II. DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL

II.1. Introduction

La **dynamique**, redevable en très grande partie à **Newton**, étudie les mouvements en tenant compte de leurs causes. La recherche de relations quantitatives de cause à effet date du dix-septième siècle. C'est par *induction* que les lois physiques ont été obtenues. Les lois physiques, ainsi que les principes tels que le principe de conservation de l'énergie constituent des généralisations de l'esprit humain.
L'induction est une manière de raisonner en passant du singulier au général.

Au début de notre étude de la dynamique, nous nous limiterons aux mouvements d'objets matériels individuels (ex: "points matériels" ou systèmes de deux points matériels) plutôt qu'à des structures compliquées que nous réservons pour la suite (ex: système de particules : gaz; corps solides indéformables).

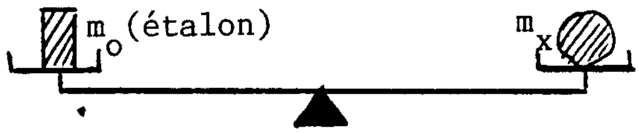
Citons, dans un bref sommaire, les points essentiels que nous aborderons dans cette deuxième partie. Nous définirons d'abord la **masse** d'un corps, auquel sont soumis tous les systèmes physiques isolés. Après avoir défini la notion de **force**, nous présenterons une première version des **trois lois de Newton,** traditionnellement connues comme : la loi d'inertie, la loi fondamentale de la dynamique et la loi d'action-réaction, cette dernière loi mettant en évidence le fait qu'une **force caractérise toujours une interaction.**

C'est pourquoi nous consacrerons un chapitre aux **interactions** : en dernière analyse, l'étude des phénomènes physiques, dans leur ultime interprétation se ramène à l'étude de quatre types d'interactions fondamentales. Enfin, nous introduirons la notion de quantité de mouvement, nous énoncerons son principe de conservation et nous appliquerons cette propriété à l'étude des chocs.

II.2. Notion de masse

La **masse** d'un corps est une grandeur physique scalaire qui mesure ses propriétés de **gravitation** et **d'inertie**.

Masse gravitationnelle.
La **masse gravitationnelle** ou **masse pesante** d'un corps peut être définie de manière opérationnelle en utilisant le principe de la balance à bras égaux. C'est une méthode **statique**.



à l'équilibre : $m_x = m_0$

On constate expérimentalement que l'équilibre de la balance ne dépend pas du lieu où se trouve cette dernière. La masse est une quantité constante pour un corps donné. Elle caractérise la quantité de matière que renferme ce corps.
La gravitation sera étudiée plus tard.

Masse inerte

La masse inerte d'un corps mesure sa propriété d'inertie. En toute généralité, *la propriété d'inertie d'un corps est de s'opposer à toute variation de sa vitesse*. On peut également dire que, *à cause de son inertie, un corps a tendance à conserver une vitesse* $\vec{v}$ *constante*.
Une méthode **dynamique** permet alors de définir opérationnellement la masse inerte. C'est ce que nous ferons avec la loi fondamentale de la dynamique.
Newton constata que le masse gravitationnelle et la masse inerte sont égales.

L'unité de la masse dans le système international est le **kilogramme** [kg]. "Le kilogramme est la masse du prototype international du kilogramme..." (1901).
La **quantité de matière**, proprement dite, est mesurée par une grandeur dont l'unité du SI est la **mole:** il y a $6{,}022 \cdot 10^{23}$ entités élémentaires dans une mole.

Quelques propriétés de la masse

1) La *masse est une **grandeur scalaire***. Il suffit d'un nombre avec une unité pour la caractériser. Par opposition avec une **grandeur vectorielle**, pour laquelle, la donnée d'une direction et d'un sens est essentielle.
2) La *masse est une grandeur **additive***. On parle aussi de grandeur **extensive**, qui dépend de l'extension du système, contrairement à une grandeur **intensive** indépendante de la quantité de matière du système.
   Exemples de grandeurs intensives : la température et la masse volumique.
3) La *masse totale d'un système isolé est conservée*. Cette conservation est bien vérifiée dans le cas de transformations physiques classiques (ex: changements d'états) et dans le cas de réactions chimiques comme Antoine Laurent de Lavoisier l'a montré vers la fin du 18ème siècle. Toutefois, la masse totale d'un système n'est plus conservée lors des interactions nucléaires. Dans ce cas, il faut alors considérer le principe plus général de la conservation de l'énergie.
4) La *masse d'une substance homogène est proportionnelle à son volume*. Cela signifie que la masse volumique d'une substance homogène est constante.

Remarque :
Nous abolirons le terme de *poids*, car sa signification en physique est différente de celle d'usage quotidien.
La **force de pesanteur** $\vec{F}_p = m \cdot \vec{g}$, naguère appelée "poids", est une grandeur vectorielle dont l'unité est le newton [N], dans le S.I. .

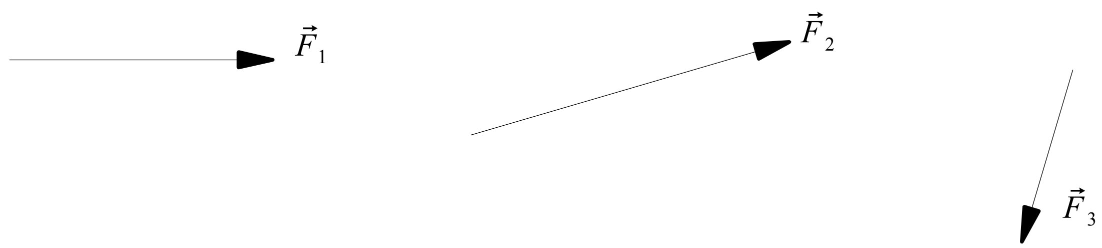
II.3. Le concept de FORCE

La grande réussite de **Newton,** en 1687, fut d'avoir montré comment établir, à l'aide des concepts d'espace, de temps, de masse et de force, un système cohérent qui rende compte de presque tous les phénomènes physiques connus à son époque. Le système scientifique de Newton fut à la base de la mécanique classique. Certains concepts, comme celui de la **force**, continuèrent, par la suite, à jouer un rôle fondamental.
A l'origine, la notion de force fut utilisée pour décrire l'expérience de l'effort musculaire, puis elle a servi à désigner la cause de tout déplacement d'un corps. Avec la dynamique de Newton, la force devint un concept "abstrait", qui fut mis en relation avec les concepts de masse et d'accélération. En dernière analyse, il s'avère que la **force** caractérise toujours une **interaction** !

Définition de la force
Une force est toute cause capable de déformer un corps ou de changer son mouvement.
Lorsqu'un corps est soumis à plusieurs forces, on introduit la notion de « force résultante ».
La force **résultante** est, par définition, la somme vectorielle de toutes les forces qui s'exercent sur un corps. $\vec{F}_{\text{résultante}}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+...+\vec{F}_n$

Remarque :
Cette définition de la force ne saurait en aucun cas nous renseigner sur la **nature** (gravitation, électrique, ...) de l'interaction qu'elle représente.

Représentation d'une force par une flèche.
Étant donné une échelle de conversion de longueur en Newtons, on peut représenter une force par une flèche. La longueur de la flèche indique l'intensité de la force, la direction de la flèche indique la direction de la force.
Ex. Échelle : 1 [cm] ↔ 50 [N]. Mesurez précisément les longueurs des flèches suivantes et indiquez l'intensité des forces correspondantes.



Addition vectorielle des forces, rappels...

II.4. Les trois lois de Newton

Les trois lois que nous présentons dans cette section constituent les principes fondamentaux de la dynamique classique . Elles sont énoncées pour des corps de masse **constante**, considérés comme des points matériels et sont valables tant que les vitesses des corps étudiées sont négligeables en comparaison de la vitesse de la lumière.

Ces trois lois ont été énoncées par Isaac Newton dans son livre : "Principia Mathematica" datant de 1687, c'est pourquoi elles sont connues comme « **les trois lois de Newton** ».

II.4.1. Première loi : principe d'inertie.

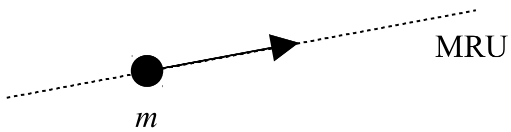
Newton attribuait ce principe à Galilée, qui l'aurait énoncé vers la fin du 16e siècle, sous la forme suivante :
« Un corps non soumis à des perturbations extérieures, une fois qu'il est en mouvement, reste à jamais en mouvement rectiligne et uniforme ».

La version de Newton dans les Principa disait que : *« Tout corps reste immobile ou conserve un mouvement rectiligne uniforme aussi longtemps qu'aucune force extérieure ne vient modifier son état.»*

Pour notre cours, nous adopterons la formulation suivante, plus moderne et générale :

" Un point matériel de masse m constante conserve sa vitesse en norme, direction et sens, si et seulement s'il est soumis à une force résultante nulle."

$\boxed{F_{\text{résultante}} = 0\ [N] \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = \overrightarrow{constante}}$ Le point matériel suit alors un MRU.



Par exemple, Pionner 10, se dirige vers les étoiles à une vitesse de quelques dizaines de milliers de kilomètres par heure, bien que ses fusées aient déjà consommé tout leur carburant depuis des décennies !

II.4.2. Deuxième loi : loi fondamentale de la dynamique, appelée parfois " Loi du mouvement " .

L'accélération a et la force résultante $\vec{F}_{résultante}$ subie par un corps de masse m sont liés par la relation : $\boxed{\vec{F}_{résultante} = m \cdot \vec{a}}$

Par exemple, un corps lâché près de la surface de la Terre va subir une accélération causée par la force de pesanteur que la Terre exerce sur ce corps.

II.4.3. Troisième loi : loi de l'action et de la réaction.

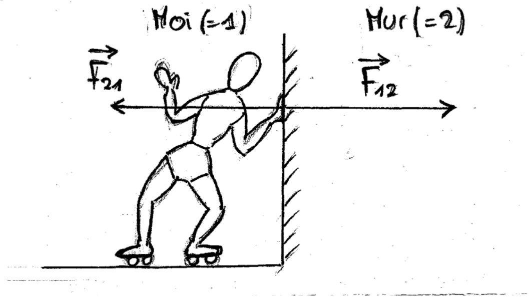
Si un premier point matériel agit sur un second point matériel avec une force, notée $\vec{F}_{1\to 2}$, alors le second point matériel réagit sur le premier avec une force, notée $\vec{F}_{2\to 1}$. Les deux forces sont de même intensité, mais de sens opposé. Mathématiquement, cette propriété se note :

$$\boxed{\vec{F}_{2\to 1}=-\vec{F}_{1\to 2}}$$

Remarques:

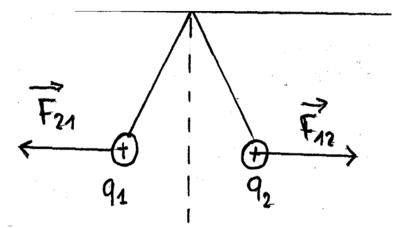
1. $\vec{F}_{2\to 1}$ et $\vec{F}_{1\to 2}$ n'agissent pas sur le même corps.

Exemple : si je (=1) m'appuie contre le mur (=2), j'exerce une force $\vec{F}_{1\to 2}$ sur le mur et en réaction le mur exerce une force $\vec{F}_{2\to 1}$ sur moi, de même intensité que , $\vec{F}_{1\to 2}$ mais de sens opposé :
Si j'ai des patins à roulette, je peux pousser contre le mur et alors la force de réaction du mur me permettra de reculer, de m'éloigner du mur.



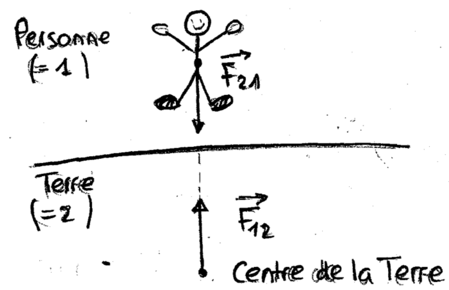
2. La réaction n'est pas toujours une force de contact : les **deux corps en interaction peuvent très bien être éloignés et toujours vérifier la loi d'action-réaction :**

Exemple : deux petites sphères chargées électriquement se repoussent sans se toucher.



3. L'intensité de la réaction est aussi grande que celle de l'action.

Exemple : Une personne attire la Terre autant que la Terre l'attire ! Lorsque la personne en question saute, ce n'est pas la Terre qui vient à la personne, car la Terre a une masse beaucoup plus grande (donc une plus grande inertie).



II.5. Exemples de forces usuelles

A) La force de la gravitation.

D'après la loi d'attraction universelle de Newton, deux corps de masses M_1 et M_2 s'attirent toujours avec une force proportionnelle à chacune des masses et inversement proportionnelle au carré de la distance d qui les sépare. Si les corps sont homogènes et sphériques, ou si on peut les assimiler à des points matériels, alors la force d'attraction entre ces deux corps vaut :

$\boxed{F = G \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{d^2}}$, où

$G = 6{,}67408 \cdot 10^{-11} \pm 0{,}00031 \cdot 10^{-11} \left[N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \right]$ et

d = la distance entre les centre des deux corps en mètres,
M_1 et M_2 en kilogrammes et la force F en newtons.
La direction de la force est celle de la droite reliant les centres des deux corps.
$G=(6{,}67259 \pm 0{,}00030) \cdot 10^{-11}$ en 1994 ; $G=(6{,}67234 \pm 0{,}00014) \cdot 10^{-11}$ en 2010 ; d'autres valeurs ont aussi été mesurées.

Exemple 5.1 :
La distance entre la Terre de masse $M_1 = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ [kg] et la Lune de masse $M_2 = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ [kg] varie entre $3{,}564 \cdot 10^8$ [m] et $4{,}067 \cdot 10^8$ [m].
De combien de Newtons varient les forces d'attraction gravitationnelle entre la Terre et la Lune ?

Exemple 5.2 :
La Terre peut être approximée par une sphère de rayon $R = 6{,}371 \cdot 10^6$ [m].
Quelle est la force d'attraction entre la Terre et un objet de masse m se trouvant à sa surface ?

B) La force de pesanteur.

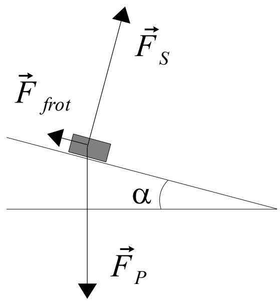
L'exemple 5.2 précédent montre que tout objet se trouvant à la surface de la Terre est attiré par celle-ci avec une force proportionnelle à la masse m de l'objet. Cette force s'appelle la force de la pesanteur.

$\boxed{F_{\text{pesanteur}} = m \cdot g}$.

"g" s'appelle l'accélération de la pesanteur. En Suisse, $g = 9{,}81$ [N / kg] = 9,81 [m / s^2].
Cette valeur varie légèrement en fonction de la latitude et de l'altitude. (c.f. p 196 de la table CRM).

Exemple 5.3 :
Une personne de 65 [kg] saute par une fenêtre. Avec quelle force attire-t-elle la Terre ?

C) La force de soutien et la force de frottement.



Soit un objet posé sur une pente. Il subit la force de pesanteur $\vec{F}_P$.

Il est habituel de définir une force de soutien $\vec{F}_S$ perpendiculaire à la pente et une force de frottement $\vec{F}_{frot}$ parallèle à la pente.

Exemple 5.4 :
Si l'objet ne bouge pas et ne subit que ces trois forces, exprimez les forces de soutien et de frottement en fonction de la force de pesanteur $\vec{F}_P$ et de l'angle α .

Exemple 5.5 :
Si l'objet se déplace le long de la pente, avec une accélération, la force résultante est donc parallèle à la pente. À partir de cette constatation, justifiez que la force de soutien ne dépend pas de l'accélération de l'objet. Exprimez-la en fonction de la force de pesanteur et de l'angle α .

L'expérience montre que la force de frottement de contact est proportionnelle à la force de soutien. Le coefficient de proportionnalité, appelé **coefficient de frottement**, dépend de la matière des deux objets en contact. De plus il est différent si l'objet bouge relativement au support ou non.

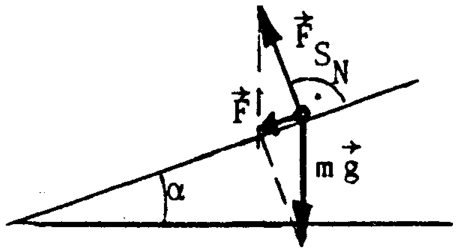
Si l'objet se déplace, on écrit : $F_{frot}=\mu\cdot F_S$, où μ = le **coefficient de frottement dynamique.**

Si l'objet est immobile, $F_{frot}\leq\mu_0\cdot F_S$, où μ_0 = le **coefficient de frottement statique.**

Par exemple, les tables particulières du formulaire et table CRM donnent $\mu = 0{,}4$ pour de l'acier glissant sur de l'acier, $\mu = 0{,}04$ pour du Téflon glissant sur de l'acier et $\mu \approx 0{,}75$ pour des pneus de voitures glissant sur du béton sec. Sur du béton humide, μ varie entre 0,3 et 0,5.

Habituellement, le coefficient de frottement statique est supérieur au coefficient de frottement dynamique : $\mu_0 > \mu$.

Exemple 5.6 :



Un corps en acier de masse $m = 7{,}0$ [kg] se trouve sur une pente en acier d'inclinaison $\alpha = 20°$. Le corps descend.
Quelle est la force de frottement subie par le corps ?
Le corps accélère-t-il ou décélère-t-il ?

D) La force motrice.

Pour remonter une pente, il faut fournir une force dans le sens de la montée. Pour accélérer sur une route horizontale, il faut fournir une force dans le sens de l'accélération. Pour contrer une force de frottement, il faut fournir une force de sens opposé à la force de frottement. Ce sont trois exemples de forces motrices. Dans une voiture elle est fournie par le moteur, sur un vélo elle est fournie par le cycliste.

Exemple 5.7 :
Un cycliste de 80 [kg], vélo y compris, remonte à vitesse constante une pente de 4,0°. La force de frottement est de 15 [N].
Quelle est la force motrice qui permet au cycliste d'avancer à vitesse constante ?

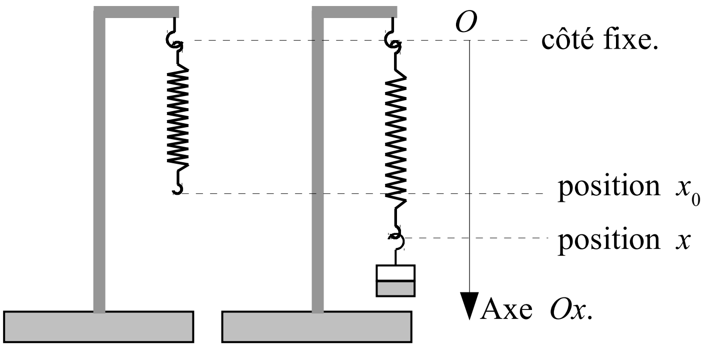
E) La force de rappel d'un ressort.

Soit un ressort ayant un côté fixé et l'autre est libre. Notons x_0 la position du côté libre.
Étirons ou comprimons le ressort et notons x sa position.

On vérifie expérimentalement que la force de réaction $\vec{F}_r$ du ressort est proportionnelle à l'élongation.

Plus précisément, $\boxed{\vec{F}_r = -k \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)}$.

La **constante d'élasticité du ressort** "k", exprimée généralement en Newtons par mètres, est une caractéristique du ressort.
Le signe négatif devant la constante indique que la force s'oppose à l'élongation ou à la contraction.



La force $\vec{F}_r$ est communément appelée la **force de rappel** du ressort.

La proportionnalité entre l'élongation et la force appliquée sur le côté libre est à la base du **dynamomètre**, l'instrument de mesure de forces.

<u>Exemple 5.8 :</u>

Si l'élongation $(x - x_0)$ d'un ressort est de 3,00 [cm] lorsqu'une masse de 100 [g] est suspendue du côté libre, quelle est son élongation lorsqu'une masse de 200 [g] remplace celle de 100 [g] ?

F) Forces de frottements laminaire et turbulent.

Un objet se déplaçant dans un fluide subit une force de frottement lié entre autre à la viscosité du fluide et au type d'écoulement de ce fluide autour de l'objet.
Les lois ci-dessous sont empiriques, tirées de l'expérience et non de principes fondamentaux.

L'écoulement peut être :
° ***laminaire***, *si en chaque point relativement à l'objet, la vitesse du fluide est constante.*
° ***turbulent***, *si l'écoulement est irrégulier, avec des turbulences.*

Dans le cas d'un ***écoulement laminaire***, la force de frottement subie par l'objet vaut :

$$\boxed{\vec{F}_{\text{frottement laminaire}} = k \cdot R \cdot \eta \cdot v} \text{ où}$$

k est un coefficient dépendant de la forme de l'objet, *sans unité. c.f. table CRM*

R est le rayon maximale de l'objet $[m]$.

η est la viscosité du fluide $[N \cdot s \cdot m^{-2}] = [kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}]$. Elle dépend fortement de la température.

v est la vitesse du fluide relativement à l'objet $[m \cdot s^{-1}]$.

Pour une boule, le coefficient k vaut 18,8
Pour un disque vu de face, le coefficient k vaut 16

Quelques viscosités :

Fluide	η à 0 °C	η à 20 °C	η à 40 °C	η à 100 °C
Eau	$1{,}8 \cdot 10^{-3}$	$1{,}0 \cdot 10^{-3}$	$0{,}70 \cdot 10^{-3}$	$0{,}28 \cdot 10^{-3}$
alcool (éthanol)		$1{,}2 \cdot 10^{-3}$		
Glycérine		1,5		
Huile			$34 \cdot 10^{-3}$ à $240 \cdot 10^{-3}$	
Mercure		$1{,}6 \cdot 10^{-3}$		
Sang			$2{,}1 \cdot 10^{-3}$ à 37°C	
Air	$1{,}7 \cdot 10^{-5}$	$1{,}8 \cdot 10^{-5}$	$1{,}9 \cdot 10^{-5}$	

Dans le cas d'un ***écoulement turbulent***, la force de frottement subie par l'objet vaut :

$$\boxed{\vec{F}_{\text{frottement turbulent}} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot S \cdot \rho \cdot v^2} \text{ où}$$

C est un coefficient dépendant de la forme de l'objet, *sans unité. c.f. table CRM*

S est la surface apparente de l'objet $[m^2]$.

ρ est la masse volumique du fluide $[kg \cdot m^{-3}]$.

v est la vitesse du fluide relativement à l'objet $[m \cdot s^{-1}]$.

Pour une boule, le coefficient C vaut 0,47 ; $S = \pi \cdot \text{rayon}^2$.

Le nombre de **Reynolds** $R = \dfrac{\rho \cdot v \cdot L}{\eta}$ sert à caractériser si l'écoulement est laminaire ou turbulent.
L est la dimension caractéristique de l'objet.
L'écoulement est laminaire si $R < 2'000$ et turbulent si $R > 3'000$, la limite est proche de 2'300.

Exemple 5.9 :

a) Pour une boule de 5,0 [cm] de diamètre, avançant à 2,0 [cm/s], comparez le frottement qu'il subit dans les différents fluides ci-dessus, pour une température de 20 °C.
Vérifiez à l'aide du nombre de Reynolds que le frottement est laminaire dans ce cas de faible vitesse.
Remarquez qu'il n'est plus laminaire dans de l'eau très chaude.

b) Vérifiez que si la vitesse passe à 1,0 [m/s], le frottement devient turbulent dans l'eau et dans l'air, mais pas dans la glycérine. Calculez ces forces de frottement dans l'eau et dans l'air pour une vitesse de 1,0 [m/s].

II.6. Les quatre interactions fondamentales de la nature

Les premières interactions connues sont caractérisées par des forces de contact. Ces dernières ne sont simples qu'à l'échelle macroscopique. Elles résultent en réalité de phénomènes complexes. À l'échelle microscopique, celle des atomes et des molécules, il s'agit d'interactions à distance entre les constituants de la matière.
Toutes les interactions se ramènent, en dernière analyse, à quatre interactions fondamentales :

1) l'interaction de **gravitation**
2) l'interaction **électromagnétique**
3) l'interaction **nucléaire forte**
4) l'interaction **nucléaire faible**

Signalons encore l'existence de forces fictives, que nous aborderons dans un prochain paragraphe. Ces forces fictives, ou **forces d'inertie**, sont observées dans des systèmes de référence accélérés (non d'inertie). L'observateur placé dans un tel système doit les introduire lorsqu'il applique les lois de la dynamique.

a) L'interaction de **gravitation** est la plus faible de toutes les interactions. Son action est de portée illimitée et décroît avec le carré de la distance. Toute matière s'attire. Elle est responsable des forces à grande échelle de l'Univers, mais joue un rôle négligeable aux échelles atomique et subatomique.
Cette interaction assure la cohésion des parties de la Terre. Elle lie les planètes du système solaire au Soleil et lie les étoiles au centre des galaxies.
b) L'interaction **électromagnétique**, qui s'exerce entre des particules possédant une **charge électrique** tels que les électrons et les protons. Son action est de portée illimitée et décroît avec le carré de la distance. Elle est responsable de la plupart des phénomènes à l'échelle humaine à l'exclusion da la pesanteur. Elle est à l'origine des forces de frottements et des liaisons atomiques et moléculaires dans la matière. C'est l'interaction dominante de toute la chimie et de toute la biologie !
c) L'interaction **nucléaire forte** est caractérisée, en particulier, par les forces s'exerçant entre les neutrons et les protons et plus généralement entre les hadrons, qui sont des particules dites "lourdes". Son action est de portée limitée à environ 10^{-15} [m]. Elle est responsable de la cohésion des noyaux atomiques. C'est l'interaction dominante de toute la physique nucléaire des hautes énergies, celle qui est étudiée au CERN !
d) L'interaction **nucléaire faible** permet aux particules légères (électrons, muons, etc.) d'interagir entre elles et avec des particules plus lourdes. Cette interaction est également responsable de la désintégration de certains noyaux atomiques. Son action est de portée limitée à environ 10^{-17} [m].

Le tableau ci-après donne une idée de l'intensité relative des forces caractérisant les quatre interactions, ainsi que de leur portée. Signalons toutefois que les lois de force sont différentes et qu'il n'est pas vraiment possible de comparer ces forces de manière quantitative.

	intensité relative	portée	
gravitation	10^{-34}	illimitée,	toujours attractive
électromagnétique	10^{2}	illimitée,	attractive ou répulsive
nucléaire forte	10^{4}	10^{-15} [m],	toujours attractive
nucléaire faible	10^{-2}	10^{-17} [m],	toujours répulsive

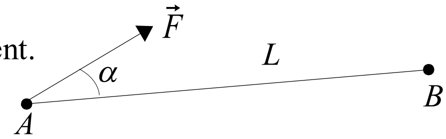
Source : "PHYSIQUE", de Eugène Hecht, édition De Boeck & Larcier s.a., 1999.

II.7. Travail et énergie

II.7.1. Le travail d'une force constante sur une trajectoire rectiligne

Considérons un point matériel se déplaçant de A à B le long d'une trajectoire rectiligne. Intéressons nous à une force $\vec{F}$ constante qu'il subit.
(Il peut subir d'autres forces qui ne nous intéresseront pas ici.)

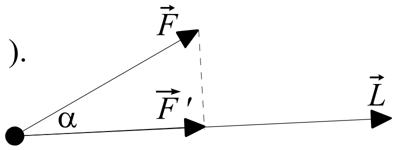
On définit le travail W de cette force $\vec{F}$ le long de la trajectoire par : $\boxed{W=\|\vec{F}\|\cdot L\cdot\cos(\alpha)}$
L = la longueur du trajet.
α = l'angle entre la direction de la force et la direction de déplacement.



L'unité du S.I. du travail est le **joule [J]**.
1 [J] = 1 [N · m] = $1\left[\dfrac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]$.

Exemple 7.1 :
Déterminez le travail d'une force de 7,0 [N]
sur une distance de 3,0 [m] avec $\alpha = 20°$.

On préfère définir le travail à l'aide du produit scalaire.
Le **produit scalaire** entre deux vecteurs $\vec{F}$ et $\vec{L}$ est défini par : $\boxed{\vec{F}\bullet\vec{L}=\|\vec{F}\|\cdot\|\vec{L}\|\cdot\cos(\alpha)}$.
α = l'angle entre les deux vecteurs.
$\vec{F}\bullet\vec{L}$ est aussi le produit de $\|\vec{L}\|$ par $\|\vec{F}'\|$ (fois − 1, si α > 90°).
$\vec{F}'$ est la **projection** orthogonale de $\vec{F}$ sur $\vec{L}$.



Quelques propriétés du travail.

0) la définition du travail d'une force s'écrit : $\boxed{W=\vec{F}\bullet\vec{L}}$
1) Le travail d'une force de A à C égale à la somme des travaux de A à B et de B à C.
$\boxed{W_{AC}=W_{AB}+W_{BC}}$
2) Le travail d'une force de A à B est l'opposé du travail de la force de B à A. $\boxed{W_{AB}=-W_{BA}}$
3) Le travail d'une somme vectorielle de forces est égale à la somme des travaux de chacune de ses forces : $\boxed{W_{AB}(\vec{F}_1+\vec{F}_2)=W_{AB}(\vec{F}_1)+W_{AB}(\vec{F}_2)}$.

Cette dernière propriété est simple à démontrer si l'on se rend compte que la projection orthogonale de $\vec{F}_1+\vec{F}_2$ sur $\vec{L}$ est égale à la somme des projections orthogonales de $\vec{F}_1$ sur $\vec{L}$ et de $\vec{F}_2$ sur $\vec{L}$.

Quelques propriétés du produit scalaire :

i) $\vec{v}\bullet\vec{w}=\vec{w}\bullet\vec{v}$ ii) $\alpha\cdot(\vec{v}\bullet\vec{w})=(\alpha\cdot\vec{v})\bullet\vec{w}$ iii) $\vec{v}\bullet\vec{v}=\|\vec{v}\|^2$ iv) $\vec{u}\bullet(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\bullet\vec{v}+\vec{u}\bullet\vec{w}$

v) $\vec{v}\bullet\vec{w}=0 \Leftrightarrow \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont perpendiculaires.

× $\vec{u}\bullet(\vec{v}\bullet\vec{w})\neq(\vec{u}\bullet\vec{v})\bullet\vec{w}$ × diviser par un vecteur n'a pas de sens !

Dans une base orthonormée, si $\vec{v}=\langle v_x;v_y;v_z\rangle$ et $\vec{w}=\langle w_x;w_y;w_z\rangle$ alors :

$\boxed{\vec{v}\bullet\vec{w}=v_x\cdot w_x+v_y\cdot w_y+v_z\cdot w_z}$ Cela se montre facilement à partir des propriétés iv) et v) comme suit :

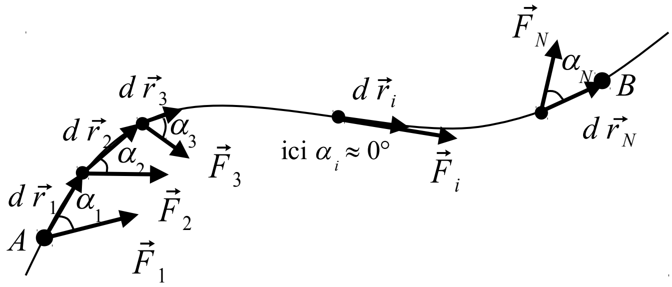
$$\vec{v}\bullet\vec{w}=\left(\langle v_x;0;0\rangle+\langle 0;v_y;0\rangle+\langle 0;0;v_z\rangle\right)\bullet\left(\langle w_x;0;0\rangle+\langle 0;w_y;0\rangle+\langle 0;0;w_z\rangle\right)=v_x\cdot w_x+v_y\cdot w_y+v_z\cdot w_z .$$

II.7.2. Le travail d'une force le long d'une trajectoire de A à B

Nous allons généraliser la notion de travail d'une force à des forces pouvant varier le long de la trajectoire et à des trajectoires qui ne sont pas forcément rectilignes.

Considérons un point matériel se déplaçant de A à B le long d'une trajectoire et considérons une force agissant sur ce point matériel. Découpons la trajectoire de A à B en de nombreux très petit segments $d\vec{r}_i$. Ce segment étant suffisamment petit, pour qu'il puisse être considéré comme rectiligne et pour que la force $\vec{F}_i$ puisse être considérée comme constante sur ce segment.

Ceci permet de définir un **élément de travail** le long de ce segment : $dW = F_i \bullet d\vec{r}_i$.



En appliquant la propriété (1) du travail vue précédemment, on définit le **travail de la force $\vec{F}$ pour aller de A à B** le long de la trajectoire par :

$$\boxed{W_{\vec{F},\text{de A à B}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \bullet d\vec{r}_i}$$

Autres écritures : $W_{\vec{F},\text{de A à B}} = \sum_{i=1}^{N} \|\vec{F}_i\| \cdot \|d\vec{r}_i\| \cdot \cos(\alpha_i)$ ou $W_{\vec{F},\text{de A à B}} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r}$

N = le nombre de segments, qui doit être très grand.

Les propriétés du travail d'une force restent valables. Rappelons les :

1) Le travail d'une force de A à C égale à la somme des travaux de A à B et de B à C.
   $W_{AC} = W_{AB} + W_{BC}$
2) Le travail d'une force de A à B est l'opposé du travail de la force de B à A. $W_{AB} = -W_{BA}$
3) Le travail d'une somme vectorielle de forces est égale à la somme des travaux de chacune de ces forces : $W_{AB}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = W_{AB}(\vec{F}_1) + W_{AB}(\vec{F}_2)$.

L'unité du S.I. du travail est le **joule [J]**. 1 [J] = 1 [N · m] = $1\left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}\right]$.

Remarque :
Sauf dans des cas particuliers, il semble très difficile de déterminer le travail d'une force d'un point à un autre.
Nous allons voir que dans certain cas, il est facile de déterminer ce travail et que cette notion mène à la notion d'énergie et de conservation d'énergie.

Exemple 7.2 :
Déterminez le travail de la force de la gravitation de la Lune sur un tour autour de la Terre.

II.7.3. L'énergie cinétique

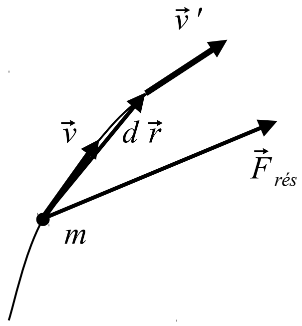
Le but de cette section est de montrer que :

Le travail de la force résultante de A à B est égal à $\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_B^2-\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_A^2$.

Ceci mènera à la définition de l'énergie cinétique.

Dans une première étape, on montre cette formule dans le cas d'une trajectoire rectiligne et d'une force résultante constante.

Considérons un point matériel de masse m se déplaçant de A à B le long d'une trajectoire. Considérons l'élément de travail dW de la force résultante $\vec{F}_{rés}$ sur un déplacement $d\vec{r}$, assez petit pour qu'on puisse considérer que la trajectoire est *rectiligne et l'accélération* $\vec{a}$ *constante*.



Notons :
$\vec{v}$ = la vitesse au *début* du déplacement $d\vec{r}$.
$\vec{v}\,' = \vec{v}+d\vec{v}$ = la vitesse à la *fin* du déplacement $d\vec{r}$.

On sait que :

1) $dW = \vec{F}_{rés}\bullet d\vec{r}$

2) $\vec{F}_{rés} = m\cdot\vec{a}$, donc $\vec{F}_{rés}$ est aussi constante sur $d\vec{r}$.

3) $\vec{a} = \dfrac{\vec{v}\,'-\vec{v}}{dt} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$d\vec{r} = \vec{v}\cdot dt+\frac{1}{2}\cdot\vec{a}\cdot(dt)^2 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}+\frac{1}{2}\cdot\vec{a}\cdot dt$ (On a utilisé l'équation horaire d'un MRUA.)

4) $\underline{\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}+\frac{1}{2}\cdot d\vec{v}}$

Montrons que $dW = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v'^2-\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2$. Il est plus facile de partir du terme de droite.

$\frac{1}{2}\cdot m\cdot v'^2-\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 = \frac{1}{2}\cdot m\cdot\vec{v}\,'\bullet\vec{v}\,'-\frac{1}{2}\cdot m\cdot\vec{v}\bullet\vec{v}$ Car $v^2 = \|\vec{v}\|^2 = \vec{v}\bullet\vec{v}$ et de même pour v'^2

$= \frac{1}{2}\cdot m\cdot(\vec{v}+d\vec{v})\bullet(\vec{v}+d\vec{v})-\frac{1}{2}\cdot m\cdot\vec{v}\bullet\vec{v}$ On utilise $\vec{v}\,' = \vec{v}+d\vec{v}$

$= \cancel{\frac{1}{2}\cdot m\cdot\vec{v}\bullet\vec{v}}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot m\cdot d\vec{v}\bullet\vec{v}+\frac{1}{2}\cdot m\cdot d\vec{v}\bullet d\vec{v}-\cancel{\frac{1}{2}\cdot m\cdot\vec{v}\bullet\vec{v}}$ Propriétés du produit scalaire.

$= m\cdot d\vec{v}\bullet\vec{v}+\frac{1}{2}\cdot m\cdot d\vec{v}\bullet d\vec{v}$ Simplifications

$= m\cdot d\vec{v}\bullet\left(\vec{v}+\frac{1}{2}d\vec{v}\right)$ "Mise en évidence", propriété du produit scalaire

$= m\cdot d\vec{v}\bullet\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ Utilisation du point 4) $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}+\frac{1}{2}\cdot d\vec{v}$

$= m\cdot\dfrac{d\vec{v}}{dt}\bullet d\vec{r}$ dt peut diviser le facteur qu'on veut.

$= m\cdot\vec{a}\bullet d\vec{r} \quad = \vec{F}_{rés}\bullet d\vec{r} \quad = \quad dW$ CQFD $_1$. Utilisation de 3) puis de 2) puis de 1).

En conséquence : $\underline{dW = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v'^2-\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2}$.

Dans une deuxième étape, montrons que la formule reste valable pour une trajectoire quelconque.

Le travail de la force résultante de A à B est égal à la somme des éléments de travail :

$$W_{\vec{F}_{rés},\text{de A à B}} = \sum_{i=1}^{N} dW_i$$
Par définition du travail d'une force.

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(v_i'^2 - v_i^2\right)$$
Démontré dans la première étape.

$$= \frac{1}{2}\cdot m\cdot\sum_{i=1}^{N}\left(v_i'^2 - v_i^2\right)$$
Mise en évidente de $\frac{1}{2}\cdot m$

$$= \frac{1}{2}\cdot m\cdot\sum_{i=1}^{N}\left(v_{i+1}^2 - v_i^2\right)$$
Car la vitesse à la fin de $d\vec{r}_i$ égale la vitesse au début de $d\vec{r}_{i+1}$.

$$= \frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(v_2^2 - v_1^2 + v_3^2 - v_2^2 + v_4^2 - v_3^2 + v_5^2 - v_4^2 + \ldots + v_N^2 - v_{N-1}^2 + v_{N+1}^2 - v_N^2\right)$$
La somme est écrite explicitement.

$$= \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_B^2 - \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_A^2$$
Tous les v_i^2 se simplifient, sauf le premier et le dernier.

CQFD.

Conclusion :

Le travail de la force résultante de A à B est égal à $\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_B^2 - \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_A^2$.

Ceci mène à la définition :

L'énergie cinétique en un point P est définie par : $\boxed{E_{\text{cin},P} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_P^2}$ unités du S.I. : le **joule [J]**.

Résultat principal :

Le travail de la force résultante d'un point A à un point B est : $\boxed{W_{\vec{F}_{rés}\,\text{de A à B}} = E_{\text{cin},B} - E_{\text{cin},A}}$

Le chemin pour aller de A à B peut être aussi compliqué que l'on veut et la force résultante peut varier de n'importe quelle façon, le résultat ci-dessus est toujours valable.

Remarque 1 :
Si la force résultante est nulle le long du chemin de A à B, alors son travail est nul et l'énergie cinétique reste la même en tout point de la trajectoire.
Ce n'est pas étonnant, car dans ce cas, la vitesse reste constante en norme, direction et sens.

Remarque 2 :
Si la force résultante est perpendiculaire à la trajectoire en tout point, alors son travail est nul et l'énergie cinétique reste la même en tout point de la trajectoire.
Cela ne devrait pas être étonnant, car dans ce cas, la force tangentielle est nulle, donc l'accélération tangentielle est nulle et donc la norme de la vitesse reste constante.

II.7.4. L'énergie potentielle due à la force de pesanteur

Le but de cette section est de montrer que ::

Le travail de la force de pesanteur d'un point A à un point B est : $\boxed{W_{\vec{F}_{pes}\text{ de A à B}} = E_{\text{pot, A}} - E_{\text{pot, B}}}$,

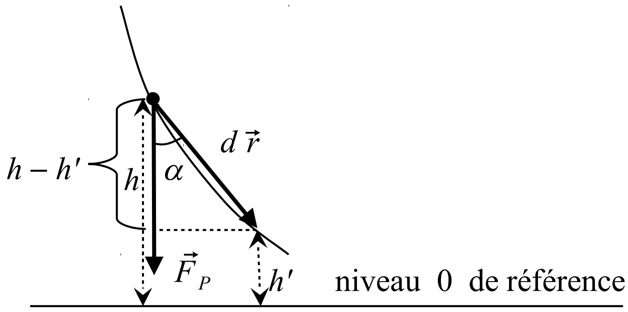
où $\boxed{E_{\text{pot, P}} = m \cdot g \cdot h_P}$.

Dans une <u>première étape</u>, on montre cette formule dans le cas d'une trajectoire rectiligne et d'une force $\vec{F}_P$ constante.

Considérons un point matériel de masse m se déplaçant de A à B le long d'une trajectoire.
Considérons l'élément de travail dW de la force de la pesanteur $\vec{F}_P$ sur un <u>très petit</u> déplacement $d\vec{r}$.

On sait que :

1) $dW = \vec{F}_P \bullet d\vec{r}$
2) $\vec{F}_P = m \cdot \vec{g}$
3) $h - h' = \|d\vec{r}\| \cdot \cos(\alpha)$
4) $\vec{g} \bullet d\vec{r} = g \cdot \|d\vec{r}\| \cdot \cos(\alpha)$



Montrons que $dW = m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot h'$.

$dW = \vec{F}_P \bullet d\vec{r} = m \cdot \vec{g} \bullet d\vec{r}$ On a utilisé 1) puis 2)

$= m \cdot g \cdot \|d\vec{r}\| \cdot \cos(\alpha)$ Par définition du produit scalaire. C'est le point 4) ci-dessus

$= m \cdot g \cdot (h - h')$ On a utilisé 3)

$= m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot h'$ Par distributivité

En conséquence : $\underline{\underline{dW = m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot h'}}$. CQFD₁

Dans une <u>deuxième étape</u>, montrons que la formule reste valable pour une trajectoire quelconque.

Le travail de la force de pesanteur de A à B est égal à la somme des éléments de travail :

$W_{\vec{F}_P,\text{de A à B}} = \sum_{i=1}^{N} dW_i$ Par définition du travail d'une force

$= \sum_{i=1}^{N} m \cdot g \cdot (h_i - h_i')$ Démontré dans la première étape.

$= m \cdot g \cdot \sum_{i=1}^{N} (h_i - h_i')$ Mise en évidente de $m \cdot g$.

$= m \cdot g \cdot \sum_{i=1}^{N} (h_i - h_{i+1})$ Car la hauteur à la fin de $d\vec{r}_i$ égale la hauteur au début de $d\vec{r}_{i+1}$.

$= \cdot m \cdot g \cdot (h_1 \underbrace{- h_2 + h_2} \underbrace{- h_3 + h_3} \underbrace{- h_4 + h_4} \underbrace{- h_5 + \ldots + h_{N-1}} \underbrace{- h_N + h_N} - h_{N+1})$ La somme est écrite explicitement.

$= m \cdot g \cdot h_A - m \cdot g \cdot h_B$ tous les h_i se simplifient, sauf le premier et le dernier.

CQFD.

Conclusion :

Le travail de la force de la pesanteur de A à B est égal à : $m \cdot g\, h_A - m \cdot g\, h_B$

Ceci mène à la définition :

L'énergie potentielle en un point P est définie par : $\boxed{E_{\text{pot},P} = m \cdot g \cdot h_P}$ unités du S.I. : le **joule [J]**.

Résultat principal :

Le travail de la force de la pesanteur d'un point A à un point B est : $\boxed{W_{\vec{F}_{pes} \text{ de A à B}} = E_{\text{pot,A}} - E_{\text{pot,B}}}$

Le chemin pour aller de A à B peut être aussi compliqué que l'on veut, le résultat ci-dessus est toujours valable.

Attention, ici c'est l'énergie initiale, celle en A, moins l'énergie finale, celle en B. Alors que pour l'énergie cinétique, c'est l'énergie finale, celle en B, moins l'énergie initiale, celle en A.

II.7.5. L'énergie potentielle d'un ressort

Remarque :

Pour la suite le théorème fondamental de l'analyse sera nécessaire. En voici un énoncé :

Si f est une fonction continue de $[a\,;b]$ dans $\mathbb{R}$, et

si F est une primitive de f sur $[a\,;b]$ (c'est-à-dire que $F'(x) = f(x)$ pour tout x dans $[a\,;b]$), alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Remarque : $F(b)-F(a)$ se note : $F(x)\big|_a^b$

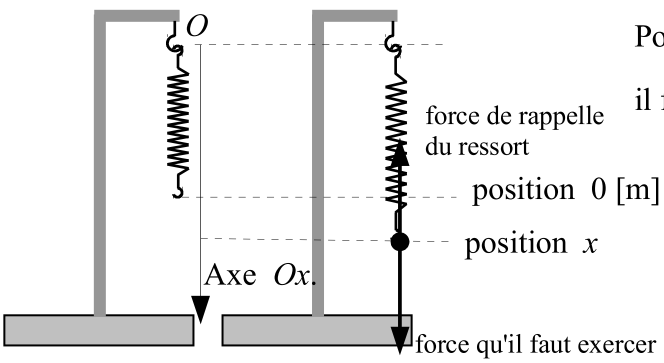
Calculons le travail nécessaire pour contracter ou allonger un ressort d'une longueur x.

Si on fixe l'origine telle que la position de repos $x_0 = 0$ [m], alors la force qu'il faut exercer vaut :

$F = k \cdot x$. Le sens de la force est opposé au sens de déplacement.

Le travail qu'il faut exercer pour aller de la position x_1 à la position x_2 vaut :

$$W_{\vec{F},\text{de } x_1 \text{ à } x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} \bullet d\vec{x} = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot \cos(0°) \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} k \cdot x \cdot dx = k \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \Big|_{x1}^{x2} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_2^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_1^2$$



Pour aller de la position $x_1 = 0$ [m] à la position $x_2 = x$, il faut fournir un travail égale à $W = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$

Le ressort emmagasine de l'énergie potentielle égale à : $\boxed{E_{potentielle} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2}$.

Lorsqu'il est contracté ou étiré, il peut fournir en revenant à sa position de repos, un travail égal à l'énergie potentielle qu'il a emmagasiné.

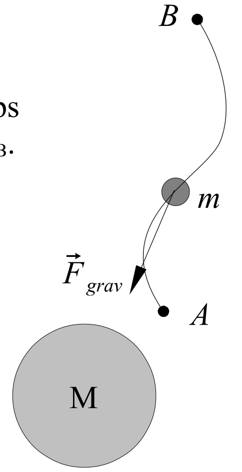
La force de rappelle d'un ressort est conservative.

II.7.6. L'énergie potentielle de gravitation

Lorsqu'un corps de masse m est soumis au champ gravitationnelle d'un autre corps de masse M, il subit une force de gravitation égale à : $F_{gravitation} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$.

r représente la distance entre le centre de ces corps.

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \left[N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}\right]$ est la constante de la gravitation universelle.



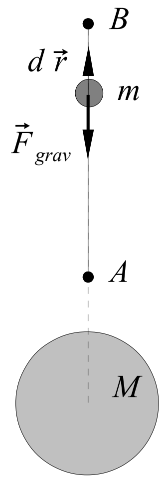
Calculons le travail de la force de la gravitation lors du déplacement du corps de masse m de la position r_A à la position r_B. Pour fixer les idées, $r_A < r_B$.

$$W_{\vec{F}_{grav}, \text{ de A à B}} = \int_A^B \vec{F}_{grav} \bullet d\vec{r} \quad \text{par définition.}$$

Nous allons montrer en deux étapes que :

$$W_{\vec{F}_{grav}, \text{ de A à B}} = E_{pot,A} - E_{pot,B} \quad \text{où} \quad E_{pot,P} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r_P}$$

m est la masse du corps qui subit la force de la gravitation.
M est la masse qui est fixe.
r_P est la distance entre le centre des deux masses m et M.



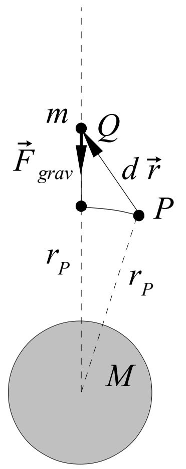
Première étape : la trajectoire suit une droite passant par le centre des deux masses.

$$W_{\vec{F}_{grav}, \text{de A à B}} = \int_{r_A}^{r_B} -G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot dr = G \cdot \frac{m \cdot M}{r}\Bigg]_{r_A}^{r_B} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r_B} - G \cdot \frac{m \cdot M}{r_A} = E_{P,A} - E_{P,B}$$

On trouve le résultat annoncé. Le signe "–" vient du sens opposé de $\vec{F}_{grav}$ et $d\vec{r}$.

Deuxième étape : ramener la trajectoire à celle de l'étape 1.
Pour un petit déplacement de P à Q, on a :

$$\vec{F}_{grav} \bullet d\vec{r} = -F_{grav} \cdot (r_Q - r_P) = F_{grav} \cdot (r_P - r_Q)$$



Le dessin de droite avec la définition du produit scalaire montrent l'égalité ci-dessus. Le signe "–" vient du sens opposé de $\vec{F}_{grav}$ et $d\vec{r}$.

En conséquence, tout segment sur lequel se fait l'intégration peut être ramené à un segment suivant une droite passant par le centre des deux masses.

On a donc montré que : $\boxed{W_{\vec{F}_{grav}, \text{ de A à B}} = E_{pot,A} - E_{pot,B}}$ où $\boxed{E_{pot,P} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r_P}}$.

Remarques :

1) Comme pour l'énergie potentielle au voisinage de la surface de la Terre, **ce travail a ceci de remarquable qu'il ne dépend pas du trajet**, mais que des points de départ et d'arrivée du trajet. La force de la gravitation est une **force conservative**.
2) Lorsque $r_A < r_B$ le travail de la force de la gravitation est négatif, car la force est opposée au sens de déplacement.

   En particulier, lorsque r_B devient infini, on à : $E_{pot,\infty} = 0\ [J]$.

   Partout ailleurs, **l'énergie potentielle de gravitation est négatif**. Ceci est caractéristique d'une **énergie de liaison** entre deux corps et indique qu'il faut fournir de l'énergie pour les séparer.
3) En absence d'une autre force, l'énergie mécanique définie par : $E_{mécanique} = E_{potentielle} + E_{cinétique}$ est constante.

Exercice 7.6.a

En supposant qu'il n'y a aucun frottement, quelle doit être la vitesse initiale minimale d'une fusée lancée depuis la Terre, pour qu'elle quitte définitivement l'attraction terrestre ? (Moteurs coupés.)
Cette vitesse s'appelle **la vitesse de libération de la Terre**.
Si cette vitesse n'est pas assez grand, la fusée retombe sur Terre.
Utilisez la remarque 3) ci-dessus.

Exercice 7.6.b

Dans le cas où $r_B = r_A + h$ avec $h << r_A$, montrez que l'on retrouve $W_{\vec{F}_{grav}, \text{ de A à B}} = -m \cdot g \cdot h$.

Utilisez le fait que : $(r_A + h) \cdot r_A = r_A^2$ et que $\frac{G \cdot M}{r_A^2} = g$.

II.7.7. L'énergie mécanique

Remarque :
Une force qui est perpendiculaire à la trajectoire en tout point ne travaille pas, car le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires est nul.

Si la seule force qui travaille est la force de la pesanteur, alors $W_{\vec{F}_{rés}, \text{de A à B}} = W_{\vec{F}_P, \text{de A à B}}$, donc

$E_{cin,B} - E_{cin,A} = E_{pot,A} - E_{pot,B}$,

En conséquence : $E_{cin,B} + E_{pot,B} = E_{pot,A} + E_{cin,A}$

La somme de l'énergie cinétique plus l'énergie potentielle reste la même en tout point de la trajectoire.

Ceci mène à la définition :

L'énergie mécanique en un point P est définie par : $\boxed{E_{\text{méc},P} = E_{\text{cin},P} + E_{\text{pot},P}}$

Résultat principal : Un principe de la conservation d'énergie.
Si la seule force qui travaille est la force de la pesanteur, alors l'énergie mécanique est conservée. C'est-à-dire qu'elle est la même en tout point de la trajectoire.

Souvent on peut décomposer la force résultante en quatre forces :
1) La force de la pesanteur, 2) la force de soutien,
3) la force de frottement $\vec{F}_{frottement}$ et 4) la force motrice $\vec{F}_{motrice}$.
La force de soutien ne travaille pas, en conséquence on a :

$$\boxed{W_{\vec{F}_{motrice} \text{ de A à B}} + W_{\vec{F}_{frottement} \text{ de A à B}} = E_{\text{méc},B} - E_{\text{méc},A}}$$

En général le travail de la force motrice $W_{\vec{F}_{motrice} \text{ de A à B}}$ est positif et

le travail de la force de frottement $W_{\vec{F}_{frottement} \text{ de A à B}}$ est négatif.

Le travail de la force motrice provient d'une autre forme d'énergie, par exemple celle contenue dans l'essence d'une voiture, ou celle contenue dans nos muscles lorsque nous marchons.
Le travail de la force de frottement se dissipe généralement sous forme d'énergie thermique.

Remarque :
On peut généraliser l'énergie mécanique en ajoutant l'énergie potentielle d'un ressort ou l'énergie potentielle de gravitation et ce qui précède reste valable.

En particulier, si on définit l'énergie mécanique par : $E_{\text{méc},P} = E_{\text{cin},P} + E_{\text{pot de gravitation},P}$ et si le corps ne subit pas de force de frottement, ni une force motrice, alors cette énergie mécanique est conservée.

II.8. Puissance et rendement

II.8.1 Puissance

La plupart des transformations d'énergies s'opèrent au cours du temps. Par exemple, le carburant d'une voiture se consomme petit à petit pour fournir au véhicule de l'énergie mécanique. Il y a transformation d'énergie chimique en énergie mécanique.

Dire qu'une énergie ΔE est transformée est équivalent à dire qu'un travail $W = \Delta E$ est effectué !

Supposons que pendant un intervalle de temps Δt une énergie ΔE soit transformée. Le rapport $\frac{\Delta E}{\Delta t}$ exprime la quantité d'énergie transformée par unité de temps. Ce rapport définit la **puissance moyenne** :

$$\boxed{P_{moyenne} = \frac{\Delta E}{\Delta t}} = \frac{W}{\Delta t}$$

Souvent la puissance moyenne est indépendante de la durée Δt. Dans ce cas, on parle de **puissance**, sans ajouter le mot "moyenne".

Quand la puissance est constante dans le temps, on en déduit que : $\boxed{\Delta E = P \cdot \Delta t}$

L'unité dans le Système International de la puissance est **le watt** [W].

<u>Exemples :</u>

1) Une ampoule électrique sur laquelle il est écrit : 15 [W], signifie que dans des conditions normales d'utilisation, elle consomme 15 joules par secondes.

2) Dans le cas d'une voiture qui consomme de l'essence, plus elle consomme d'essence par seconde, plus elle fournit une grande puissance. Cette puissance sert à fournir de l'énergie mécanique à la voiture et à compenser le travail des forces de frottement.
Mais une partie de cette puissance chauffera le moteur et sera non utile pour faire avancer la voiture.
Ceci mène à la notion de rendement.

IV. Le rendement

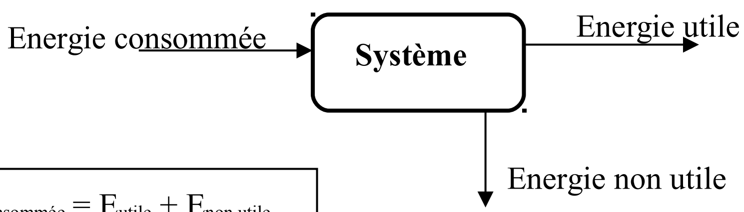
Idéalement, lors d'une transformation d'énergie par un système, il n'y a que deux formes d'énergies.
L'**énergie consommée** est la forme d'énergie qui se transforme en l'énergie utile.
L'**énergie utile** est la forme d'énergie obtenue par transformation de l'énergie consommée.

Dans la réalité, il y a toujours une troisième forme d'énergie obtenue, qui n'est pas désirée, mais inévitable. On l'appelle l'**énergie non utile**.

<u>Exemple n° 1:</u>
Dans une voiture, l'*énergie consommée* est celle stockée sous forme chimique dans l'essence.
L'énergie utile est celle qui sert à fournir de l'énergie mécanique à la voiture et à compenser le travail des forces de frottement.
L'énergie non utile est représentée par toutes les autres formes d'énergies obtenue. Principalement celle sous forme thermique, qui fait chauffer le moteur.

<u>Exemple n° 2:</u>
Dans une ampoule électrique, l'*énergie consommée* provient de l'électricité.
L'*énergie utile* est celle qui sert à éclairer.
L'*énergie non utile* est celle qui fait chauffer l'ampoule.

On peut représenter cette transformation d'énergie par le schéma suivant :



Dans l'exemple n° 1, le système = la voiture.

Dans l'exemple n° 2, le système = l'ampoule.

On a : $\boxed{E_{consommée} = E_{utile} + E_{non\ utile}}$

Le rendement η est défini comme le rapport entre l'énergie utile que délivre un système et l'énergie totale fournie à ce même système :

$$\boxed{\eta = \frac{E_{utile}}{E_{consommée}}}$$

En divisant par l'intervalle de temps Δt, le rendement peut aussi s'écrire :

$$\boxed{\eta = \frac{P_{utile}}{P_{consommée}}}$$

Le rendement n'a pas unité car c'est un rapport entre deux grandeurs identiques, on écrit un rendement en pour-cent.
Rappel : 1 = 100% ; 0,60 = 60% ; 0,32 = 32 % etc

On a aussi : $\boxed{P_{consommée} = P_{utile} + P_{non\ utile}}$

Dégradation de l'énergie
Il est possible de transformer intégralement une énergie mécanique en chaleur, mais il est par contre impossible de transformer intégralement de la chaleur en énergie mécanique. C'est la raison pour laquelle on dit que la chaleur est une forme dégradée de l'énergie.

II.9. La quantité de mouvement et l'impulsion

II.9.1. Histoire

Il y a plus de 2'000 ans, les Grecs observèrent qu'un objet s'arrête s'il n'est pas tiré ou poussé. Ils cherchèrent donc à relier la vitesse d'un char avec la force qu'exerçaient les chevaux pour le tirer. Aucun résultat intéressant ne fut obtenu.
Ce n'est qu'en 1604 que Galileo Galilée (1564-1642) compris qu'un objet soumis à "aucune force" continue à vitesse constante.
"Aucune force" doit être compris dans le sens "une force résultante nulle".

Pourquoi un objet continue d'avancer une fois lancé ?
Pour répondre à cette question, les notions **de quantité de mouvement et d'impulsion** sont apparues.
Plus un objet va vite, plus il a une grande quantité de mouvement et plus il met de temps pour "perdre" sa quantité de mouvement. Un objet plus lourd possède une plus grande quantité de mouvement qu'un objet moins lourd.
La quantité de mouvement fût donc définie comme étant le produit de la masse fois la vitesse.
L'impulsion est définie comme la *variation de la quantité de mouvement*.
On se rendait bien compte que la notion d'impulsion avait de l'importance, mais il fallut attendre les travaux de Isaac Newton dans la publication de "*Philosophiae naturalis principia mathematica* " en 1687 pour clarifier la relation entre l'impulsion et la force.

II.9.2. Définition et propriétés

La **quantité de mouvement** d'un corps de masse m du corps est une grandeur vectorielle définie par : $\boxed{\vec{p}=m\cdot\vec{v}}$.

Étudions comment varie la quantité de mouvement en fonction du temps.

En dérivant, on obtient : $\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m\cdot\vec{v})}{dt}=m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}=m\cdot\vec{a}=\vec{F}_{rés}$

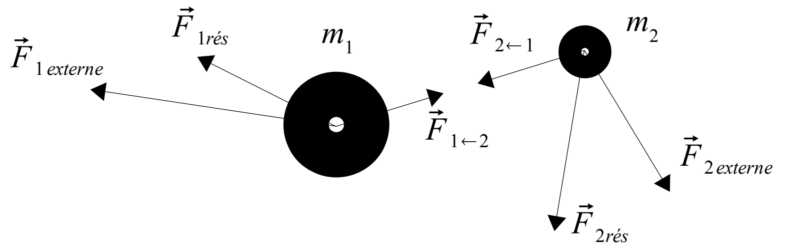
Donc la deuxième loi de la dynamique peut s'exprimer sous la forme : $\boxed{\vec{F}_{rés}=\frac{d\vec{p}}{dt}}$

La variation de la quantité de mouvement d'un corps durant un très petit temps est égale à la force résultante subie par ce corps multiplié par l'intervalle de temps.

On définit **l'impulsion** comme étant la variation de la quantité de mouvement.

On retrouve l'observation faite par Galilée, qu'un objet subissant une force résultante nulle conserve sa quantité de mouvement et donc sa vitesse, puisque sa masse ne change pas.

La notion de quantité de mouvement est particulièrement utile dans l'étude d'un système formé de plusieurs corps. Étudions le cas de deux corps en interaction l'un avec l'autre.



Les forces résultantes subies par chacun des deux corps ont été décomposées deux forces.
Sur la masse m_1 :

Une force $\vec{F}_{1\leftarrow 2}$ égale à la force subie du corps de masse m_1 par le corps de masse m_2.

Une force $\vec{F}_{1\,externe}$ égale à la somme vectorielle des autres forces agissantes sur le corps m_1.

Donc $\vec{F}_{1\,rés}=\vec{F}_{1\,externe}+\vec{F}_{1\leftarrow 2}$

Notons $\vec{p}_1$ la quantité de mouvement du corps de masse m_1.

Donc $\dfrac{d\,\vec{p}_1}{dt}=\vec{F}_{1\,rés}=\vec{F}_{1\,externe}+\vec{F}_{1\leftarrow 2}$

Sur la masse m_2 :

Une force $\vec{F}_{2\leftarrow 1}$ égale à la force subie par corps de masse m_2 sur le corps de masse m_1.

Une force $\vec{F}_{2\,externe}$ égale à la somme vectorielle des autres forces agissantes sur le corps m_2.

Donc $\vec{F}_{2\,rés}=\vec{F}_{2\,externe}+\vec{F}_{2\leftarrow 1}$

Notons $\vec{p}_2$ la quantité de mouvement du corps de masse m_2.

Donc $\dfrac{d\,\vec{p}_2}{dt}=\vec{F}_{2\,rés}=\vec{F}_{2\,externe}+\vec{F}_{2\leftarrow 1}$

La loi d'action - réaction implique que $\vec{F}_{2\leftarrow 1}=-\vec{F}_{1\leftarrow 2}$.

Notons $\boxed{\vec{p}_{tot}=\vec{p}_1+\vec{p}_2}$ la quantité de mouvement totale du système.

Donc : $\dfrac{d\,\vec{p}_{tot}}{dt}=\dfrac{d\,\vec{p}_1}{dt}+\dfrac{d\,\vec{p}_2}{dt}=\vec{F}_{1\,externe}+\cancel{\vec{F}_{1\leftarrow 2}}+\vec{F}_{2\,externe}+\cancel{\vec{F}_{2\leftarrow 1}}=\vec{F}_{1\,externe}+\vec{F}_{2\,externe}$

<u>Conclusion :</u>
La variation de la quantité de mouvement totale du système durant un très court instant dt est égale à la somme vectorielle des forces agissantes sur le système depuis l'extérieur, fois dt.

$$\boxed{d\,\vec{p}_{tot}=\left(\vec{F}_{1\,externe}+\vec{F}_{2\,externe}\right)\cdot dt}$$

Donc <u>si le système ne subit pas de forces externes</u> la quantité de mouvement totale reste constante.
C'est la **loi de la conservation de la quantité de mouvement**.

On a aussi : <u>durant le cours instant dt d'un choc</u>, la quantité de mouvement totale juste après le choc est la même que juste avant le choc. Car $\left(\vec{F}_{1\,externe}+\vec{F}_{2\,externe}\right)\cdot dt$ est considérable comme étant nulle.

$d\,\vec{p}_1=\left(\vec{F}_{1\,externe}+\vec{F}_{1\leftarrow 2}\right)\cdot dt$ n'est pas nulle malgré que dt ≈ 0, car $F_{1\leftarrow 2}$ peut être très grande. De même pour $d\,\vec{p}_2$.

II.10. Chocs

II.10.1. Cas général

Dans ce chapitre nous considérerons deux corps, considérés comme deux points matériels, qui entrent en collision. Nous négligerons donc toute rotation sur eux-mêmes de ces corps.

Lorsque deux corps entrent en collision, ils exercent l'un sur l'autre , pendant un intervalle de temps très court, de très grandes forces, qualifiable de forces internes au système. Les forces externes, telles que les forces de pesanteur des particules, sont en général négligeables et le système peut être considéré comme **isolé** durant le court instant du choc. Ainsi durant le choc $\overrightarrow{p_{totale}} = \overrightarrow{constante}$.

Lors des collisions les corps subissent des **déformations** !
Ces déformations peuvent être :
1) limitées aux intervalles de temps du choc ;
2) permanentes et persister après le choc.

Dans le premier cas, le choc est dit **élastique**.
L'énergie cinétique totale juste après le choc est égale à l'énergie cinétique totale juste avant le choc.

Dans le second cas, le choc est dit **inélastique**.
Il y a dissipation d'énergie et l'énergie cinétique totale est différente après le choc qu'avant.
Le cas limite après lequel les deux corps sont accolés s'appelle le **choc mou**.
En général l'énergie cinétique est plus petite après le choc qu'avant, mais si un ressort se détend durant la collision, l'énergie cinétique peut avoir augmentée.

Situation générale d'un choc.

Avant Après

Notons avec une apostrophe ' les vitesses après le choc.

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \overrightarrow{v'}_1 + m_2 \cdot \overrightarrow{v'}_2$$

II.10.2. Choc mou

Avant Après

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}\,'$$

La perte d'énergie cinétique totale est maximale lors d'un choc mou.
Une application intéressante de choc mou est le pendule balistique que vous verrez en laboratoire.

Exercice 10.1 :

a) Si $v_2 = 0$, montrez que $\vec{v}\,'$ est dans la même direction et le même sens que $\vec{v}_1$.

b) Si $v_2 = 0$, exprimez m_2 en fonction de v_1, v_1' et m_1.

II.10.3. Choc élastique

Dans ce cas, les corps qui entrent en collision sont assimilables à des ressorts qui se contractent, puis se détendent. Pendant l'intervalle de temps très court de la collision, ces ressorts emmagasinent une sorte d'énergie potentielle qui se libèrent très rapidement.
Lors d'un choc élastique, l'**énergie cinétique totale** est la même avant et après le choc.

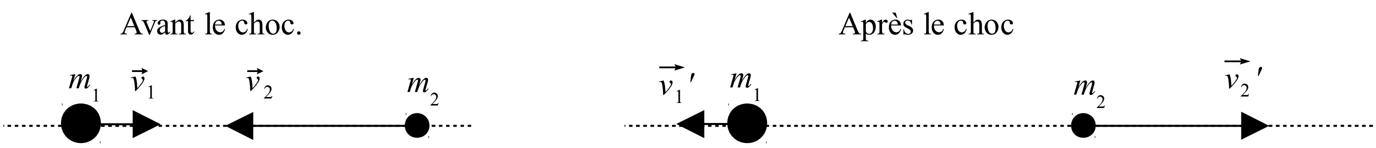
En résumé pour un choc élastique :

(1) $m_1\cdot\vec{v}_1+m_2\cdot\vec{v}_2 = m_1\cdot\vec{v'}_1+m_2\cdot\vec{v'}_2$, La quantité de mouvement est conservée.

(2) $\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot v_1^2+\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot v_2^2 = \frac{1}{2}\cdot m_1\cdot v'^2_1+\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot v'^2_2$, l'énergie cinétique est conservée.

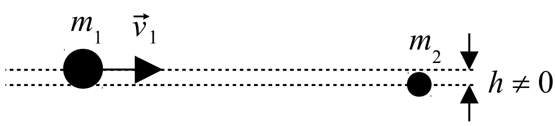
On peut aussi montrer que pour un choc élastique on a : $\|\vec{v}_1'-\vec{v}_2'\| = \|\vec{v}_1-\vec{v}_2\|$.

Choc élastique central, appelé aussi "choc frontal".
Ici, les directions des vitesses ne changent pas, on a un problème à une dimension. Les indices x, y, z et les "flèches" "peuvent être supprimées. La dernière relation ci-dessus conduit à :
$v_2' - v_1' = \quad v_2 - v_1$ s'il n'y a pas de choc.
$v_2' - v_1' = -(v_2 - v_1)$ s'il y a un choc. Dans ce cas, **quelles que soient les masses en présence, on a un <u>échange</u> des vitesses relatives**.

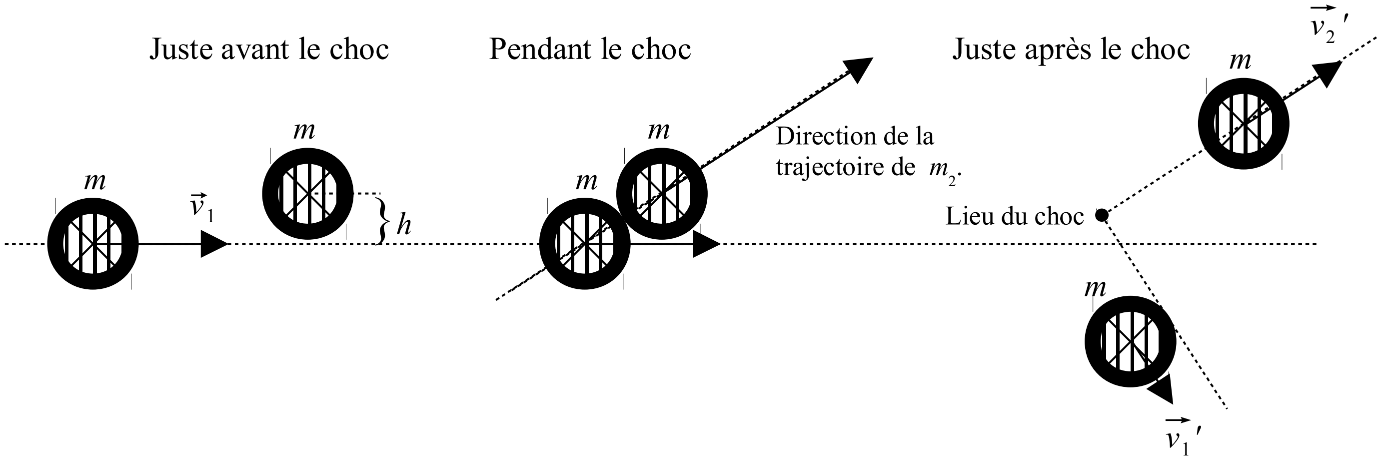


Choc élastique non central de deux billes sphériques

Ici, on a une situation à deux dimensions. Nous nous limiterons au cas où la particule de masse m_2 est au repos avant le choc, dans le référentiel considéré.
Situation avant le choc :



Exemple d'un cas où : $m_1 = m_2 = m$.

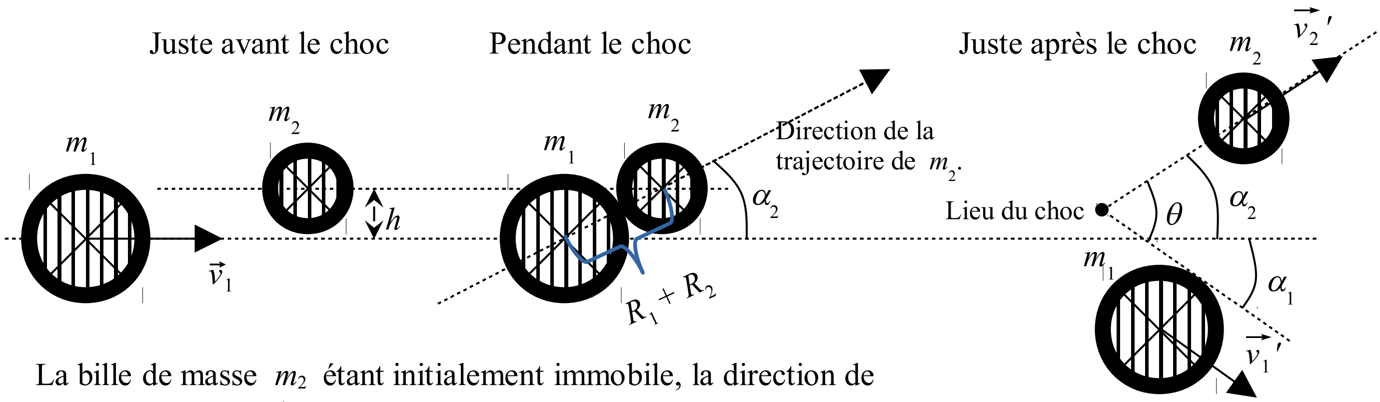


Dans le cas où la particule de masse m_2 est au <u>repos</u> avant le choc, cherchons les angles :

α_1 = angle entre $\vec{v}_1$ et $\overrightarrow{v'}_1$.

α_2 = angle entre $\vec{v}_1$ et $\overrightarrow{v'}_2$.

$\theta = \alpha_1 + \alpha_2$ = angle entre $\overrightarrow{v'}_1$ et $\overrightarrow{v'}_2$.



La bille de masse m_2 étant initialement immobile, la direction de sa vitesse finale $\overrightarrow{v'}_2$ est celle de la ligne des centres "à l'instant du choc".

Donc $\boxed{\sin(\alpha_2) = \dfrac{h}{R_1 + R_2}}$, où R_1 = le rayon de le bille 1 et R_2 = le rayon de le bille 2.

h = Le décalage vertical d'une boule par rapport à l'autre.

<u>Cherchons la valeur de l'angle θ entre les vitesses finales $\overrightarrow{v'}_1$ et $\overrightarrow{v'}_2$</u>

<u>Exercice 10.2 :</u>

Montrez que l'angle θ entre les vitesses finales $\overrightarrow{v'}_1$ et $\overrightarrow{v'}_2$ satisfait : $\underline{\cos(\theta) = \dfrac{v'_2}{2 \cdot v'_1} \cdot \left(1 - \dfrac{m_2}{m_1}\right)}$.

v_1' et v_2' sont les normes des vitesses finales. Bien sûr : $\alpha_1 = \theta - \alpha_2$.

i) Écrivez les équations de conservations de la quantité de mouvement et de l'énergie.

ii) Développez le 2ème membre de l'égalité : $(m_1 \cdot \vec{v}_1) \bullet (m_1 \cdot \vec{v}_1) = (m_1 \cdot \vec{v}_1\,' + m_2 \cdot \vec{v}_2\,') \bullet (m_1 \cdot \vec{v}_1\,' + m_2 \cdot \vec{v}_2\,')$
pour obtenir une relation entre les normes de vitesses v_1, v_1', v_2' et $\cos(\theta)$.

iii) Éliminez la vitesse v_1 à l'aide de l'équation de conservation d'énergie.

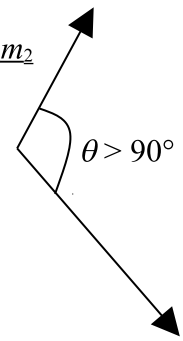
iv) Simplifiez pour trouver la formule annoncée.

Place pour la suite de l'exercice 10.2

On a obtenu : $\cos(\theta) = \frac{v_2'}{2 \cdot v_1'} \cdot \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)$

Conséquences :

Dans le cas où la bille incidente est plus légère que la bille immobile : $m_1 < m_2$



$\Rightarrow \quad 1 - \frac{m_2}{m_1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\theta) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta > 90°.$

L'angle entre les vitesses après le choc est **obtus**.

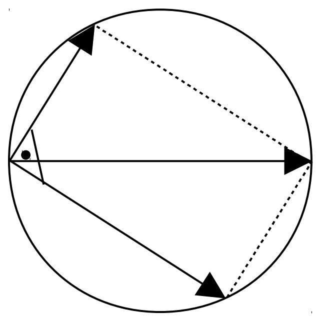
Cas limite lorsque $h = 0$, $\theta = 180°$.

Dans le cas où les deux billes ont la même masse : $m_1 = m_2$

$\Rightarrow \quad 1 - \frac{m_2}{m_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 90°.$

L'angle entre les vitesses après le choc est **droit** (=90°).

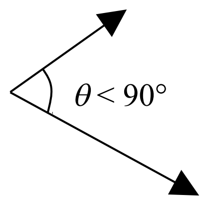
Le parallélogramme des vitesses est inscrit dans un cercle de diamètre égal à v_1, quelle que soit la distance h entre les centres des particules avant le choc.



Par conservation de la quantité de mouvement :

$m \cdot \vec{v}_1 = m \cdot \vec{v}_1' + m \cdot \vec{v}_2' \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2'$

Dans le cas où la bille incidente est plus lourde que la bille immobile : $m_1 > m_2$



$\Rightarrow \quad 1 - \frac{m_2}{m_1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\theta) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta < 90°.$

L'angle entre les vitesses après le choc est **aigu**.

Cas limite lorsque $h = 0$, $\theta = 0°$.

Exercices 10.3 :

Lors d'un choc élastique on observe que $v_2 = v_1' = 0$ [m/s]. Déduisez-en que $m_1 = m_2$ et que $\vec{v}_2' = \vec{v}_1$.

II.10.4. Annexe pour les curieux

Le **centre de masse** des deux corps est défini par : $\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_2}}$

La vitesse du centre de masse des deux corps vaut : $\vec{V}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$.

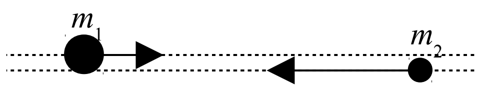
Donc $m_{tot} \cdot \vec{V}_{CM} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{tot}$, où $m_{tot} = m_1 + m_2$.
La quantité de mouvement totale du système est égale à la masse totale fois la vitesse du centre de masse.

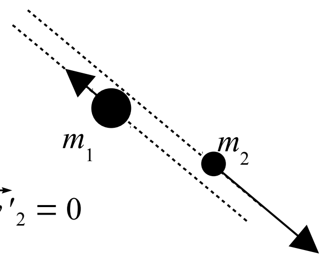
En se plaçant dans un référentiel se déplaçant à la vitesse du centre de masse, la vitesse du centre de masse est donc nulle, donc la quantité de mouvement totale du système est nulle.

En résumé, vu depuis le centre de masse : $m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = 0$.

Situation vue depuis le centre de masse.

Avant Après





$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = 0$ et $m_1 \cdot \vec{v'}_1 + m_2 \cdot \vec{v'}_2 = 0$

Nous allons montrer que la relation $\boxed{\|\vec{v_1}' - \vec{v_2}'\| = e \cdot \|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|}$ est toujours valable en cas de chocs, où e^2 représente le rapport d'énergie cinétique après le choc sur avant le choc, observé depuis le centre de masse.

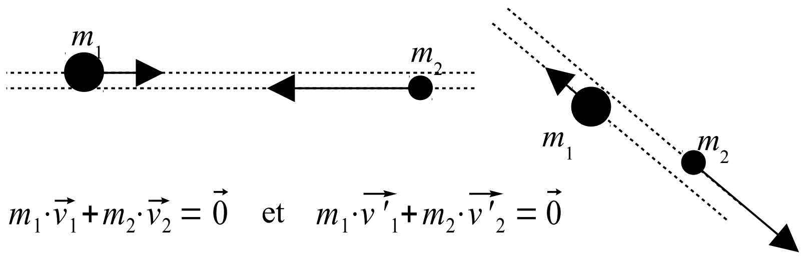
La relation est valable depuis n'importe quel référentiel d'inertie, car en additionnant une vitesse quelconque à chacune des 4 vitesses ci-dessus, l'égalité ne change pas.
Mais le rapport des énergies cinétiques doit être considéré depuis le centre de masse.

$e = 1$ ⇔ le choc est élastique. L'énergie cinétique est conservée.

$e = 0$ ⇔ le choc est mou. L'énergie cinétique finale observée depuis le centre de masse est nulle.
Les deux corps restent collés l'un à l'autre.

Situation vue depuis le centre de masse.

Avant Après



$m_1 \cdot \vec{v_1} + m_2 \cdot \vec{v_2} = \vec{0}$ et $m_1 \cdot \overrightarrow{v'_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{v'_2} = \vec{0}$

Montrons que la relation $\boxed{\|\overrightarrow{v_1'} - \overrightarrow{v_2'}\| = e \cdot \|\vec{v_1} - \vec{v_2}\|}$ est toujours valable en cas de chocs, où e^2 représente le rapport d'énergie cinétique après le choc sur avant le choc, observé depuis le centre de masse.

La relation est valable depuis n'importe quel référentiel d'inertie, car en additionnant une vitesse quelconque à chacune des 4 vitesses ci-dessus, l'égalité ne change pas.
Mais le rapport e^2 des énergies cinétiques doit être considéré depuis le centre de masse.

Démonstration :
On sait que vu depuis le centre de masse :

1) $m_1 \cdot \vec{v_1} + m_2 \cdot \vec{v_2} = \vec{0}$, donc $\vec{v_2} = -\frac{m_1}{m_2} \cdot \vec{v_1}$ et $v_2 = -\frac{m_1}{m_2} \cdot v_1$

2) $m_1 \cdot \overrightarrow{v'_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{v'_2} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{v'_2} = -\frac{m_1}{m_2} \cdot \overrightarrow{v'_1}$ et $v'_2 = -\frac{m_1}{m_2} \cdot v'_1$

3) $\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v'^2_1 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v'^2_2 = e^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 \right)$ Par définition de e^2.

A l'aide de (1) et de (2), éliminons v_2 et v'_2 dans (3).

3_{bis}) $m_1 \cdot v'^2_1 + m_2 \cdot \frac{m_1^2}{m_2^2} \cdot v'^2_1 = e^2 \cdot \left(m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot \frac{m_1^2}{m_2^2} \cdot v_1^2 \right)$ On a aussi multiplié par 2.

3_{bis}) $\left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2} \right) \cdot v'^2_1 = e^2 \cdot \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2} \right) \cdot v_1^2$ Mises en évidence.

3_{bis}) $\Leftrightarrow$ $\underline{v'_1 = e \cdot v_1}$ La direction du premier corps peut avoir changé.
Sa vitesse vue depuis le centre de masse a diminué d'un facteur e.

De même on obtient : $\underline{v'_2 = e \cdot v_2}$.

De (1), on a : $\vec{v_1} - \vec{v_2} = \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \cdot \vec{v_1}$ donc $\|\vec{v_1} - \vec{v_2}\| = \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \cdot v_1$

De (2), on a : $\overrightarrow{v'_1} - \overrightarrow{v'_2} = \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \cdot \overrightarrow{v'_1}$ donc $\|\overrightarrow{v'_1} - \overrightarrow{v'_2}\| = \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \cdot v'_1 = \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \cdot e \cdot v_1$

En combinant les deux lignes ci-dessus, on conclut : $\|\overrightarrow{v'_1} - \overrightarrow{v'_2}\| = e \cdot \|\vec{v_1} - \vec{v_2}\|$, CQFD.