référentiel d'inertie. Par rapport à un référentiel d'inertie, un tel référentiel ne possède donc ni accélération ni mouvement de rotation propre.
(La Terre n'est pas rigoureusement un référentiel d'inertie !)

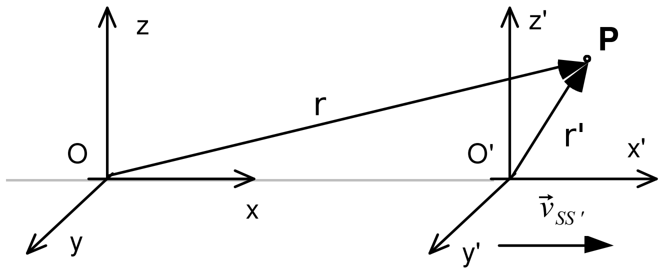
1.3 Les transformations de Galilée.

Le principe de relativité admet le **corollaire** suivant :

Si l'on observe un phénomène physique depuis deux référentiels d'inertie S et S', il existe des lois de transformation qui permettent de passer de la description du phénomène dans le référentiel S à la description faite dans le référentiel S' et réciproquement. Ces lois de transformation sont connues sous le nom de **transformations de Galilée.**

Pour établir ces relations, nous étudierons le cas particulier suivant :
Si S et S' sont deux référentiels d'inertie, tel que S' soit animé d'un mouvement de translation à vitesse $\vec{v}_{SS'} = \overrightarrow{cte}$ par rapport à S.

On suppose qu'au temps $t = 0$; les origines O et O' des deux référentiels coïncident et que les axes x , y , z et x' , y' , z' sont superposés.
Le mouvement de translation se déroule le long de l'axe x.
Dans cette situation, nous avons : $\overrightarrow{OO'} = \vec{v}_{SS'} \cdot t$
Si l'on observe un point P : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$ ou $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{v}_{SS'} \cdot t$



En composantes :	**passage de S' à S**	**passage de S à S'**
	$x = x' + v_{SS'} \cdot t$	$x' = x - v_{SS'} \cdot t$
	$y = y'$	$y' = y$
	$z = z'$	$z' = z$
	$t = t'$	$t' = t$

La dernière ligne de ces transformations (t' = t) correspond bien à l'existence d'un **temps universel** postulé par Newton.
Maintenant que nous disposons des transformations de Galilée, il reste à vérifier que les lois de la mécanique sont bien les mêmes, dans tous les référentiels d'inertie.

1.3 Invariance aux transformations de Galilée.

Nous devons vérifier que les grandeurs qui entrent en jeu dans les trois lois fondamentales de la dynamique classique sont **invariantes aux transformations de Galilée.**

- Principe d'inertie.
C'est ce principe qui permet de définir les référentiels d'inertie !

Selon Newton : *Dans un système isolé, la vitesse d'une masse est constante (en grandeur et en direction).*

Nous avons :
La vitesse du point P observée dans S : $\vec{v}_P = \overrightarrow{cte}_1$;
La vitesse du point P observée dans S' : $\vec{v}_P\,' = \overrightarrow{cte}_2$;
La vitesse du référentiel S' observée dans S : $\vec{v}_{SS'} = \overrightarrow{cte}_3$ et
La relation entre les positions de P mesurées dans S et dans S' : $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}_{SS'} \cdot t$

En dérivant cette dernière expression : Attention : ' ne signifie pas "dérivée" dans ce cours.

$$\frac{d}{dt}\vec{r}\,' = \frac{d}{dt}\vec{r} - \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_{SS'} \cdot t\right) \quad \text{donc} \quad \vec{v}_p\,' = \vec{v}_p - \vec{v}_{SS'} \quad \text{est aussi constante.}$$

Le principe d'inertie est donc aussi vrai dans le référentiel S'.

Rappel : **Descartes** exprime le principe d'inertie de la façon suivante :

Dans un système isolé, la quantité de mouvement totale est conservée.
(Principe de conservation de la quantité de mouvement).

On peut aussi exprimer ce principe par :

$$\vec{p}_{total} = M \cdot \vec{v}_{CM} = \overrightarrow{cte} \quad \text{avec :}$$

M = masse totale = $\sum_{i=1}^{n} m_i$ et
$\vec{v}_{CM}$ = vitesse du centre de masse du système

La démonstration qui précède s'applique également dans ce cas, il suffit de remplacer $\vec{v}_P$ par $\vec{v}_{CM}$.

Il y a **invariance** de la conservation de la quantité de mouvement **aux transformations de Galilée**.

- Loi fondamentale de la dynamique.

Si la vitesse d'une particule varie, cette particule est soumise à une force donnée par :

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}_{résultante} = m \cdot \vec{a}$$

Pour vérifier l'invariance de la loi fondamentale de la dynamique par une transformation de Galilée, nous postulerons que la masse de la particule observée est la même pour tous les observateurs.

Invariance de l'accélération : dérivons l'expression $\vec{v_p}' = \vec{v_p} - \vec{v}_{SS'}$

nous obtenons : $\frac{d}{dt}\vec{v_p}' = \frac{d}{dt}\vec{v_p} - \frac{d}{dt}\vec{v}_{SS'}$ mais comme : $\vec{v}_{SS'} = \overrightarrow{cte}$ nous obtenons :

$\frac{d}{dt}\vec{v_p}' = \frac{d}{dt}\vec{v_p} - \vec{0}$, donc $\vec{a}\,' = \vec{a}$. Attention : ' ne signifie pas "dérivée" dans ce cours.

L'accélération est donc **invariante** aux transformations de Galilée, la **force l'est également** (en postulant $m = m' = cst$).

La **loi fondamentale de la dynamique** est donc **invariante aux transformations de Galilée**.

- Principe d'action et de réaction.

Les forces étant invariantes aux transformations de Galilée, le **principe d'action et de réaction** est aussi **invariant aux transformations de Galilée**.

En conclusion, les transformations de Galilée semblent judicieusement choisies, puisqu'elles satisfont au principe de relativité de Galilée Newton.

1.5 Évolution du principe de relativité de Galilée-Newton.

Plusieurs problèmes se posèrent qui mirent en cause et le principe de relativité de Galilée-Newton et les transformations de Galilée. Un de ces problèmes est celui de la nature de la lumière. Newton pensait que la lumière était formée de particules (photons) qui obéissent aux lois de la dynamique. À l'aide de sa théorie corpusculaire, Newton expliquait pratiquement toutes les propriétés de la lumière.

Le physicien hollandais Huygens pensait que la lumière était une onde.

Vers 1800 Thomas Young observait que de la lumière superposée à de la lumière pouvait donner de l'obscurité ! (expérience des fentes deYoung). Il baptisa ce phénomène **"interférences lumineuses"**. Un tel phénomène ne peut s'expliquer qu'en considérant que la lumière est une onde.

L'**hypothèse ondulatoire de la lumière** était très commode, mais présentait un inconvénient, elle conduisait à postuler l'existence d'un **milieu de propagation** pour ces ondes. Ce milieu, **l'éther**, devait en même temps être très rigide pour pouvoir transmettre les ondes lumineuses à l'immense vitesse de la lumière et bien qu'universellement présent, solide et très rigide, il ne devait en aucune façon ralentir le mouvement des planètes et de tous les corps solides !

On supposa que cet éther passait librement à travers la matière et s'il remplissait tout l'espace, tout en n'étant pas modifié par le mouvement des corps, on pouvait considérer que l'éther était en repos dans l'espace absolu : **il concrétisait physiquement l'espace absolu de Newton**.

Avec cette hypothèse, mesurer notre **mouvement par rapport à l'éther** permettait de **mesurer notre mouvement par rapport à l'espace absolu !**

Dans ces conditions, seules les expériences de mécanique étaient soumises au principe de relativité et celles d'optique donnaient accès à l'espace absolu de Newton !

Au cours de tout le XIX^{e} siècle, de nombreux physiciens tentèrent de mesurer l'effet du mouvement propre de la Terre par rapport à l'éther.

En 1818 déjà, le savant français François Arago, chercha à déceler l'effet du mouvement de la Terre en mesurant l'indice de réfraction ($n = c/v$) d'un prisme dans différentes directions. À sa grande surprise, le résultat était négatif, le mouvement de la Terre n'avait aucun effet mesurable sur l'indice de réfraction du verre.

Augustin Fresnel, proposa une explication complexe de l'expérience d'Arago, faisant intervenir de "l'éther prisonnier" dans la matière. Cette théorie compliquée donna pourtant lieu à une formule permettant de calculer la vitesse de la lumière dans un milieu quelconque en mouvement. Cette formule fut vérifiée expérimentalement par Hippolyte Fizeau en 1851, en mesurant la vitesse de la lumière dans de l'eau en mouvement.

Le problème de l'électromagnétisme.

Les interactions électriques et magnétiques posèrent d'autres problèmes aux physiciens du XIX^{e} siècle. Ces deux interactions possèdent beaucoup de points communs : attraction de deux charges de signes opposés, attraction de deux pôles magnétiques opposés (répulsion dans le cas contraire). On chercha longtemps l'existence des charges magnétiques monopôles sud et nord. En 1820, **Hans Christian Œrsted** découvrit expérimentalement qu'un fil parcouru par un courant électrique fait dévier l'aiguille aimantée d'une boussole. Le champ magnétique n'était pas un phénomène statique, il semblait causé par le mouvement des charges électriques dans le fil. Œrsted donna le modèle suivant : le champ magnétique était comme un "tourbillon" d'éther qui s'enroule autour du courant électrique.

Le XIX^{e} siècle vit une très grande évolution de l'électromagnétisme grâce à **André-Marie Ampère**, **Michael Faraday** (auteur du concept de champ électrique et de champ magnétique), **Joseph Henry**, **Heinrich Lenz** et bien d'autres.

En 1861, **James Clerk Maxwell** repris le problème de l'électromagnétisme en utilisant un modèle semblable aux "tourbillons" d'Œrsted. Il établit les quatre équations fondamentales de l'électromagnétisme. Jusqu'à ce jour, la validité de ces équations n'a jamais été démentie.

La lumière : une onde électromagnétique.

À l'aide de ses équations, Maxwell montra qu'une charge électrique accélérée, (par exemples, une charge d'un courant électrique variable dans le temps) est la source d'une **onde électromagnétique**.

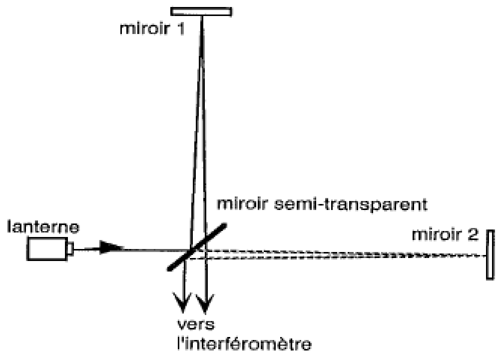
Le physicien **Henrich Herz** fut le premier, en 1888, à produire expérimentalement des ondes électromagnétiques.

Il en mesura la vitesse et trouva $2{,}9979 \cdot 10^{8}$ [m/s] c'est-à-dire la vitesse de la lumière **c**. De plus, il montra que des ondes électromagnétiques de longueur d'onde très courte, se comportaient comme des ondes lumineuses infrarouges.

Il devint évident que la **lumière** devait être constituée d'**ondes électromagnétiques** de longueur d'onde très courte.

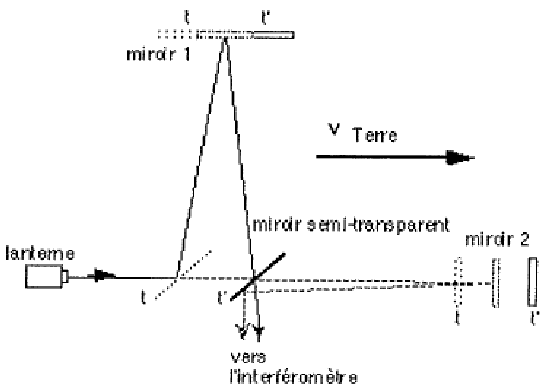
1.6 L'expérience de Michelson-Morley.

En 1880, Albert Michelson, réalisa un interféromètre ultra sensible dans le but de mesurer la différence de la vitesse de la lumière suivant deux directions perpendiculaires et ainsi il espérait être le premier à mesurer le mouvement de la Terre par rapport à l'éther.



Dans la figure ci-contre, on admet que le dispositif **ne se déplace pas dans l'éther**.
Si la distance L du miroir semi-transparent au miroir 1 est rigoureusement la même que celle au miroir 2, les deux rayons arrivent "en même temps" vers l'interféromètre, on ne distingue pas de franges d'interférence.

Imaginons que tout le dispositif se déplace dans l'éther, dans le sens indiqué par le vecteur vitesse (figure 2). Imaginons, de plus, que les ondes lumineuses ont un comportement "classique", c'est-à-dire que **leur vitesse est constante, par rapport à l'éther** (comme un son dans l'air).
Dans ce cas, la durée mise par les ondes pour parcourir la branche "verticale" n'est plus la même que celle nécessaire à parcourir la branche "horizontale", une des ondes arrive "en retard" : on devrait observer des franges d'interférences.



La figure ci-contre, montre le même interféromètre, mais **qui se déplace avec une vitesse v_{Terre} par rapport à l'éther**.
Le miroir 1 se décale vers la droite pendant que le dispositif se déplace et le miroir 2 recule pendant que les ondes avancent.
La déformation du trajet des rayons est très nettement exagérée.

> Michelson considérait que la vitesse de la Terre dans l'éther était de l'ordre de 30 [km/s]. Dans ce cas, la différence des temps de propagation entre les deux branches de l'interféromètre devait être de l'ordre de un deux cents millionième de seconde !
> L'interféromètre de Michelson devait permettre de mesurer un intervalle de temps de l'ordre de 10^{-17} [s].

Michelson réalisa son expérience en 1880 et la répéta à Cleveland en 1887 en collaboration avec Edward Morley. Le résultat de l'expérience surpris le monde scientifique, en effet, quelle que soit l'orientation du dispositif de Michelson et Morley, **on n'observa aucune interférence !**

Ce résultat était en contradiction avec d'autres expériences et cette contradiction a conduit à d'autres hypothèses comme celle qui postulait l'existence de 2 sortes d'éther !
Le physicien irlandais **Georges Fitzgerald** proposa une explication ingénieuse :

Tout objet en mouvement se contracte d'un facteur

$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ dans la direction du déplacement.

Son hypothèse fut considérée comme une plaisanterie par le monde scientifique de l'époque.

1.7 Les Transformations de Lorentz

En 1892, le physicien hollandais **Hendrik Lorentz**, aborda le problème à l'envers, il se posa la question suivante : que deviennent les équations de Maxwell dans un laboratoire animé d'un mouvement uniforme par rapport à l'éther ?
Il obtint ainsi une série de lois de transformations, connues sous le nom de **transformations de Lorentz**.

Pour le même cas particulier (déplacement du référentiel S' relativement au référentiel S dans la direction de l'axe x uniquement) que celui que nous avons utilisé pour établir les lois de transformations de Galilée-Newton (cf. page 3), les lois de transformation de Lorentz donnent :

passage de S' à S	passage de S à S'
$x=\dfrac{x'+v\cdot t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$	$x'=\dfrac{x-v\cdot t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$
$y=y'$	$y'=y$
$z=z'$	$z'=z$
$t=\dfrac{t'+\frac{v}{c^2}\cdot x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$	$t'=\dfrac{t-\frac{v}{c^2}\cdot x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

On a noté v la vitesse de S' relativement à S.

Pour simplifier l'écriture, on pose souvent :

$\beta=\frac{v}{c}$ et $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ On a aussi : $\beta=\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}$

Les lois de transformations, pour le passage de S à S', deviennent :

$$x' = \gamma\cdot(x-\beta\cdot c\cdot t) \quad y'=y \quad z'=z \quad c\cdot t' = \gamma\cdot(c\cdot t-\beta\cdot x)$$

Écrit ainsi, on voit une grande similitude entre x et $c \cdot t$.

Lorentz avait fait une découverte majeure, le temps se transforme lors du passage du référentiel S au référentiel S' ($t' \neq t$) et ses équations amenaient également à une contraction des longueurs (idée de Fitzgerald). Ces transformations reliant un référentiel au repos dans l'éther et un référentiel en translation uniforme, montraient que toutes les expériences électromagnétiques destinées à mettre en évidence le mouvement par rapport à l'éther étaient vaines (y compris celles de Michelson).

1.8 L'article d'Einstein

En 1905, Einstein publie un article intitulé "Zur Elektrodynamik bewegter Körper" ("Sur l'électrodynamique des corps en mouvement") dans le journal "Annalen der Physik. 17:891, 1905". Il expose, dans cet article ce que nous appelons aujourd'hui la théorie de la relativité restreinte. Presque simultanément, Poincaré publiait un long article où l'on retrouve la plupart des détails mathématiques de l'article d'Einstein. C'est pourtant à Einstein qu'on attribue la paternité de la relativité restreinte, en effet, Lorentz et Poincaré étaient parti de la théorie électromagnétique et leurs résultats étaient les conséquences de cette théorie, alors qu'Einstein déduisait la transformation de Lorentz de deux principes généraux. Il montrait ainsi que c'était la transformation de Lorentz qui s'appliquait à tous les domaines de la physique et introduisait, par là même, des concepts de temps et d'espace radicalement nouveaux.

2 Le principe de relativité restreinte d'Einstein.

L'introduction au mémoire sur l'électrodynamique des corps en mouvement est caractéristique de la démarche d'Einstein, c'est l'imperfection logique de la théorie électromagnétique qui l'incite à penser que l'idée d'un mouvement absolu, naturellement associée à l'hypothèse de l'éther, ne s'impose pas plus en électromagnétisme qu'en mécanique.

Albert Einstein postule ensuite :

- ***Toutes les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels qui ne subissent pas d'accélération (système d'inertie).***
- ***La vitesse de propagation de la lumière dans le vide est constante et indépendante du mouvement de la source.***

C'est l'association de ces deux principes qui va déclencher une véritable révolution ! Nos concepts de temps et d'espace vont êtres profondément modifiés.

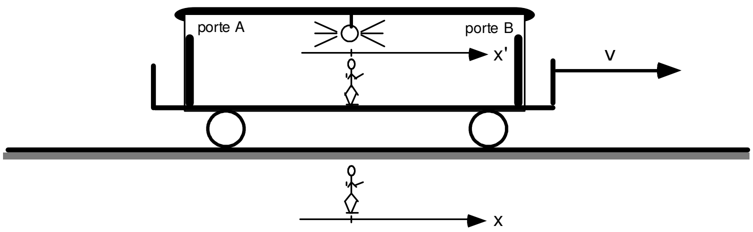
Remarque : on parle ici de relativité "**restreinte**" car elle ne concerne que les transformations qui font passer d'un référentiel **d'inertie** à un autre référentiel **d'inertie**. Plus tard, Einstein construira une relativité générale, dont les lois de transformation sont **beaucoup** plus complexes, pour traiter du cas des référentiels en mouvement relatif quelconque.

2.1 Le "temps universel" n'existe pas.

Pour expliquer la non-universalité du temps, Einstein remis en cause le **principe de simultanéité** de Newton. Pour Newton, deux événements séparés dans l'espace étaient simultanés s'ils se produisaient à la même heure universelle. Einstein imagina une "expérience de pensée" (Gedankenexperimente), pour étudier le principe de simultanéité de deux événements qui se produisent en des lieux différents.

Le train d'Einstein.

Imaginons un wagon de train se déplaçant à la vitesse v par rapport à un observateur S, assis sur un talus au bord de la voie. Une lampe, placée exactement au milieu du wagon, envoie un éclair de lumière. Les portes qui se trouvent aux deux extrémités du wagon sont équipées de cellules photoélectriques et s'ouvrent au moment où la lumière de la lampe atteint les cellules.



Pour l'observateur situé **dans le wagon**, le wagon est immobile et la lumière doit parcourir exactement la même distance vers l'avant ou vers l'arrière du wagon. Comme dans les deux sens, la valeur absolue de la vitesse de la lumière est la même, les temps de parcours seront les mêmes et l'observateur dans le wagon verra les deux portes s'ouvrir **simultanément**.

L'observateur situé **sur le talus au bord de la voie**, voit l'arrière venir à la rencontre de la lumière (qui se propage à la vitesse c et non à la vitesse $c - v$). L'avant s'éloigne de la lumière émise par la lampe (qui se propage aussi à la vitesse c et non à $c + v$). Cet observateur voit donc la lumière atteindre l'arrière du train en premier. La porte du fond s'ouvre **avant** celle de devant ! Les deux phénomènes **ne sont plus simultanés** !

En conclusion :

Si deux observateurs sont en mouvement l'un par rapport à l'autre, deux événements simultanés par rapport à l'un des observateurs ne le seront pas forcément par rapport à l'autre.

Longueurs perpendiculaires à la direction de la vitesse

On veut justifier que les longueurs perpendiculaires à la direction de la vitesse ne subissent aucune contraction.

Supposons que les longueurs perpendiculaires à la direction de déplacement soient plus courtes lorsqu'elles sont en mouvements.

Prenons un train, qui rentre dans un tunnel.

Selon un observateur S immobile relativement au tunnel, le train se rétrécit verticalement et peut donc rentrer dans le tunnel.

Selon un observateur S' se trouvant dans le train, c'est le train qui est immobile et le tunnel qui se déplace, c'est donc le tunnel qui a rétréci verticalement et le train ne rentre pas dans le tunnel et fait une collision.

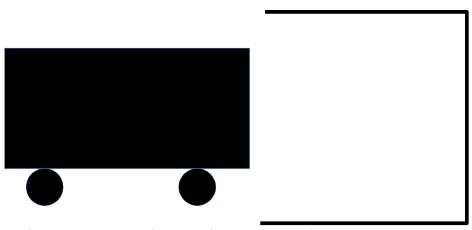
Il n'est pas possible d'avoir une collision selon un point de vue et pas selon un autre point de vue, car soit il y a eu collision, soit il n'y en a pas eu.

Conclusion, l'hypothèse de contraction des longueurs perpendiculaires à la direction de déplacement mène à une contradiction. L'hypothèse de dilatation mène à une contradiction similaire.

La seule possibilité est :

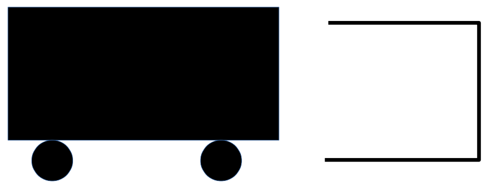
Les longueurs perpendiculaires à la direction de la vitesse ne subissent aucun changement

Selon le point de vue du tunnel



Le train rentre dans le tunnel

Selon le point de vue du train



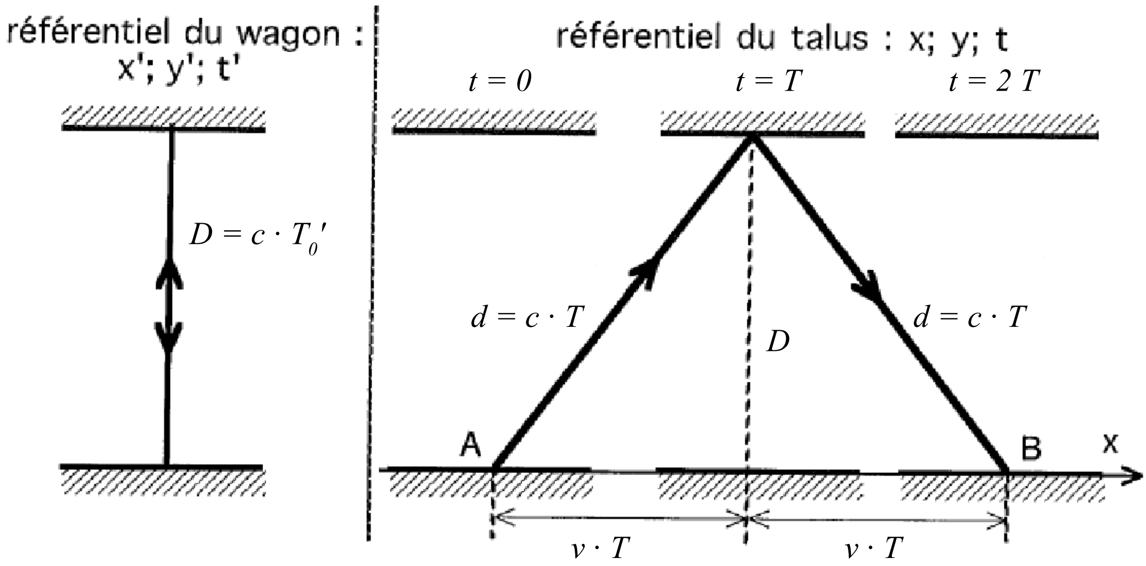
Le train ne rentre pas dans le tunnel.

L'hypothèse de contraction des longueurs perpendiculaires mène à une contradiction.

L'horloge de lumière (light clock).

Cette "horloge" est constituée par deux miroirs parallèles séparés par une distance D. Un éclair de lumière se déplace verticalement entre les deux miroirs, il effectue un aller et retour.

Plaçons cette horloge dans un Wagon S' en mouvement (horizontal) par rapport à un observateur S assis sur le talus.



Un observateur situé dans le wagon (**immobile par rapport à l'horloge**), mesurera le temps d'un aller identique au temps de retour T_0' d'une durée de $\frac{D}{c}$. Donc $D = c \cdot T_0'$.

L'observateur du talus (**en mouvement par rapport à l'horloge**), mesurera le temps d'un aller identique au temps de retour T d'une durée de $\frac{d}{c}$. Donc $d = c \cdot T$.

Par Pythagore : $d^2 = D^2 + (v \cdot T)^2$

On substitue D et d dans l'égalité pour obtenir : $c^2 \cdot T^2 = c^2 \cdot T_0'^2 + (v \cdot T)^2$.

En isolant T_0' : $T_0' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot T$ et donc $\boxed{T = \frac{T_0'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$

Avec la notation : $\beta = \frac{v}{c}$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, cela donne : $T = \gamma \cdot T_0'$.

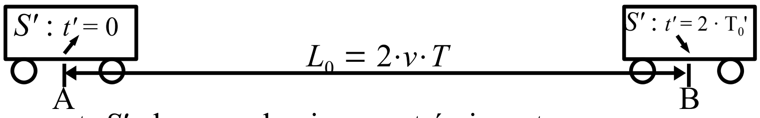
Le temps mesuré par l'observateur du talus *T*
(observateur en mouvement par rapport à l'horloge)
est plus grand que le temps mesuré par l'observateur du train T_0'
T_0' est appelé le temps propre.
(l'indice "$_0$" indique que l'observateur est immobile par rapport à l'horloge : c'est un temps propre).
Les événements "émission de l'éclair" et "réception de l'éclair" sont mesurés sur la même horloge pour celui qui mesure le temps propre.

On retrouve la "dilatation du temps" que Lorentz avait mis en évidence dans ses équations mais elle apparaît ici comme conséquence des postulats d'Einstein.

2.2 Longueurs parallèles à la direction de la vitesse

Reprenons "l'expérience" de l'horloge de lumière et plaçons une règle de longueur AB sur le talus.
L'observateur situé sur le talus, immobile par rapport à la règle, <u>mesure</u> sa longueur par : $L_0 = 2 \cdot v \cdot T$

Vu depuis le talus S : Au départ du rayon : À l'arrivée du rayon :



Dans le référentiel en mouvement S', le rayon lumineux est émis au temps $t' = 0$ quand sa position coïncide avec le point A du talus puis coïncide avec le point B du talus au temps $t' = 2 \cdot T_0'$. L'observateur du wagon, en mouvement par rapport à la règle, peut <u>mesurer</u> sa longueur par : $L' = 2 \cdot v \cdot T_0'$

Exprimons L_0 par rapport à L' :

$$\frac{L_0}{L'} = \frac{2 \cdot v \cdot T}{2 \cdot v \cdot T_0'} = \frac{T}{T'} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{donc} \quad \boxed{L' = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot L_0} \qquad L' = \frac{1}{\gamma} \cdot L_0$$

La longueur de la règle L' <u>mesurée</u> par l'observateur du wagon
(observateur en mouvement par rapport à la règle)
est plus petite que la longueur L_0 <u>mesurée</u> par l'observateur du talus
(l'indice "$_0$" indique que l'observateur est immobile par rapport à la règle : c'est une longueur propre).

On retrouve la "contraction" des longueurs de Fitzgerald et Lorentz mais, ici encore, elle découle simplement des postulats d'Einstein.

Remarques :

a) Il est essentiel de comprendre que la relativité d'Einstein ne dit pas que les objets se raccourcissent ou que le temps se dilate par je ne sais quel procédé-miracle mais bien que les <u>mesures (longueur et temps) faites par l'observateur en mouvement</u> **donnent des résultats différents** des <u>mesures effectuées par l'observateur immobile</u>. Mouvement et immobilité de l'observateur sont à considérer relativement à "l'objet" observé. À partir des postulats d'Einstein ce sont bien les **concepts de temps et d'espace** qui doivent être **remis en question** !

b) Les transformations de Lorentz sont celles qui correspondent à la relativité d'Einstein.

c) Si $v \ll c$ donc $\beta \approx 0$, les transformations de Lorentz se réduisent aux transformations de Galilée-Newton.

"L'effet relativiste" se mesure à l'importance que prend le terme $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$:

β	0	0,1	0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999
γ	1	1,005	1,155	2,294	7,09	22,4	70,7

Ce tableau nous montre que pour obtenir un effet relativiste visible, il faut que la vitesse de translation relative des deux référentiels soit de l'ordre du dixième de la vitesse de la lumière soit $\approx 3 \cdot 10^7$ [m/s].
Cette remarque montre bien que pour étudier les phénomènes mécaniques de la vie courante ainsi que la plupart des phénomènes de la mécanique céleste, le modèle de la mécanique classique est bien suffisant.
Pourtant, les transformations de Lorentz auront bien d'autres conséquences sur les grandeurs fondamentales de la mécanique.
Nous avons déjà étudié la "contraction" des longueurs et la "dilatation" du temps, dans le paragraphe suivant, nous établirons l'effet de ces transformations sur d'autres grandeurs fondamentales de la mécanique.

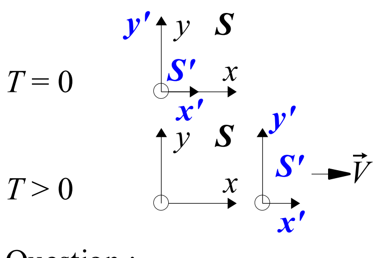
2.3 Transformations de Lorentz

Dans un référentiel $\boldsymbol{S}$, chaque événement peut être localisé par :
° trois coordonnées X, Y, Z d'espace et
° une coordonnée T de temps.

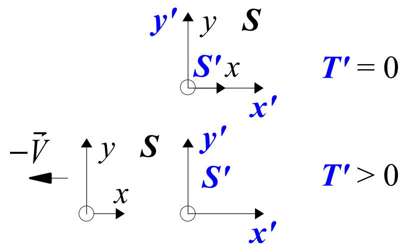
Dans un référentiel $\boldsymbol{S'}$, chaque événement peut être localisé par :
° trois autres coordonnées $\boldsymbol{X'}$, $\boldsymbol{Y'}$, $\boldsymbol{Z'}$ d'espace et
° une autre coordonnée $\boldsymbol{T'}$ de temps.

Limitons-nous au cas où le référentiel $\boldsymbol{S'}$ se déplace dans le sens $+x$ selon S,
donc le référentiel $\boldsymbol{S}$ se déplace dans le sens $-\boldsymbol{x'}$ selon $\boldsymbol{S'}$. $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{S'}$ confondus au temps $T = \boldsymbol{T'} = 0$.

Dessin selon $\boldsymbol{S}$



Dessin selon $\boldsymbol{S'}$



Question :
Connaissant les coordonnées de l'événement dans un référentiel, quelles sont ses coordonnées dans l'autre référentiel ? Un exemple d'événement est dessiné en fin de page.

$\boxed{\beta = \frac{V}{c}}$ $\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}$ $\boxed{\beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}}$

Réponse : se sont les **Transformations de Lorentz**.

$\boldsymbol{X'} = \gamma \cdot (X - \beta \cdot cT)$ $\quad X = \gamma \cdot (\boldsymbol{X'} + \beta \cdot \boldsymbol{cT'})$

$\boldsymbol{cT'} = \gamma \cdot (cT - \beta \cdot X)$ $\quad cT = \gamma \cdot (\boldsymbol{cT'} + \beta \cdot \boldsymbol{X'})$

$\boldsymbol{Y'} = Y$ et $\boldsymbol{Z'} = Z$

Il peut être utile d'être plus précis.
Considérons un point $\boldsymbol{m}$ dans le réf. $\boldsymbol{S}$, de coordonnées : ($X_{m\times a}$; $Y_{m\times a}$; $Z_{m\times a}$) lorsque " $\boldsymbol{m}$ croise $\boldsymbol{a}$ ".
Considérons un point $\boldsymbol{a}$ dans le réf. $\boldsymbol{S'}$, de coordonnées : ($\boldsymbol{X'}_{a\times m}$; $\boldsymbol{Y'}_{a\times m}$; $\boldsymbol{Z'}_{a\times m}$) lorsque " $\boldsymbol{a}$ croise $\boldsymbol{m}$ ".
Selon le référentiel $\boldsymbol{S}$ l'événement " $\boldsymbol{m}$ croise $\boldsymbol{a}$ " a lieu au temps $T_{m\times a}$.
Selon le référentiel $\boldsymbol{S'}$ l'événement " $\boldsymbol{a}$ croise $\boldsymbol{m}$ " a lieu au temps $\boldsymbol{T'}_{a\times m}$.
" $_{m\times a}$ " signifie " $\boldsymbol{m}$ croise $\boldsymbol{a}$ "
" $_{a\times m}$ " signifie " $\boldsymbol{a}$ croise $\boldsymbol{m}$ ", qui est identique à l'événement : " $\boldsymbol{m}$ croise $\boldsymbol{a}$ ".

Avec cette notation plus lourde, mais plus précise, les Transformations de Lorentz s'écrivent :

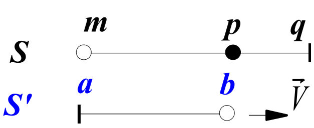
$\boldsymbol{X'}_{a\times m} = \gamma \cdot (X_{m\times a} - \beta \cdot cT_{m\times a})$ $\quad X_{m\times a} = \gamma \cdot (\boldsymbol{X'}_{a\times m} + \beta \cdot \boldsymbol{cT'}_{a\times m})$

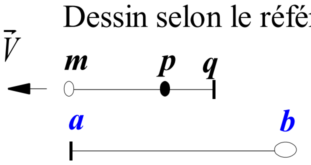
$\boldsymbol{cT'}_{a\times m} = \gamma \cdot (cT_{m\times a} - \beta \cdot X_{m\times a})$ $\quad cT_{m\times a} = \gamma \cdot (\boldsymbol{cT'}_{a\times m} + \beta \cdot \boldsymbol{X'}_{a\times m})$

$\boldsymbol{Y'}_{a\times m} = Y_{m\times a}$ et $\boldsymbol{Z'}_{a\times m} = Z_{m\times a}$

Remarque :
Il est ambigu de parler du temps $\boldsymbol{T'}_b$ en $\boldsymbol{b}$ lors de l'événement " $\boldsymbol{m}$ croise $\boldsymbol{a}$ ", car l'événement " $\boldsymbol{m}$ croise $\boldsymbol{a}$ " n'a pas lieu au même instant que l'événement " $\boldsymbol{p}$ croise $\boldsymbol{b}$ " dans les deux référentiels.
Il faut indiquer le référentiel d'observation pour pouvoir dire à quel instant l'événement a lieu.
Autrement dit, même si $T_{m\times a} = T_{p\times b}$, il se peut que $\boldsymbol{T'}_{a\times m} \neq \boldsymbol{T'}_{b\times p}$.

Dessin selon le référentiel $\boldsymbol{S}$. Dessin selon le référentiel $\boldsymbol{S'}$.



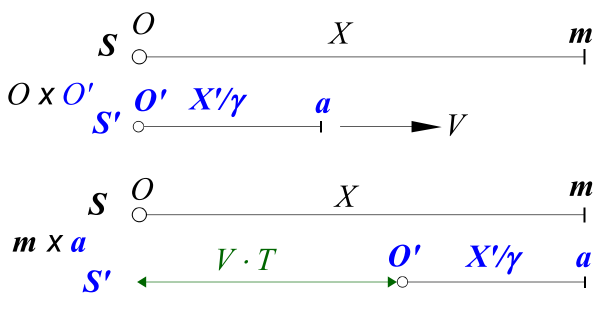


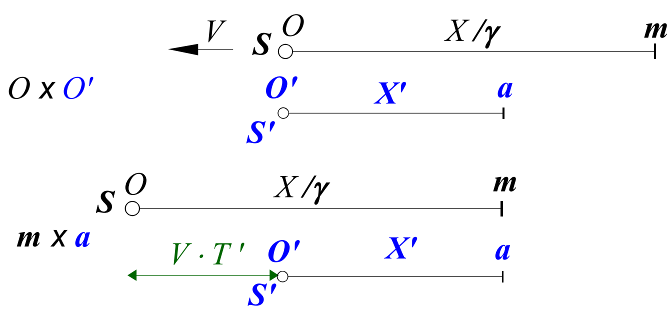
" $\boldsymbol{m}$ croise $\boldsymbol{a}$ " et " $\boldsymbol{p}$ croise $\boldsymbol{b}$ " sont simultanés.

" $\boldsymbol{a}$ croise $\boldsymbol{m}$ " et " $\boldsymbol{b}$ croise $\boldsymbol{p}$ " ne sont pas simultanés !

Montrons les transformations de Lorentz à partir de la contraction des longueurs et de dessins.

Dessin vu depuis la Terre S. Vu depuis la Fusée S'





X est une longueur propre dans S
T est le temps dans S entre
O x O' et m x a.

X' est une longueur propre dans S'.
T' est le temps dans S' entre
O x O' et m x a.

Aucun des deux temps T et T' n'est propre.

Les dessins montrent que :

(1) $X'/\gamma = X - V\cdot T$

(2) $X/\gamma = X' + T'\cdot V$

Donc $\boxed{X' = \gamma\cdot(X - \beta\cdot cT)}$ et $\boxed{X = \gamma\cdot(X' + \beta\cdot cT')}$

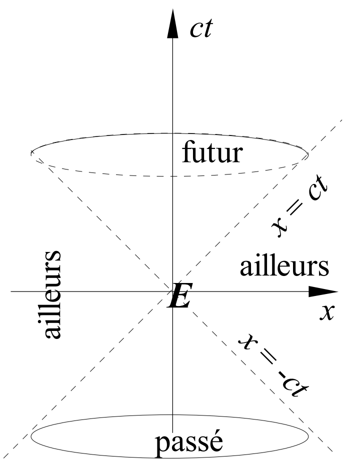
En divisant (1) par γ : $X'/\gamma^2 = X/\gamma - \beta\cdot cT/\gamma$
En substituant (2) dans l'équation précédente : $X'/\gamma^2 = X' + \beta\cdot cT' - \beta\cdot cT/\gamma$
En utilisant $1/\gamma^2 = 1 - \beta^2$: $X' - \beta^2\cdot X' = X' + \beta\cdot cT' - \beta\cdot cT/\gamma$
Simplifications : $-\beta\cdot X' = cT' - cT/\gamma$
Isolation de cT, conclusion $\boxed{cT = \gamma\cdot(cT' + \beta\cdot X')}$
De manière similaire, on obtient : $\boxed{cT' = \gamma\cdot(cT - \beta\cdot X)}$

On vient de démontrer les formules des transformations de Lorentz, à partir de la contraction des longueurs et de dessins précis fait dans chacun des deux référentiels.

Cône de lumière

Considérons un *événement* E en un endroit de l'espace, à un instant donné. Pour cet événement, l'espace-temps se subdivise en 3 régions.

- **Le passé**, correspondant à toutes les coordonnées $(x\,;y\,;z\,;t)$ ayant pu influencer l'événement ;
- **Le futur** correspondant à toutes les coordonnées $(x\,;y\,;z\,;t)$ pouvant être influencé par l'événement.
- **L'ailleurs**, n'ayant aucun lien de cause à effet avec l'événement. Aucun événement de coordonnées $(x\,;y\,;z\,;t)$ de l'ailleurs n'a pu influencer ou ne sera influencé par l'événement E.



Si on considère aussi y comme deuxième coordonnée d'espace, les rayons de lumières issus de E forment un cône.
En 3 dimensions spatiales, le dessin devrait être en 4 dimensions et le cône devient un hyper-cône de dimension 3.

2.3 Addition des vitesses.

Nous observons la vitesse d'un mobile depuis deux référentiels d'inertie S et S', en mouvement relatif à la vitesse $v_{SS'}$.
Le principe de relativité impose que la définition de la vitesse est la même dans tous les référentiels d'inertie, c'est-à-dire, la dérivée de la position par rapport au temps.

$$\vec{v} = \left\langle \frac{dx}{dt} \; ; \; \frac{dy}{dt} \; ; \; \frac{dz}{dt} \right\rangle \quad \text{et} \quad \vec{v}\,' = \left\langle \frac{dx'}{dt'} \; ; \; \frac{dy'}{dt'} \; ; \; \frac{dz'}{dt'} \right\rangle$$

En utilisant les transformations de Lorentz pour changer de référentiel :
Pour simplifier l'écriture, notons V la vitesse de S relativement à S' au lieu de $v_{S'S}$.

$x = \gamma \cdot (x' + V \cdot t')$, donc $dx = \gamma \cdot (dx' + V \cdot dt') = \gamma \cdot (v_x' + V) \cdot dt'$

$y = y' \Rightarrow dy = dy'$

$z = z' \Rightarrow dz = dz'$

$t = \gamma \cdot (t' + V \cdot x' / c^2)$, donc $dt = \gamma \cdot (dt' + V \cdot dx' / c^2) = \gamma \cdot (1 + V \cdot v_x' / c^2) \cdot dt'$ donc

$dt = \gamma \cdot (1 + V \cdot v_x' / c^2) \cdot dt'$

À l'aide des expressions de dx, dy, dz et dt nous pouvons établir les équations d'addition de vitesses :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma \cdot (v_x' + V) \cdot dt'}{\gamma \cdot (1 + V \cdot v_x' / c^2) \cdot dt'}$$

En simplifiant cela donne : $\boxed{v_x = \dfrac{v_x' + V}{1 + \dfrac{V \cdot v_x'}{c^2}}}$.

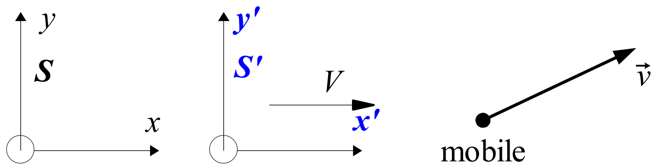
De même on obtient : $\boxed{v_y = \dfrac{v_y'}{1 + \dfrac{V \cdot v_x}{c^2}} \cdot \sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$ et $\boxed{v_z = \dfrac{v_z'}{1 + \dfrac{V \cdot v_x}{c^2}} \cdot \sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$

On préfère écrire :

$\boxed{\beta_x = \dfrac{\beta_x' + \beta}{1 + \beta \cdot \beta_x'}}$; $\boxed{\beta_y = \dfrac{\beta_y'}{1 + \beta \cdot \beta_x} \cdot \sqrt{1 - \beta^2}}$; $\boxed{\beta_z = \dfrac{\beta_z'}{1 + \beta \cdot \beta_x} \cdot \sqrt{1 - \beta^2}}$

Les transformations inverses s'obtiennent en remplaçant V par $-V$, donc β par $-\beta$.
Pour $V \ll c$, nous retrouvons les transformations de Galilée-Newton pour la vitesse :
$v'_x = v_x - V$; $v'_y = v_y$; $v'_z = v_z$.

Illustration selon le point de vue de S.



Vous pouvez vérifier que tant que $|v_x'| < c$ et $|V| < c$, on trouve que $|v_x| < c$.

2.4 Quantité de mouvement, masse et force

Si l'on soumet le principe de conservation de la quantité de mouvement aux transformations de Lorentz, on constate que pour que le principe reste valable, il faut modifier l'expression de la quantité de mouvement.
L'expression relativiste de la quantité de mouvement est donnée par :

$\boxed{\vec{p} = \gamma \cdot m_0 \cdot \vec{v}}$; $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $\beta = \dfrac{v}{c}$; m_0 = la **masse au repos** de la particule, c'est-à-dire la masse mesurée dans un référentiel dans lequel la particule est immobile.

En posant $m = \gamma \cdot m_0$ on retrouve la définition classique de la quantité de mouvement $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$, mais avec une notion de masse m qui dépend la vitesse de la particule.

Il semble donc que **la masse (inertie) varie en fonction de la vitesse**.
En effet, si v << c on retrouve l'expression $\approx m_0$

Dans ce contexte $\mathbf{m_0}$, appelée **"masse au repos"**, est la masse de l'objet <u>mesurée dans son propre référentiel</u> (vitesse nulle par rapport à l'objet).
C'est aussi la masse "classique" que nous utilisons dans les équations de Newton.

La **"masse relativiste"** m est la masse de l'objet <u>mesurée dans un référentiel en translation uniforme</u> (vitesse constante par rapport à l'objet) :

$\mathbf{m \geq m_0}$

Par exemple, dans le rayonnement cosmique, on a observé des électrons dont la masse relativiste est de 40 000 fois la masse au repos.

La force en relativité.

En mécanique classique, les trois définitions suivantes de force résultante sont équivalentes :
$\vec{F}_{rés} = m_0 \cdot \vec{a}$; $\vec{F}_{rés} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$; $\vec{F}_{rés} = \dfrac{d^2(m_0 \cdot \gamma \cdot \vec{r})}{d^2 t}$. (Classiquement $\gamma = 1$)
En relativité, ces trois définitions sont différentes.
Puisque la quantité de mouvement totale est conservée durant une collision, la définition la plus naturelle est : $\boxed{\vec{F}_{rés} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}}$. C'est celle qui est généralement adoptée par les physiciens.

<u>Première conséquence :</u> la force $\vec{F}$ n'est plus parallèle à l'accélération $\vec{a}$.

$$\vec{F}_{rés} = m_0 \cdot \frac{d(\gamma \cdot \vec{V})}{dt} = m_0 \cdot \left(\frac{d\gamma}{dt} \cdot \vec{V} + \gamma \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} \right) = m_0 \cdot \frac{d\gamma}{dt} \cdot \vec{V} + m_0 \cdot \gamma \cdot \vec{a}$$

Si la vitesse n'est pas constante, le premier terme n'est pas nul. Si, de plus, la vitesse est dans une direction différente de l'accélération, la force sera aussi dans une direction différente de l'accélération.

<u>Deuxième conséquence :</u> la force $\vec{F}_{rés}$ n'est plus indépendante du référentiel.
Si on se limite à une dimension, alors la force est indépendante du référentiel, mais ce n'est pas vrai de manière générale.

Les deux conséquences ci-dessus rendent la notion de force moins intéressante en relativité qu'elle ne l'est en mécanique classique. De plus le frottement n'est pratiquement jamais traité en relativité, donc les deux grandeurs fondamentales de la dynamique relativiste sont **la quantité de mouvement** et **l'énergie**.

2.5 Vitesse limite : c.

Si $v=c$ on constate que m devient infinie, l'inertie de l'objet devient infinie !

On va montrer que la vitesse de la lumière est une limite qu'il n'est pas possible de dépasser. même en appliquant une force constante pendant un temps très long !

En mécanique classique : $\vec{a}=\frac{\vec{F}_{rés}}{m_0}$ et $\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\vec{a}\cdot t$ donc $v(t)\rightarrow\infty$ si $t\rightarrow\infty$

En mécanique relativiste en une dimension : $F_{rés}=\frac{d}{dt}(\gamma\cdot m_0\cdot v)$

Étudions l'évolution de la vitesse d'un objet soumis à une force résultante constante. Autrement dit, dans son propre référentiel, l'objet subit une accélération constante, l'évolution de sa vitesse est observée depuis un référentiel d'inertie.

De $F_{rés}=\frac{d}{dt}(\gamma\cdot m_0\cdot v)$ on en déduit $\gamma\cdot m_0\cdot v=F_{rés}\cdot t$, si on prend une vitesse initiale nulle.

Écrit explicitement : $\frac{m_0\cdot v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=F_{rés}\cdot t$.

En mettant au carré, on peut isoler la vitesse : $v(t)=c\cdot\frac{\frac{F_{rés}\cdot t}{m_0\cdot c}}{\sqrt{1+\frac{F_{rés}^2}{m_0^2\cdot c^2}\cdot t^2}}$

Si t est très petit :

La racine du dénominateur vaut quasiment 1 et donc $v(t)=c\cdot\frac{F_{rés}\cdot t}{m_0\cdot c}=\frac{F_{rés}}{m_0}\cdot t=a\cdot t$

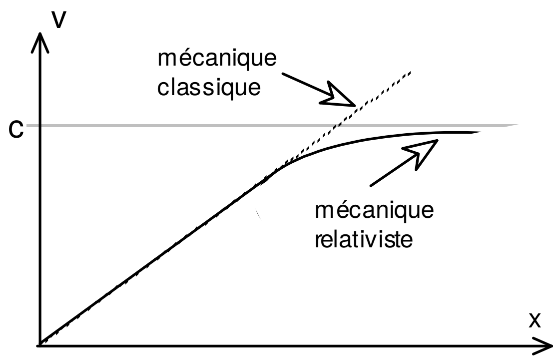
On retrouve le résultat prévu en mécanique classique.

Si t est très grand :

La racine du dénominateur vaut quasiment $\sqrt{\frac{F_{rés}^2}{m_0^2\cdot c^2}\cdot t^2}$ qui est égal au numérateur, donc la vitesse $v(t)$ est quasiment égale à c.

On constate que $\gamma(t)=\frac{\sqrt{m_0^2\cdot c^2+F_{rés}^2\cdot t^2}}{m_0\cdot c}$ grandit quasiment proportionnellement au temps.

La vitesse tend vers une valeur limite qui est la vitesse de la lumière !



mouvement à force constante

2.6 Énergie cinétique et relativité.

Comme en mécanique classique, on peut définir le travail de la force résultante, pour arriver à la notion d'énergie cinétique. Mais en relativité, on arrive également à une notion plus générale d'énergie et en particulier à la fameuse formule : $E = m \cdot c^2$. (avec $m = \gamma \cdot m_0$)

Tout ce qui suit peut être fait vectoriellement, mais nous allons simplifier en restant en une dimension et en utilisant : $\beta = V/c$ et $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$. Donc $\beta^2 + \frac{1}{\gamma^2} = 1$ (nous sera utile)

Calculons le travail pour aller de r_A à r_B . $p = m_0 \cdot c \cdot \gamma \cdot \beta$ représente la quantité de mouvement. On choisit que la vitesse en A est nulle.

$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} F_{rés} \cdot dr = \int_{r_A}^{r_B} \frac{dp}{dt} \cdot dr$ définition du travail de la force résultante

$W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \frac{dp}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} \cdot dt$ changement de variable dt au lieu de dr

$W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \frac{dp}{dt} \cdot \beta \cdot c \cdot dt = c \cdot \int_{t_A}^{t_B} \frac{dp}{dt} \cdot \beta \cdot dt$ utilisation de $\frac{dr}{dt} = c \cdot \beta$ = vitesse et mise en évidence de la constante c

$W_{AB} = c \cdot [p \cdot \beta]_0^{\beta_B} - c \cdot \int_{t_A}^{t_B} p \cdot \frac{d\beta}{dt} \cdot dt$ intégration par partie

$W_{AB} = m_0 \cdot c^2 \cdot \gamma_B \cdot \beta_B^2 - m_0 \cdot c^2 \cdot \int_0^{\beta_B} \gamma \cdot \beta \cdot d\beta$ simplification par dt et utilisation de : $p = m_0 \cdot c \cdot \gamma \cdot \beta$

$W_{AB} = m_0 \cdot c^2 \cdot \gamma_B \cdot \beta_B^2 - m_0 \cdot c^2 \cdot \int_0^{\beta_B} \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot d\beta$ écriture explicitement de γ en fonction de β

$W_{AB} = m_0 \cdot c^2 \cdot \gamma_B \cdot \beta_B^2 - -m_0 \cdot c^2 \cdot \left[\sqrt{1-\beta^2}\right]_0^{\beta_B}$ une primitive a été trouvée

$W_{AB} = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\gamma_B \cdot \beta_B^2 + \sqrt{1-\beta_B^2} - 1\right)$ évaluation de la primitive aux bornes et mise en évidence de $m_0 \cdot c^2$

$W_{AB} = m_0 \cdot c^2 \cdot \gamma_B \cdot \left(\beta_B^2 + \frac{1}{\gamma_B^2}\right) - m_0 \cdot c^2$ réarrangement des termes et utilisation de : $\sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{\gamma}$

$W_{AB} = m_0 \cdot c^2 \cdot \gamma_B - m_0 \cdot c^2$ utilisation de : $\beta^2 + \frac{1}{\gamma^2} = 1$

On a montré que pour accélérer une particule de masse au repos m_0 d'une vitesse nulle à une vitesse $\beta \cdot c$, le travail de la force résultante vaut : $W_{AB} = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2$.

En relativité, on définit l'**énergie cinétique** par : $\boxed{E_{cin} = m_0 \cdot c^2 \cdot (\gamma - 1)}$ et

l'énergie totale d'une particule est définie par : $\boxed{E = m_0 \cdot c^2 \cdot \gamma}$

On peut écrire : $E_{cin} = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2$.

Ce résultat montre que le gain en énergie cinétique peut être considéré comme un **gain de masse**.

Le terme $\boldsymbol{m_0 \cdot c^2}$ représente **l'énergie au repos** de la particule, énergie représentée par la masse au repos de la particule !

L'expression relativiste de l'énergie cinétique semble très différente de l'expression classique.

Interprétons ce résultat pour de faibles vitesses, $\beta \ll 1$, donc $\gamma \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \beta^2$

$E_{cin} = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \beta^2 - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot c^2 \cdot \beta^2 = \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v^2$ qui est l'énergie cinétique classique.

2.7 Conservation de l'énergie.

La conservation de l'énergie dans un système isolé impose : $\mathcal{E}_{mec} = \text{cst}$

Examinons deux états 1 et 2 du système. La conservation de l'énergie exige que :

$\mathcal{E}_{cin1} + \mathcal{E}_{pot1} = \mathcal{E}_{cin2} + \mathcal{E}_{pot_2} = \text{constante}$

donc $\mathcal{E}_{cin2} - \mathcal{E}_{cin1} = \mathcal{E}_{pot1} - \mathcal{E}_{pot2}$

mais $\Delta\mathcal{E}_{cin} = \mathcal{E}_{cin2} - \mathcal{E}_{cin1} = (m_2 - m_1) \cdot c^2$ par conséquent :

$\mathcal{E}_{pot1} - \mathcal{E}_{pot2} = (m_2 - m_1) \cdot c^2$

Cette égalité suggère qu'à un changement de l'énergie potentielle interne du système correspond un changement de masse du système.
Cette conversion de masse en énergie a effectivement été observée.
La variation de masse n'est visible que si la variation d'énergie est très grande (en raison du terme c^2) comme, par exemple, la fission et la fusion de noyaux d'atomes.

2.8 Énergie et quantité de mouvement.

En combinant $\vec{p} = \gamma \cdot m_0 \cdot \vec{v}$ et $E = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2$ pour éliminer $\gamma \cdot m_0$, nous obtenons une nouvelle expression pour la quantité de mouvement : $\vec{p} = \frac{E}{c^2} \cdot \vec{v}$

Exprimons une relation entre p et E, sans apparition du terme γ ni de la vitesse.

Rappelons que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ et donc que $\beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}$.

Partons des définitions de la quantité de mouvement et de l'énergie totale.

$p = \gamma \cdot m_0 \cdot c \cdot \beta = \gamma \cdot m_0 \cdot c \cdot \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}$ et $E^2 = \gamma^2 \cdot m_0^2 \cdot c^4$ donc

$p^2 \cdot c^2 = \gamma^2 \cdot m_0^2 \cdot c^4 \cdot \left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right) = \gamma^2 \cdot m_0^2 \cdot c^4 - m_0^2 \cdot c^4$

On trouve la relation cherchée : $p^2 \cdot c^2 = E^2 - m_0^2 \cdot c^4$ et donc $\boxed{E^2 = m_0^2 \cdot c^4 + p^2 \cdot c^2}$

Comme $m_0 \cdot c^2 = E_0$ = l'énergie au repos, on peut écrire : $\boxed{E^2 = E_0^2 + p^2 \cdot c^2}$

2.9 Unités usuelles en mécanique relativiste.

En mécanique relativiste, on utilise les unités **SI**, pourtant, dans le domaine des particules élémentaires, domaine où la mécanique relativiste est utilisée, on utilise **l'électron volt [eV]** comme unité **d'énergie** :

1 [eV] = $1{,}6022 \cdot 10^{-19}$ [J]
1 [keV] = 10^3 [eV]
1 [MeV] = 10^6 [eV]
1 [GeV] = 10^9 [eV]

des quantités comme $p \cdot c$ et $m_0 \cdot c^2$ s'expriment couramment en [MeV].

On exprimera parfois la **quantité de mouvement** en **[eV/c].**

Si une particule a une quantité de mouvement de 2,0 [GeV/c] elle a donc une quantité de mouvement de :

$$\frac{2{,}0 \cdot 10^9\,[V] \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,[J]}{3{,}0 \cdot 10^8\,[m/s]} = 1{,}1 \cdot 10^{-18}\left[\frac{kg \cdot m}{s}\right]$$

On exprimera parfois **la masse** en **[eV/c^2]**

La masse au repos du proton est d'environ 938 [MeV/c^2]

En unités SI : $m_0 = \dfrac{938 \cdot 10^6\,[eV] \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,[J/eV]}{(3{,}0 \cdot 10^8\,[m/s])^2} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,[kg]$

Référence.
"Introduction à la relativité, avec exercices corrigés" de James H. Smith, édition Masson, 1997.
ISBN 2-225-82985-3 traduction par Philippe Brenier.

"Supercordes et autres ficelles" de Carlos Calle, édition Dunod, 2004, chapitre 19 "La théorie de la relativité restreinte".
EAN13 : 9782100074471

"Histoire d'une grande idée, LA RELATIVITÉ" de Banesh Hoffmann, Pour la Science, diffusion Belin.

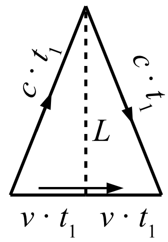
"PHYSIQUE, 3. Ondes, optique et physique moderne" de Eugène Hecht, édition de boeck, 2007, chapitre 7 "Relativité restreinte..
ISBN 978-2-8041-5382-3 traduit de l'anglais par T. Becherrawy.

Annexe concernant l'expérience de Michelson-Morley

Plaçons-nous dans le contexte de la fin du 19e siècle en supposant l'existence de l'éther et cherchons comment l'expérience de Michelson-Morley peut détecter le mouvement de la Terre dans l'éther.
La Terre met une 365 jours pour faire un tour autour du Soleil et se trouve à 150 millions de km du Soleil. On en déduit la vitesse de la Terre autour du Soleil de 30'000 [m/s], soit 1/10'000 de la vitesse de la lumière. Donc il doit y avoir une période au cours de l'année où la Terre se déplace bien à au moins 1/10'000 de la vitesse de la lumière dans l'éther.

Déterminons la différence de temps que met la lumière dans les deux bras de l'interféromètre de Michelson-Morley.

<u>Pour le bras se déplaçant perpendiculairement à l'éther :</u>

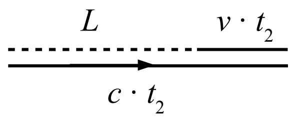


Par Pythagore : $(c \cdot t_1)^2 = (v \cdot t_1)^2 + L^2$ donc $t_1^2 = \dfrac{L^2}{c^2 - v^2}$

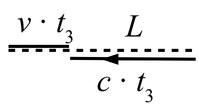
Le temps de monter et descendre : $2 \cdot t_1 = \dfrac{2 \cdot L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$

<u>Pour le bras se déplaçant parallèlement à l'éther :</u>

Aller



Retour



Pour l'aller : $c \cdot t_2 = L + v \cdot t_2$ donc $t_2 = \dfrac{L}{c - v}$

Pour le retour : $c \cdot t_3 = L - v \cdot t_3$ donc $t_3 = \dfrac{L}{c + v}$

Le temps total de l'aller-retour donne : $t_2 + t_3 = \dfrac{L}{c - v} + \dfrac{L}{c + v} = \dfrac{2 \cdot L \cdot c}{c^2 - v^2}$

<u>La différence de temps entre le rayon se déplaçant verticalement et celui se déplaçant horizontalement :</u>

$$t_2 + t_3 - 2 \cdot t_1 = \frac{2 \cdot L \cdot c}{c^2 - v^2} - \frac{2 \cdot L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = 2 \cdot L \cdot \frac{c - \sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - v^2} \quad \text{donc} \quad \Delta t = 2 \cdot L \cdot \frac{c - \sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - v^2}$$

Écriture plus agréable : $\boxed{\Delta t = 2 \cdot \dfrac{L}{c} \cdot \dfrac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta^2}}$ avec $\beta = \dfrac{v}{c}$.

Lorsque $\beta \ll 1$, $\sqrt{1 - \beta^2} = 1 - \dfrac{1}{2} \cdot \beta^2$ et $1 - \beta^2 = 1$, donc $\boxed{\Delta t = \dfrac{L}{c} \cdot \beta^2}$

Pour $L = 1$ [m] ; $\beta = 10^{-4}$ et $c = 3 \cdot 10^8 \, [m/s]$ on trouve : $\Delta t = \dfrac{1}{3 \cdot 10^8} \cdot 10^{-8} = 3{,}3 \cdot 10^{-17} \, [s]$

Durant ce temps, la lumière se déplace de : $\Delta \ell = c \cdot \Delta t = L \cdot \beta^2 = 10 \, [nm]$.
Si un laser rouge est utilisé, la longueur d'onde est de 800 [nm], donc il faut détecter une différence de longueur de 1,2% de la longueur d'onde utilisé, ce qui est fait avec un interféromètre de Michelson.

<u>Remarquons</u> encore que si on fait l'hypothèse que la longueur dans la direction de déplacement rétrécit à : $L_{\text{a-r}} = L \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} = L/c \cdot \sqrt{c^2 - v^2}$, alors $t_2 + t_3 = \dfrac{2 \cdot L_{\text{a-r}} \cdot c}{c^2 - v^2} = \dfrac{2 \cdot L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = 2 \cdot t_1$
Le temps mis par la lumière dans les deux bras est rigoureusement le même, aucune détection de mouvement dans l'éther n'est possible.