XIV. La loi normale comme approximation d'autres lois

La loi normale $N(\mu\,;\sigma)$ a ceci d'extraordinaire, qu'une somme ou une moyenne de beaucoup de variables aléatoires indépendantes suit approximativement une telle loi.

Une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n\,,p)$ est la somme de n variables aléatoires indépendantes ne prenant que les valeurs 0 et 1. Elle est donc liée à la loi normale.

Application à la loi binomiale

exemple :
Lançons 10 fois de suite une pièce de monnaie et comptons le nombre de pile obtenu. Ce nombre représente une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $B(10\,;0{,}5)$.

Espérance de X : $\mu = \mathrm{E}(X) = 5$

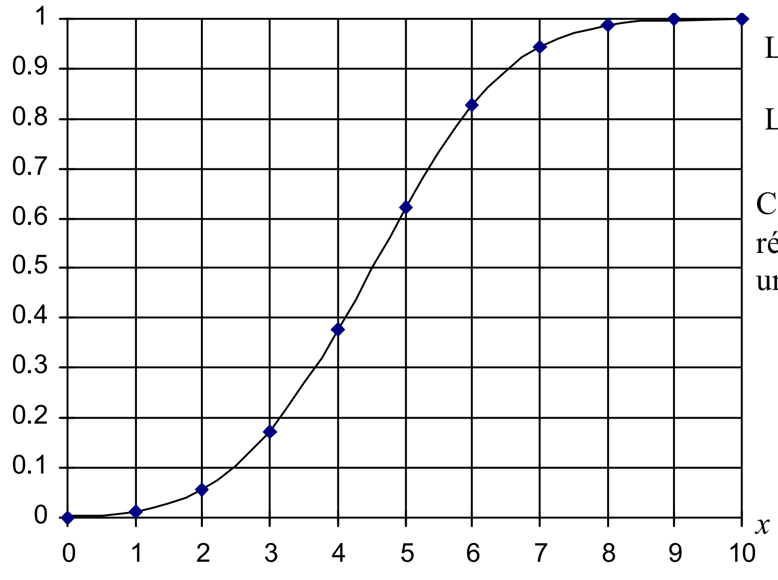
Ecart-type de X : σ = racine$(10 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5) \approx 1{,}5811388$

Le tableau suivant montre le lien entre la loi binomiale $B(10\,;0{,}5)$ et la loi normale $N(0\,;1)$.

Remplissez-le, puis comparez $P(X \le x)$ avec $\Phi\left(\dfrac{x+0{,}5-\mu}{\sigma}\right)$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=x)$	0,0010	0,0098	0,0439	0,1172	0,2051	0,2461	0,2051	0,1172	0,0439	0,0098	0,0010
$P(X \le x)$	0,0010	0,0107	0,0547	0,1719	0,3770	0,6230	0,8281	0,9893	0,9893	0,9990	1
$\dfrac{x+0{,}5-\mu}{\sigma}$	-2,846	-2,214	-1,581	-0,949	-0,316	0,3162	0,948	1,5811	2,2136	2,8460	3,4785
$\Phi\left(\dfrac{x+0{,}5-\mu}{\sigma}\right)$	0,0022	0,0134	0,0569	0,1714	0,3759	0,6241	0,8286	0,9431	0,9865	0,9978	0,9997

Sous forme graphique, la comparaison donne :



La courbe représente : $\Phi\left(\dfrac{x+0{,}5-\mu}{\sigma}\right)$

Les points représentent : $P(X \le x)$

Cet exemple illustre le fait que la fonction de répartition Φ de la loi normale $N(0\,;1)$ fournit une approximation de la loi binomiale.

problème :
Lançons 100 fois de suite une pièce de monnaie et comptons le nombre de pile obtenu.
Quelle est la probabilité que ce nombre soit entre 40 et 60 ?

La variable aléatoire X = "nombre de pile" suit une loi binomiale $B(100\ ;\ 0{,}5)$.
Il est facile de calculer $P(40 \le X \le 60)$, mais c'est assez long à faire. C.f. exercice 3, série 9.

solution :
Si X suit une loi binomiale $B(n, p)$, alors :

$$P(X = x) \approx \Phi\left(\frac{x+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x-0{,}5-\mu}{\sigma}\right)$$

et

$$P(a \le X \le b) \approx \Phi\left(\frac{b+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-0{,}5-\mu}{\sigma}\right)$$

où $\mu = \mathrm{E}(X) = n \cdot p$; $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$; x, a et b sont des entiers entre 0 et n.

En pratique, l'approximation est assez bonne lorsque : $n \cdot p \ge 5$ et $n \cdot (1-p) \ge 5$.

Donc notre problème se résout en calculant :
$\mu = \mathrm{E}(X) = 100 \cdot 0{,}5 = 50$; $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 5$;
$$P(40 \le X \le 60) \approx \Phi\left(\frac{60+0{,}5-50}{5}\right) - \Phi\left(\frac{40-0{,}5-50}{5}\right) \approx \Phi(2{,}1) - \Phi(-2{,}1) = 2 \cdot \Phi(2{,}1) - 1 \approx 0{,}9643$$
Il y a environ 96% de chances d'obtenir entre 40 et 60 piles en lançant 100 fois une pièce de monnaie !
Un calcul exact donne $P(40 \le X \le 60)$ = **0,9647**998...

exercice XIV.1 :
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(15\ ;\ 0{,}6)$

a) Quelle est l'espérance μ et l'écart-type σ de X ? $\mu = 15 \cdot 0{,}6 = 9$ $\sigma \approx 1{,}8974$

b) Calculer $P(X = 10)$ *≈ 0,186*

c) Calculer : $\Phi\left(\frac{10+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{10-0{,}5-\mu}{\sigma}\right)$ et comparer au résultat de b)

Réponse : Φ(0,7906) – Φ(0,2635) ≈ 0,181, cela fait une différence de 2,8%

d) Calculer $P(X = 8)$ *≈ 0,177*

e) Calculer : $\Phi\left(\frac{8+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{8-0{,}5-\mu}{\sigma}\right)$ et comparer au résultat de d)

Réponse : Φ(–0,2635) – Φ(–0,7906) ≈ 0,181, cela fait une différence de 2,2%

f) Calculer $P(7 \le X \le 11)$ *≈ 0,11806 + 0,17708 + 0,20660 + 0,18594 + 0,12678 = 0,81446*

g) Calculer : $\Phi\left(\frac{11+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{7-0{,}5-\mu}{\sigma}\right)$ et comparer au résultat de f)

Réponse : Φ(1,3176) – Φ(–1,3176) ≈ 0,81236, cela fait une différence de 0,26%