I. Notion d'événement

exercice I.1 : On jette une pièce de monnaie deux fois de suite.

a) Donner l'univers de cette expérience aléatoire.

a) U = { PP, PF, FP, FF }

b) Décrire, en français dans le texte, trois événements liés à cette expérience.

b) A = { PF, FP } = "obtenir exactement un pile" = "obtenir exactement un face".

B = { PF, FP, PP } = "obtenir au moins un pile" = "obtenir au plus un face".

C = { PP, FF } = "obtenir deux fois le même résultat".

Il y a 2^4 = 16 événements distincts possibles, représentés par les 16 sous-ensembles de l'univers U.

E_1 = { } ;

E_2 = { PP } ; E_3 = { PF } ; E_4 = { FP } ; E_5 = { FF } ; E_6 = { PP, PF } ;

E_7 = { PP, FP } ; E_8 = { PP, FF } ; E_9 = { PF, FP } ; E_{10} = { PF, FF } ; E_{11} = { FP, FF } ;

E_{12} = { PP, PF, FP } ; E_{13} = { PP, PF, FF } ; E_{14} = { PP, FP, FF } ; E_{15} = { PF, FP, FF } ;

E_{16} = { PP, PF, FP, FF }

exercice I.2 : On considère le jet d'un dé à six faces et l'univers $U = \{1;2;3;4;5;6\}$.

Soient les événements :

A	=	*« le nombre obtenu est pair ».*
B	=	*« le nombre obtenu est plus petit ou égal à quatre ».*
C	=	*« le nombre obtenu est 1 ou 5 ».* $C = \{ 1, 5 \}$; $\overline{C} = \{ 2, 3, 4, 6 \}$

a) Compléter les égalités suivantes :

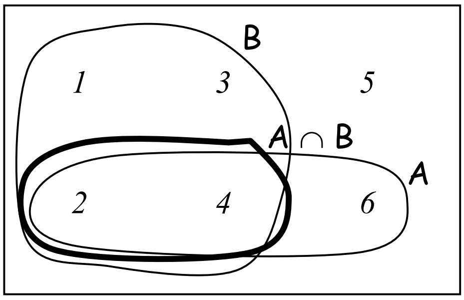
A	$= \{ 2, 4, 6 \}$	B	$= \{ 1, 2, 3, 4 \}$
$\overline{A}$	$= \{ 1, 3, 5 \}$	$\overline{B}$	$= \{ 5, 6 \}$
$A \cap B$	$= \{ 2, 4 \}$	$\overline{A \cap B}$	$= \{ 1, 3, 5, 6 \}$
$B \cap C$	$= \{ 1 \}$	$B \cap \overline{C}$	$= \{ 2, 3, 4 \}$
$\overline{A \cap B} \cup \overline{C}$	$= \{ 1, 2, 3, 4, 6 \}$	$\overline{(A \cap B) \cup C}$	$= \{ 3, 6 \}$
$\overline{A \cup B \cup C}$	$= \varnothing$	$\overline{(A \cup C) \cap B}$	$= \{ 3, 5, 6 \}$

b) Trouver un événement élémentaire de U. Il y en a six : {1} ; {2} ; {3} ; {4} ; {5} ; {6}

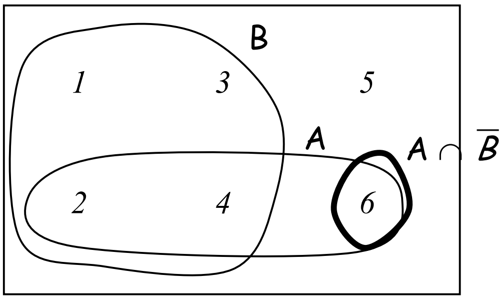
c) Trouver deux événements incompatibles. A et $\overline{A}$; B et $\overline{B}$; A et C

d) Trouver un événement, non élémentaire, qui soit incompatible avec B. $\overline{B} = \{ 5, 6 \}$ et $\varnothing$.

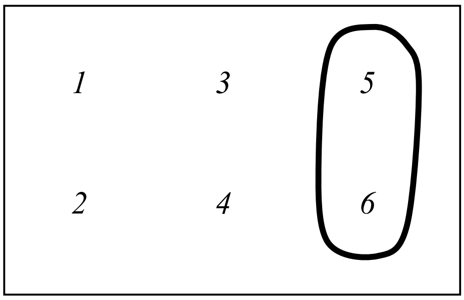
e) Illustrer, à l'aide des diagrammes, les opérations ensemblistes données en légende.



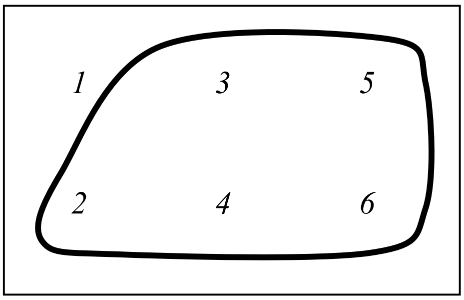
$A \cap B$



$A \cap \overline{B}$



$(A \cup C) \cap \overline{B}$



$\overline{B} \cup \overline{C}$

f) Trouver une issue telle que $A \cap B$ soit réalisé. Même question avec $A \cap \overline{B}$.

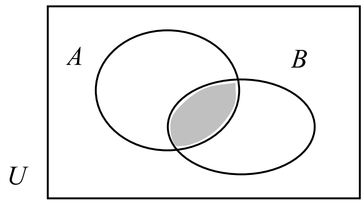
Une issue réalisant $A \cap B$ est {4}. Une autre est : {2}.

Une issue réalisant $A \cap \overline{B}$ est {6}, c'est la seule

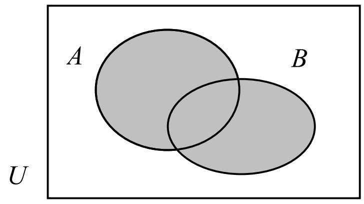
II. Diagramme ensembliste

Soient A et B deux événements d'un univers U. En utilisant uniquement les symboles A , B , $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\cap$ et $\cup$, déterminer les événements décrits ci-dessous et les illustrer dans les diagrammes de Venn.

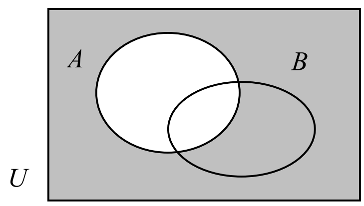
1) « *A* **et** *B* sont réalisés » : $A \cap B$



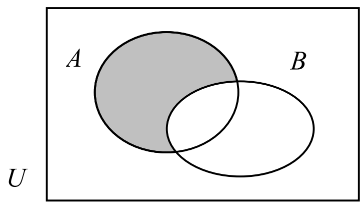
2) « *A* **ou** *B* est réalisé » : $A \cup B$



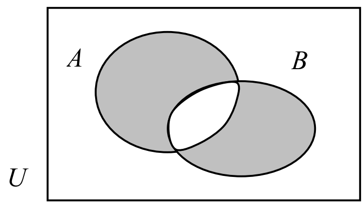
3) « *A* n'est pas réalisé » : $\overline{A}$



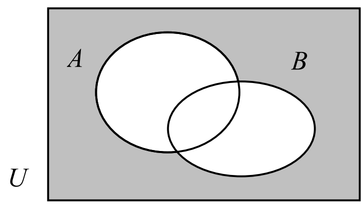
4) « *A* est réalisé **et** *B* n'est pas réalisé » : $A \cap \overline{B}$



5) « Un seul des événements *A*, *B* est réalisé » :
$(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$



6) « Ni *A*, ni *B* ne sont réalisés » :
$\overline{(A \cup B)}$ ou
$(\overline{A} \cap \overline{B})$



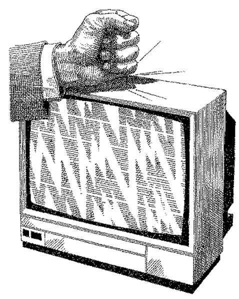
III. Axiomes et théorèmes

exercice III.1 : Trois personnes A , B et C participent à une course. A et B ont la même probabilité de gagner, et chacun d'eux a deux fois plus de chance de gagner que C. Calculer la probabilité pour que B ou C gagne.

Notons : p = P(A) = P(B) = 2 · P(C).
On sait que P(A) + P(B) + P(C) = 1,
donc p + p + p/2 = 1.
On en déduit : p = 2/5, P(A) = P(B) = 2/5, P(C) = 1/5.

exemple : Fabrication de téléviseurs.

On considère une chaîne de fabrication de téléviseurs. A la sortie, chaque téléviseur subit une vérification du tube cathodique (*TC*) et du haut parleur (*HP*). Les statistiques montrent que :



- le *TC* fonctionne avec une probabilité de 0,81.
- le *HP* fonctionne avec une probabilité de 0,75.
- le *TC* et le *HP* fonctionnent simultanément avec une probabilité de 0,66.

Déterminer la probabilité que :

a) le *TC* fonctionne seul.

b) le *HP* ne fonctionne pas.

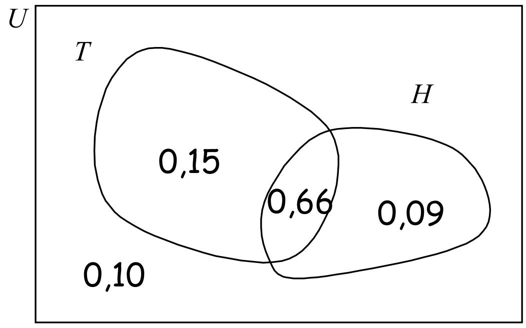
c) seul l'un des deux éléments fonctionne.

d) aucun des deux éléments ne fonctionne.

e) le téléviseur soit en état de marche.

solution :

On notera : T = « le *TC* fonctionne »
H = « le *HP* fonctionne »



D'après l'énoncé :
$P(T) = \mathbf{0{,}81}$ $P(H) = \mathbf{0{,}75}$ $P(T \cap H) = \mathbf{0{,}66}$

	T	$\overline{T}$	total
H	**0,66**	0,9	**0,75**
$\overline{H}$	0,15	0,10	0,25
total	**0,81**	0,19	**1,00**

Les données sont en gras, le reste se déduit grâce aux propriétés des probabilités :
° la dernière colonne est la somme de la ligne
° la dernière ligne est la somme de la colonne.

a) $P($ seul *TC* fonctionne $)$ = P $(T \cap \overline{H})$ = 0,81 - 0,66 = 0,15

b) $P($ le *HP* ne fonctionne pas $)$ = P (H) = 1 - 0,75 = 0,25

c) $P($ seul *TC* ou *HP* fonctionne $)$ = P $((\overline{T} \cap H) \cup (T \cap \overline{H}))$ = 0,15 + 0,09 = 0,24

d) $P($ ni *TC* ni *HP* fonctionne $)$ = P $(\overline{T} \cap \overline{H})$ = 0,10

e) $P($ le téléviseur marche $)$ = P $(T \cap H)$ = 0,66

V. Probabilités conditionnelles

exercice V.1 : On lance une paire de dés (non pipés). Sachant que la somme est égale à 6, calculer la probabilité pour que l'un des deux dés ait donné 2.

$$P(\text{un dé} = 2 \text{ sachant que la somme des deux dés} = 6) = P(\text{un dé} = 2 \,|\, \text{somme} = 6) =$$
$$\frac{P(\text{un dé} = 2 \text{ et somme} = 6)}{P(\text{somme} = 6)} = \frac{P(2\,;4) + P(4\,;2)}{P(1\,;5) + P(2\,;4) + P(3\,;3) + P(4\,;2) + P(5\,;1)} = \frac{2}{5} = 0,4 \underline{\underline{= 40\%}}$$

exercice V.2 : Sur 100'000 garçons qui naissent, 89'620 sont encore en vie à 50 ans et 59'390 à 70 ans. Quelle probabilité un homme de 50 ans a-t-il d'être encore en vie à 70 ans ?

$$P(\text{en vie à 70 ans sachant que en vie à 50 ans}) = \frac{P(\text{en vie à 70 ans et en vie à 50 ans})}{P(\text{en vie à 70 ans})} =$$
$$\frac{P(\text{en vie à 70 ans})}{P(\text{en vie à 50 ans})} = \frac{59'390/100'000}{89'620/100'000} = \frac{59'390}{89'620} \underline{\underline{\approx 66,27\%}}$$

exemple : On effectue une enquête auprès de 250 salariés d'une entreprise comprenant 50 cadres et 200 employés, pour savoir s'ils sont favorables ou non à la journée continue. Le dépouillement indique que 30 cadres et 80 employés sont favorables, tous les autres étant contre.
Déterminer la probabilité pour que la première carte tirée de la boîte de réponses soit celle :

a) d'une personne favorable.
b) d'un cadre.
c) d'une personne favorable si cette carte est celle d'un cadre.
d) d'un cadre si cette carte est celle d'une personne favorable.

D'après l'énoncé :
P(*Cadre*) = **50/250 = 0,2**
P(*Employé*) = **0,8**
P(*Cadre et Fav.*) = 3**0/250 = 0,12**
P(*Empl. et Fav.*) = 8**0/250 = 0,32**

	Cadre	*Employé*	total
Favorable	**0,12**	**0,32**	0,44
$\overline{Favorable}$	0,08	0,48	0,56
total	**0,20**	**0,80**	**1,00**

Les données sont en gras.

solution :

a) $P(F) =$ 0,12 + 0,32 = 0,44

b) $P(C) =$ 50 / 250 = 0,2

c) $P(F\,|\,C) = P(F \cap C) / P(C) =$ 0,12 / 0,20 = 0,6
Autre : $P(F\,|\,C) =$ 30 / 50 = 0,6

d) $P(C\,|\,F) = P(F \cap C) / P(F) =$ 0,12 / 0,44 $\approx$ 0,2727
Autre : $P(C\,|\,F) =$ 30 / (30 + 80) = 0,2727

exercice V.3 : Dans une certaine population, on constate que 30 % des individus n'ont jamais fait de ski, que 65 % n'ont jamais pris l'avion, mais que 20 % ont déjà fait du ski et pris l'avion.

$$P(S\,|\,\overline{A}) = \frac{P(S \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{50\%}{65\%} \approx 76,92\%$$
$$P(A\,|\,S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{20\%}{70\%} \underline{\underline{\approx 28,57\%}}$$

	Avion	$\overline{Avion}$	total
Ski	**0,20**	0,50	0,70
$\overline{Ski}$	0,15	0,15	**0,30**
total	0,35	**0,65**	**1,00**

Il y a plus de chance d'avoir un skieur parmi ceux qui n'ont jamais pris l'avion que d'avoir une personne ayant pris l'avion parmi ceux qui ont déjà fait du ski.

VI. Diagramme en arbre

Lorsque'il est possible de schématiser une expérience aléatoire sous la forme d'un arbre dont les branches représentent les différentes possibilités, il est alors beaucoup plus aisé de calculer les probabilités liées à cette expérience.

exemple : Soient 3 boîtes telles que :

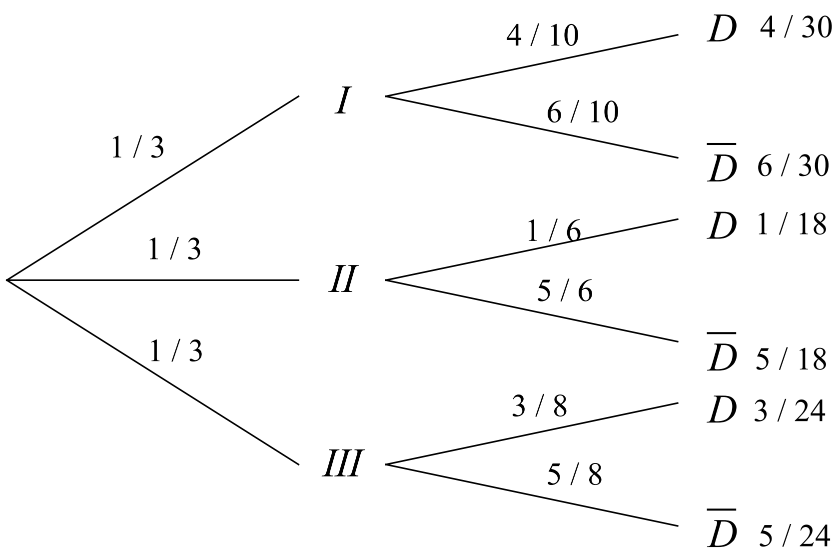
la boîte	*I*	contient	10	ampoules dont	4	sont défectueuses.
la boîte	*II*	contient	6	ampoules dont	1	est défectueuse.
la boîte	*III*	contient	8	ampoules dont	3	sont défectueuses.
total			24	ampoules dont	8	sont défectueuses.

On **choisit une boîte au hasard** puis l'on extrait une ampoule. Calculer la probabilité :

prob. = 1 / 3 pour chaque boîte.

1) que cette ampoule soit défectueuse.
2) que cette ampoule provienne de la boîte *II* sachant qu'elle est défectueuse.
3) que cette ampoule ne provienne pas de la boîte *II* sachant qu'elle n'est pas défecteuse.

solution : Un diagramme en arbre permet de décrire le processus et donne la probabilité de chaque branche de l'arbre :



1) $P(D) = \dfrac{4}{30} + \dfrac{1}{18} + \dfrac{3}{24} = 113/360 \approx \underline{\underline{31,39\%}}$

2) $P(II \mid D) = \dfrac{P(II\ et\ D)}{P(D)} = \dfrac{1/18}{113/360} \approx \underline{\underline{17,70\%}}$

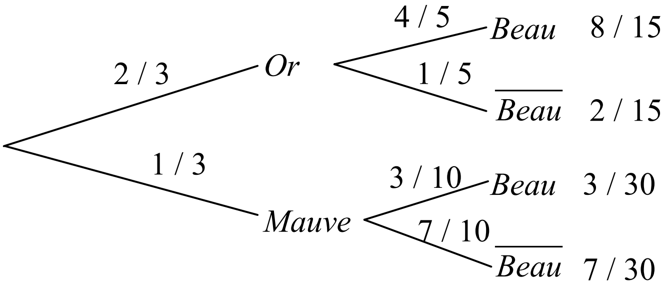
3) $P(I \cup III \mid \overline{D}) = \dfrac{6/30 + 5/24}{247/360} \approx \underline{\underline{59,51\%}}$

Autre approche :

	I	II	III	total
D	**4 / 30**	**1 / 18**	**3 / 24**	113/360
$\overline{D}$	6 / 30	5 / 18	5 / 24	247/360
tot.	**1 / 3**	**1 / 3**	**1 / 3**	**1**

° la dernière colonne est la somme de la ligne.
° la dernière ligne est la somme de la colonne.

exercice VI.1: Au fond d'un corridor se trouvent deux portes, une or, une mauve. Derrière la porte de couleur or il est fait beau quatre fois sur cinq, tandis que derrière la porte de couleur mauve il fait beau trois fois sur dix. Les méandres du corridor font que lorsque qu'une personne arrive au fond de ce corridor, elle choisisse deux fois sur trois la première porte.



Calculer la probabilité :

1) qu'il fasse beau. $P(\,Beau\,) = 8 / 15 + 3 / 30 = 19 / 30 \approx \underline{63{,}33\%}$

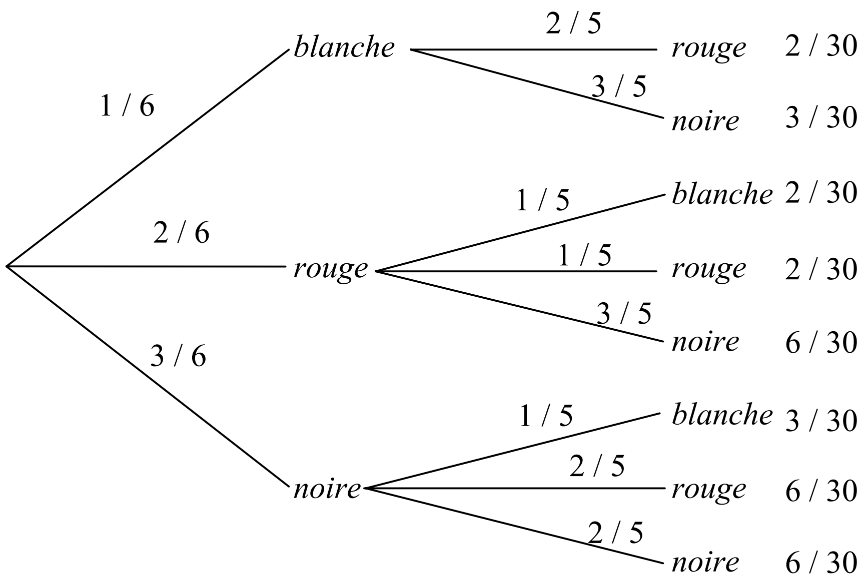
2) sachant qu'il fait beau, que cela soit la porte mauve qui ait été choisie.

$$P(\,Mauve \mid Beau\,) = \frac{P(Mauve\ et\ Beau)}{P(Beau)} = \frac{3/30}{19/30} = \frac{3}{19} \approx \underline{\underline{15{,}8\%}}$$

3) sachant qu'il ne fait pas beau, que cela soit la porte or qui ait été choisie.

$$P(Or \mid \overline{Beau}) = \frac{P(Or\ et\ \overline{Beau})}{P(\overline{Beau})} = \frac{2/15}{11/30} = \frac{4}{11} \approx \underline{\underline{36{,}36\%}}$$

exercice VI.2: Une urne contient une boule blanche, deux boules rouges et trois boules noires. On tire deux boules.



i) Quelle est la probabilité d'en avoir une rouge et une noire ?
P(*rouge et noire*) = *P*(*noire et rouge*) = 6/30 + 6/30 = 2/5 = 40%.

ii) Quelle est la probabilité d'en avoir deux de couleurs différentes ?
P(*coul. diff.*) = 1 – *P*(*coul. ident.*) = 1 – 2/30 – 6/30 = 1 – 4/15 ≈ 73,33%.

iii) Quelle est la probabilité d'en avoir une rouge et une noire, sachant que les boules tirées sont de couleurs différentes ?
Prob. = *P*(*rouge et noire*) / *P*(*coul. diff.*) ≈ 0,40 / 0,7333 ≈ 0,5455 = 54,55%

VII. Evénements indépendants

définition : Deux événements A et B d'un univers U sont dits **indépendants** si et seulement si :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

remarque : Cette définition traduit bien le fait que la réalisation de l'un des deux événements n'influence pas la réalisation de l'autre :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

exemple : On jette une pièce de monnaie deux fois de suite, et on considère les événements :

A = *« face apparaît au premier jet ».*

B = *« pile apparaît au second jet ».*

C = *« le même côté sort deux fois ».*

D = *« le nombre de faces est strictement inférieur à deux ».*

a) les événements A et B sont-ils indépendants ?
b) même question avec les événements C et D.

solution : L'univers est $U = \{ PP; PF; FP; FF \}$, et clairement nous avons :

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(C) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(D) = \frac{3}{4}$$

	A	$\overline{A}$	
B	1/4	1/4	1/2
$\overline{B}$	1/4	1/4	1/2
	1/2	1/2	1

a) $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$. Donc A et B sont indépendants.

b) $P(C \cap D) = \frac{1}{4} \neq P(C) \cdot P(D)$. Donc C et D sont dépendants.

	C	$\overline{C}$	
D	1/4	2/4	3/4
$\overline{D}$	1/4	0/4	1/4
	1/2	1/2	1

exercice VII.1 : On dispose d'un jeu de 52 cartes. Les événements *« tirer un as »* et *« tirer un coeur »* sont-ils indépendants ?

	As	$\overline{As}$	
C	1/52	12/52	13/52
$\overline{C}$	3/52	36/52	39/52
	4/52	48/52	52/52

P(*As*) = 4 / 52
P(*C*) = 13 / 52
P(*As et C*) = 1 / 52 = *P*(*As*) · *P*(*C*)
Donc les deux événements sont indépendants.

exercice VII.2 : On jette 3 fois une pièce de monnaie équilibrée. Soient les événements :

A = *« face apparaît au premier jet »*. P(A) = 1/2

B = *« face apparaît au deuxième jet »*. P(B) = 1/2

C = *« la séquence FP apparaît dans cet ordre »*.

P(C) = P({FPF ; FPP ; FFP ; PFP }) = 4/8 = 1/2.

Les événements A et B sont-ils indépendants ? Même question pour A et C, puis B et C.

$P(A \cap B) = P(\{FFF ; FFP\}) = 2/8 = 1/4 = P(A) \cdot P(B)$, donc A et B sont indépendants.

$P(A \cap C) = P(\{FPF ; FPP ; FFP\}) = 3/8 \neq P(A) \cdot P(C)$, donc A et C sont dépendants.

$P(B \cap C) = P(\{FPF ; FPP\}) = 2/8 = 1/4 = P(B) \cdot P(C)$, donc B et C sont indépendants.

propriétés : Montrez que si deux événements A et B sont indépendants, alors :

i) A et $\overline{B}$ sont indépendants

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B})$ CQFD

ii) $\overline{A}$ et B sont indépendants

Idem, en intervertissant les rôles de A et de B.

iii) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

On peut le faire en utilisant deux fois la propriété i). Autre méthode :

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap B) = 1 - P(A) - [P(B) - P(A \cap B)] =$

$1 - P(A) - [P(B) - P(A) \cdot P(B)] = 1 - P(A) - [P(B) \cdot (1 - P(A))] = (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) =$

$P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$ CQFD

exercice VII.3 : On lance un dé noir et un dé rouge. Soient les événements :

A = "le dé noir donne un résultat pair"

B = "le dé rouge donne un résultat pair"

C = "la somme des résultats des deux dés est impaire"

Montrez que A et B sont indépendants, ainsi que A et C et aussi B et C.

Et pourtant, montrez que $A \cap B$ est dépendant de C, de même que $A \cup B$ est dépendant de C.

P(A) = 1/2 ; P(B) = 1/2 ; P(C) = 1/2

$P(A \cap B) = 1/4 = P(A) \cdot P(B)$, donc A et B sont indépendants.

$P(A \cap C) = 1/4 = P(A) \cdot P(C)$, donc A et C sont indépendants.

$P(B \cap C) = 1/4 = P(B) \cdot P(C)$, donc B et C sont indépendants.

Mais ..., on obtient le joli résultat suivant :

$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A \cap B) \cdot P(C)$, donc $A \cap B$ et C sont dépendants.

Si des événements sont indépendants deux à deux, il est possible qu'un des événements soit dépendant des autres événements pris ensemble.

IX. Variable aléatoire

Dans les applications des probabilités, en particulier à propos des jeux de hasard étudiés par Blaise Pascal et Pierre de Fermat, on s'intéresse à des variables comme le montant d'un gain ou d'une perte, dont les valeurs sont déterminées par le hasard.

définition : Soit U un univers fini muni d'une loi de probabilité.
On appelle **variable aléatoire discrète** toute fonction réelle X définie sur U : $\boxed{X : U \to \mathbb{R}}$

Dès lors, à chaque réel x on peut associer la probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur x :

exemple
On considère l'expérience qui consiste à lancer deux dés.
$U = \{(1;1);(1;2);...;(1;6);...;(2;1);(2;2);...;(6;6)\}$
Définissons une variable aléatoire X par la fonction :

$$\begin{aligned} X : \{(1;1);(1;2);(1;3);...;(6;6)\} &\to \mathbb{R} \\ (r;v) &\mapsto r+v \end{aligned} \qquad \text{donc } X(r;v) = r+v$$

On dit que la variable aléatoire X représente "*la somme des deux dés*".
L'ensemble des valeurs que cette variable aléatoire peut prendre est évidemment $\{2;3;...;12\}$.
C'est l'ensemble des images de la fonction X.

Examinons de combien de façons chacune de ces valeurs peut être atteinte :

x_i	*les cas favorables*	*total*
2	$(1;1)$	1
3	$(1;2)$, $(2;1)$	2
4	$(1;3)$, $(2;2)$, $(3;1)$	3
5	$(1;4)$, $(2;3)$, $(3;2)$, $(4;1)$	4
6	$(1;5)$, $(2;4)$, $(3;3)$, $(4;2)$, $(5;1)$	5
7	$(1;6)$, $(2;5)$, $(3;4)$, $(4;3)$, $(5;2)$, $(6;1)$	6
8	$(2;6)$, $(3;5)$, $(4;4)$, $(5;3)$, $(6;2)$	5
9	…	…
10		
11		
12		

Valeurs à reporter dans le tableau des probabilités de X :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$P(X = x_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	0

Ce tableau est aussi appelé : "**loi de probabilité**" ou "**distribution**" de la variable aléatoire X.

Notons encore que par exemple $X = 13$ est impossible pour l'expérience considérée et donc naturellement $P(X = 13) = 0$.

Pour chacun de ces exercices, décrire d'abord U !

exercice IX.1 : On lance une pièce de monnaie 5 fois de suite. Soit X la variable aléatoire « nombre de faces obtenus ». Ecrire, sous forme de tableau, la loi de probabilité de X.

x_i	0	1	2	3	4	5	total
$P(x_i)$	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32	1

En moyenne, on obtient 2,5 faces. ($E(X) = 2{,}5$ $\sigma(X) \approx 1{,}118$)

exercice IX.2 : On lance simultanément un dé et une pièce de monnaie. On considère la variable aléatoire X qui à chaque issue associe un nombre de la manière suivante : Si la pièce est tombée sur face on retient le chiffre indiqué par le dé, si la pièce est tombée sur pile alors on multiplie par 2 le chiffre indiqué par le dé. Etablir la loi de probabilité de X.

x_i	1	2	3	4	5	6	8	10	12	total
$P(x_i)$	1/12	2/12	1/12	2/12	1/12	2/12	1/12	1/12	1/12	1

En moyenne, on obtient le nombre 5,25. ($E(X) = 5{,}25$ $\sigma(X) \approx 3{,}21778$)

exercice IX.3 : On joue à pile ou face trois fois de suite. Chaque "pile" obtenu fait gagner 3 points et chaque "face" fait perdre 2 points. Soit X la variable qui prend la valeur du gain ou de la perte après ces trois lancers (on suppose la pièce équilibrée). Etablir la loi de probabilité de X.

x_i	−6	−1	4	9	total
$P(x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

En moyenne, on gagne 1,5 points. ($E(X) = 1{,}5$ $\sigma(X) \approx 4{,}33$)

Probabilité que la variable aléatoire X soit comprise entre deux réels a et b :

Par exemple, dans le tableau ci-dessus : $P(6 < x \leq 10) = \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} = \frac{18}{36}$

Mais ceci est équivalent à $P(6 < x \leq 10) = P(x \leq 10) - P(x \leq 6) =$

$$\left(\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}+\frac{3}{36}\right)-\left(\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}\right)=\frac{6}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}+\frac{3}{36}$$

Et d'une manière générale, on a la relation :

$$\boxed{P(a < x \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)}$$

exercice IX.4 : Soit la distribution :

x	-3	-1	1	5	10
$P(X = x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

Calculer :

a) $P(X \leq -1) = \frac{1}{12} + \frac{2}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

b) $P(X > -1) = \frac{3}{12} + \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$

c) $P(-3 < X \leq 1) = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{12} = 0{,}41\overline{6}$

d) $P(-1 < X \leq 5) = \frac{3}{12} + \frac{5}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$

e) $P(-1 < X \leq 5 \mid X \geq -1) = \frac{8/12}{11/12} = \frac{8}{11} \approx 0{,}727$

f) $P(-3 < X \leq 1 \mid X \geq -1) = \frac{5/12}{11/12} = \frac{5}{11} \approx 0{,}454$

X. Espérance mathématique

Il est naturel, lors d'un pari, de vouloir estimer ses chances de réussite. Aussi bien la somme qu'il est possible de gagner que la probabilité du gain sont à prendre en considération.

activité : Un joueur a le choix entre deux loteries. La première loterie propose des billets à 10 F, et le joueur peut gagner 5'000 F une fois sur quatre cents. Par contre, s'il achète son billet à la deuxième loterie, ce dernier coûte 20 F, mais il peut rapporter 100'000 F avec une probabilité d'une chance sur dix mille. Voici, en résumé, la situation :
(Les billets n'étant jamais remboursés, que l'on soit gagnant ou perdant).

X = "gain à la première loterie"

gain : x_i	-10	4'990
$p_i = P(X = x_i)$:	$\frac{399}{400}$	$\frac{1}{400}$

Y = "gain à la deuxième loterie"

gain : y_i	-20	99'980
$p_i = P(Y = y_i)$:	$\frac{9'999}{10'000}$	$\frac{1}{10'000}$

En moyenne, combien gagnera-t-on ou perdra-t-on avec chacune des deux loteries ?

Quelle loterie choisir ?

Avec la première loterie, sur 400 parties, on perd en moyenne 399 fois 10 F et on gagne une fois 4'990 F. Au totale cela fait un gain de 4'990 – 3'990 = 1'000 F.
Donc on gagne 1'000 / 400 = 2,5 F par partie en moyenne.
On écrit : E(X) = 2,5 F.

Avec la deuxième loterie, sur 10'000 parties, on perd en moyenne 9'999 fois 20 F et on gagne une fois 99'980 F.
Au totale cela fait un gain de 99'980 – 9'999 · 20 = -100'000 F.
Ce gain négatif correspond à une perte de 100'000 F en 10'000 parties
Donc on perd 100'000 / 10'000 = 10 F par partie en moyenne.
On écrit : E(Y) = -10 F.

En moyenne, on a avantage à jouer à la première loterie.

<u>Parenthèse :</u>
Var(X) = $\frac{399}{400}\cdot(-10-2,5)^2+\frac{1}{400}\cdot(4'990-2,5)^2 = 62'343,75$
σ (X) $\approx$ 249,67
On est gagnant en moyenne, mais on perd beaucoup plus souvent qu'on gagne.

Var(Y) = $\frac{9'999}{10'000}\cdot(-20-(-10))^2+\frac{1}{10'000}\cdot(99'980-(-10))^2 = 999'900$
σ (Y) $\approx$ 99,95
En moyenne on est perdant et on perd beaucoup plus souvent qu'on gagne.
Mais lorsqu'on gagne, c'est une forte somme.

fait : Les variables aléatoires que nous considérons ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs réelles $x_1, x_2, \dots, x_n$. De telles variables aléatoires s'appellent **discrètes**.

définition : L'**espérance mathématique** de la variable aléatoire X est définie par :

$$\boxed{E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i}$$

exercice X.1 : Pamela et Fabien se mettent d'accord pour faire le jeu suivant : il s'agit de lancer simultanément 4 pièces de monnaie. S'il n'y a que des piles ou que des faces, Fabien doit donner 5 F à Pamela. S'il y a autant de piles que de faces, c'est encore Pamela qui gagne, et Fabien doit lui donner 1 F. Dans tous les autres cas, Pamela doit donner 2 F à Fabien. A qui le jeu profite-t-il ?

x_i	-2	1	5
$P(x_i)$	8/16	6/16	2/16

X = gain de Pamela.

E(X) = -2 · (8/16) + 1 · (6/16) + 5 · (2/16) = 0

Le jeu est équitable, il ne profite à personne.

Parenthèse :

$Var(X) = (-2)^2 \cdot (8/16) + 1^2 \cdot (6/16) + 5^2 \cdot (2/16) = 5{,}5$

$\sigma(X) \approx 2{,}345$

exercice X.2 : Dans une urne il y a 3 boules vertes, 3 boules jaunes et 3 boules rouges. Le jeu consiste à tirer 2 boules au hasard. Si les boules sont de la même couleur, vous gagnez 5 F. S'il y a exactement une boule rouge vous perdez 2 F. Dans les cas restants (une boule jaune et une boule verte) la partie est nulle. Jouez-vous ?

x_i	-2	0	5
$P(x_i)$	$\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}+\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

X = gain.

E(X) = -2 · (1/2) + 0 · (1/2) + 5 · (1/4) = 1/4 = 0,25 F

En moyenne le gain est de 0,25 F. Donc vous avez avantage à jouer.

Parenthèse :

$Var(X) = (-2 - 0{,}25)^2 \cdot (1/2) + (0 - 0{,}25)^2 \cdot (1/2) + (5 - 0{,}25)^2 \cdot (1/4) = 8{,}203125$

$\sigma(X) \approx 2{,}864$

définition : On dit qu'un jeu est **équitable** si son espérance mathématique est nulle.

définition : La **variance** d'une variable aléatoire X est définie par : $\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \left(x_i - E(X)\right)^2}$

définition : L'**écart-type** d'une variable aléatoire X est défini par : $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$.

L'écart-type est la racine carrée de la variance. Il a l'avantage de posséder la même unité que X.

XI. La loi binomiale

Jacques Bernoulli
(1654 – 1705)

La loi binomiale est une des lois de probabilités les plus anciennes. Elle fut découverte par Jacques Bernoulli, et figure dans son ouvrage *Ars Conjectandi* consacré aux travaux de Huygens, aux dénombrements et aux jeux de hasard.

Dans quelles conditions une variable aléatoire suit-elle une loi binomiale ?

- On répète plusieurs fois une expérience qui n'a que deux issues possibles, appelées "Succès" et "Echec".
- La probabilité de Succès est la même à chaque expérience.
- La variable aléatoire représente le nombre de Succès.

exemple :

Une urne contient 2 boules Noires et 5 boules Rouges. L'expérience consiste à tirer une boule au hasard. Tirer une boule Noire est un Succès, tirer une boule Rouge est un Echec.

P(Succès lors d'une expérience) = 2/7 ; P(échec lors d'une expérience) = 5/7

On répète l'expérience six fois de suite, en ayant soin de remettre chaque fois dans l'urne la boule tirée. La variable aléatoire X qui nous intéresse est définie comme étant le *nombre de fois qu'une boule Noire a été obtenue.*

Clairement X peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et 6.
On veut calculer $P(X=k)$, pour $k = 0, ..., 6$.

Pour fixer les idées, calculons $P(X=4)$. Une manière d'obtenir exactement 4 boules Noires est :

$N . R . N . R . N . N.$

Et la probabilité de cette séquence particulière est : $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \left(\frac{2}{7}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^2$

Mais il y a d'autres séquences conduisant également à la réalisation de $X = 4$, par exemple *N. N. N. N. R. R.*

Tout ce qu'il faut, c'est 4 fois une Noire, et ce parmi 6 places possibles.
Pour obtenir toutes les séquences possibles de 4 Noires et 2 Rouges, il faut compter le nombre de permutations avec répétitions de 4 boules Noires et 2 Rouges.

Ce nombre est : $\overline{P}(4;2) = \frac{(4+2)!}{4! \cdot 2!} = C_4^6$

D'où : $P(X=4) = C_4^6 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^2$

On imagine aisément la formule générale calculant la probabilité d'obtenir k fois une boule noire, lorsque l'expérience est répétée 6 fois en tout :

$P(X=4)=C_4^6\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^2$ donne pour k boules noires : $P(X=k)=C_k^6\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^k\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{6-k}$

Voici la loi de distribution complète de X :

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	0,1328	0,3187	0,3187	0,1699	0,0510	0,0082	0,0005

exercice XI.1 : Vérifier que le tableau ci-dessus correspond bien à une loi de probabilités, puis calculer l'espérance mathématique de cette distribution et interpréter le résultat obtenu.

Somme des probabilités :

$$\sum_{k=0}^{6}P(X=k)=0,1328+0,3187+0,3187+0,1699+0,0510+0,0082+0,005=0,9998\approx 1$$

Aux erreurs d'arrondis près, c'est bien une loi de probabilité, car la somme = 1.

E(X) = $\sum_{k=0}^{6}k\cdot P(X=k)$ = longs calculs ≈ 1,714

E(X) = n · p = 6 · (2/7) = 12/7 ≈ 1,714. La théorie a été utilisée ici.

En 7 essais, on a 2 succès en moyenne, donc en 6 essais on a 6 · (2/7) succès en moyenne.

Var(X) = $\sum_{k=0}^{6}(k-E(X))^2\cdot P(X=k)$ = longs calculs ≈ 1,224

Var(X) = n · p · (1 - p) = 6 · (2/7) · (5/7) = 60/49 ≈ 1,224. La théorie a été utilisée ici.

σ (X) ≈ 1,1066.

exercice XI.2 : Un mathématicien distrait prend son petit déjeuner, et ce chaque matin, avec une probabilité de deux chances sur trois. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de petits déjeuners que ce mathématicien prend durant une semaine. Etablir la distribution de X et en déduire le nombre de petits déjeuners pris en moyenne par semaine.

$P(D)=$ 2/3 $P(\bar{D})=$ 1/3 X varie entre 0 et 7. $P(X=k)=C_k^7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{7-k}$

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=k)$	$\frac{1}{3^7}$	$\frac{14}{3^7}$	$\frac{84}{3^7}$	$\frac{280}{3^7}$	$\frac{560}{3^7}$	$\frac{672}{3^7}$	$\frac{448}{3^7}$	$\frac{128}{3^7}$

$E(X)=$ n · p = 7 · 2/3 = 14 / 3 ≈ 4,667

Var(X) = n · p · (1 - p) = 7 · 2/3 · 1/3 = 14 / 9 ≈ 1,556

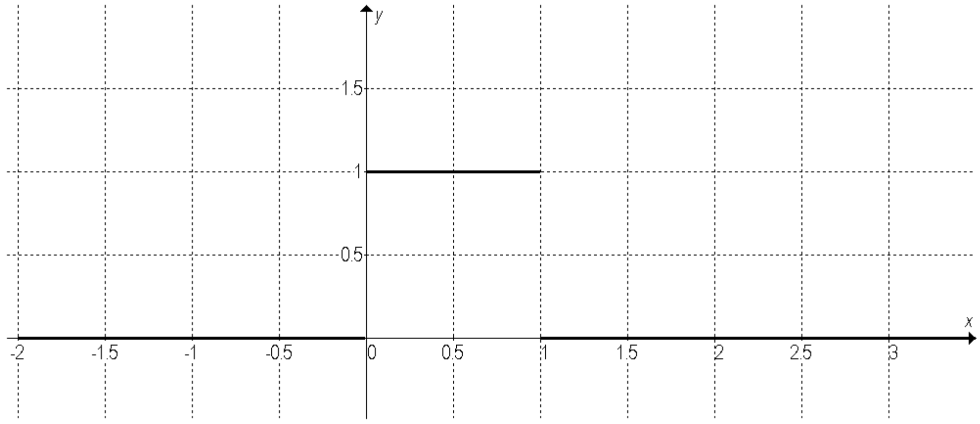
σ(X) ≈ 1,247

XII. Variable aléatoire continue

exercice XII.1 : Votre calculatrice possède une fonction "RAND" qui retourne un nombre aléatoire entre 0 et 1, avec une *densité de probabilité* f qui est une fonction constante.
Pour obtenir ce nombre à la calculatrice : $\boxed{\text{PRB}}$ $\boxed{\text{RAND}}$ $\boxed{=}$

i) Quelle est cette fonction de densité de probabilité f ?

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } 0\le x\le 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$



ii) Quelle est la fonction de répartition associée F ?

$$F(u)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{u} f(x)dx=0 & \text{si } u\le 0\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{u} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dx+\int_{0}^{u}1\cdot dx=x\Big|_0^u=u & \text{si } 0<u\le 1\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{u} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dx+\int_{0}^{1}1\cdot dx+\int_{1}^{u}0\cdot dx=x\Big|_0^1=1 & \text{si } u>1\end{cases}$$

iii) Quelle est la probabilité que "RAND" fournisse un nombre entre 0,6 et 0,9 ?

$P(0,6<X\le 0,9)=\displaystyle\int_{0,6}^{0,9}1\cdot dx=x\Big|_{0,6}^{0,9}=0,9-0,6=0,3$ ou encore : $P(0,6<X\le 0,9)=F(0,9)-F(0,6)$

iv) Quelle est la probabilité que "RAND" fournisse le nombre 0,5 ?

$P(X=0,5)=0$ Il faudrait plutôt calculer : $P(0,4999999<X\le 0,5000001)$

v) Quelle est la moyenne des nombres que fournira la variable aléatoire "RAND" ?

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,dx+\int_{0}^{1} x\cdot 1\,dx+\int_{1}^{+\infty} x\cdot 0\,dx=0+\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1+0=0,5 \quad \text{logique !}$$

$$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-0,5]^2\cdot f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}[x-0,5]^2\cdot 0\,dx+\int_{0}^{1}[x-0,5]^2\cdot 1\,dx+\int_{1}^{+\infty}[x-0,5]^2\cdot 0\,dx=$$

$$=0+\int_0^1\left[x^2-x+0,25\right]\cdot 1\,dx+0=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+0,25x\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+0,25=\frac{2-3+1,5}{6}=\frac{1}{12}$$

$\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{1/12}\approx 0,288675$

exercice XII.2 : Un arrêt de bus est desservi toutes les 10 minutes. Soit la variable X indiquant le temps d'attente en minutes du prochain bus lorsque l'on se rend à cet arrêt sans tenir compte de l'horaire. La *fonction de densité* de X est alors de la forme :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Vérifier que c'est une fonction de densité de probabilité.

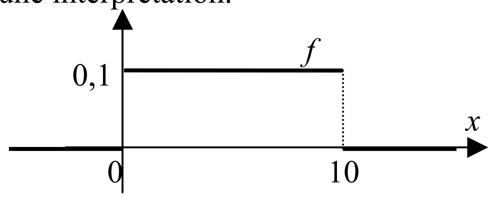
C'est une fonction de probabilités, car Voir aussi l'exercice 1 de la série 10.

i) $f(x) \geq 0$ pour tout nombre x.

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{10} 0{,}1\,dx = 1$

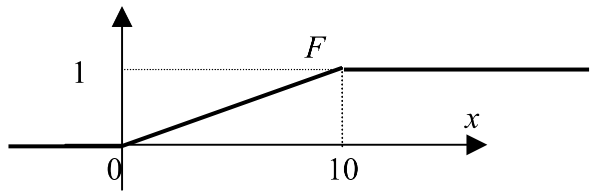
b) Représenter graphiquement cette fonction de densité et en donner une interprétation.

En arrivant au hasard à l'arrêt, on sait qu'on attendra pas plus de 10 minutes, mais il n'y a pas un instant d'arrivée privilégié, donc la densité de probabilité est constante sur ces 10 minutes.



c) Déterminer et représenter la fonction de répartition associée.

F(X) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 1 & si\ \ x \geq 10 \\ \int_0^x 0{,}1\,dt = 0{,}1 \cdot x & si\ \ 0 < x < 10 \\ 0 & si\ \ x \leq 0 \end{cases}$



d) Calculer

$P(3 < X \leq 5)$ = 0,2

$P(X \leq 2)$ = 0,2

$P(10 < X \leq 12)$ = 0 il ne faut jamais attendre plus de 10 minutes

$P(X > 7)$ = 1 - 0,7 = 0,3

$P(X = 4)$ = 0 on attendra jamais <u>exactement</u> 4 minutes. Parfois on attendra presque 4 min.

e) Calculer la moyenne et l'écart-type de X.

E(X) = $\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^{10} x \cdot 0{,}1\,dx = 0{,}1 \cdot \left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^{10} = 0{,}1 \cdot 50 - 0 = 5$

Il est logique qu'on doive attendre 5 minutes en moyenne, si un bus arrive toutes les 10 min.

Var(X) = $\int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)\,dx = \int_0^{10} (x-5)^2 \cdot 0{,}1\,dx = 0{,}1 \cdot \left.\dfrac{(x-5)^3}{3}\right|_0^{10} = 0{,}1 \cdot [\dfrac{125-(-125)}{3}] = \dfrac{25}{3}$

σ(X) = $\sqrt{Var(X)} = \sqrt{25/3} = 5/\sqrt{3} \approx 2{,}88675$

XIII. La loi normale ou loi de Gauss

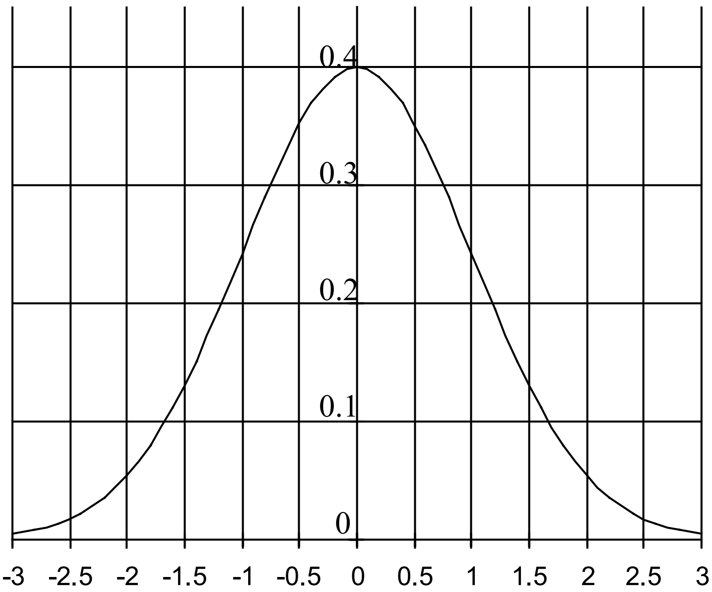
Illustration des fonctions de densité et de répartition de la loi normale centrée réduite.

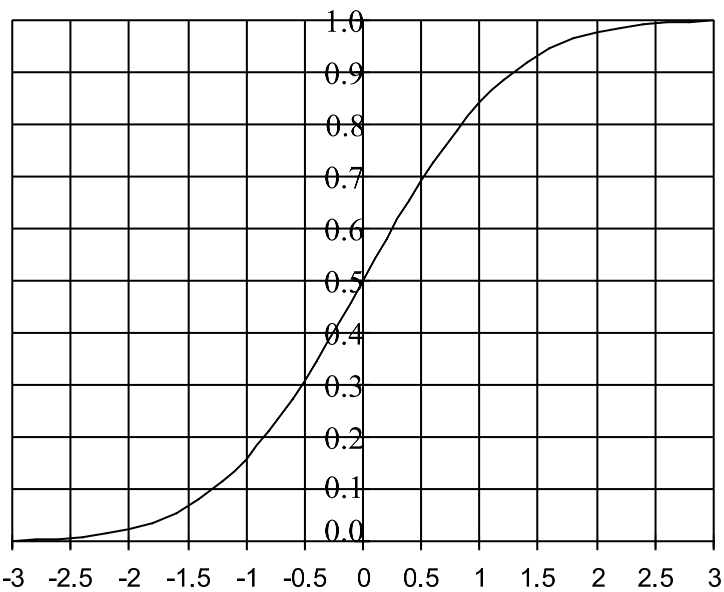
Fonction de densité de la loi normale $N(0;1)$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Fonction de répartition correspondante.

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$





exercice XIII.1 : Supposons que X suive la loi normale $N(0;1)$.

Illustrer et estimer, à l'aide des graphiques ci-dessus, les probabilités suivantes :

a) $P(X \leq 0) \approx$ 0,5

b) $P(0 < X \leq 1) \approx$ 0,84 - 0,5 ≈ 0,35

c) $P(X > 1) \approx$ 1 - 0,84 ≈ 0,16

d) $P(X \leq 1) \approx$ 0,84

e) $P(X > 3) \approx$ 0

f) $P(-2 < X \leq 2) \approx$ 0,97 - 0,03 ≈ 0,94

exemples : avec l'aide de la table des valeurs de $\Phi(u)$, vérifier les égalités suivantes.

$$P(X \leq 1,22) = \Phi(1,22) \simeq 0,88877$$

$$P(X \leq -1,22) = \Phi(-1,22) = 1 - \Phi(1,22) \simeq 1 - 0,88877 \simeq 0,11123$$

$$P(0,23 \leq X \leq 1,6) = \Phi(1,6) - \Phi(0,23) \simeq 0,94520 - 0,59095 \simeq 0,35425$$

$$P(-0,3 \leq X \leq 0,3) = 2 \cdot \Phi(0,3) - 1 \simeq 2 \cdot 0,61791 - 1 \simeq 0,23582$$

exercice XIII.2 :

A l'aide de la table numérique, vérifier les estimations faites dans l'exercice précédent.

a) $P(X \leq 0)$ = 0,5

b) $P(0 < X \leq 1)$ ≈ 0,84134 - 0,5 ≈ 0,34134 ≈ 0,35

c) $P(X > 1)$ ≈ 1 - 0,84134 ≈ 0,15866

d) $P(X \leq 1)$ ≈ 0,84134

e) $P(X > 3)$ ≈ 1 - 0,99863 ≈ 0,00135 ≈ 0

f) $P(-2 < X \leq 2)$ ≈ 2·0,97725 -1 ≈ 0,9545 ≈ 0,94

Dans les exercices suivants, on supposera que $X \sim N(0;1)$

exercice XIII.3 :
A l'aide de la table numérique calculer les valeurs de :

a) $P(X \leq 0,57) \approx$
0,71566

b) $P(X \leq -1,02) \approx$
1 - 0,84614 ≈ 0,15386

c) $P(X > 2,03) \approx$
1 - 0,97882 ≈ 0,02118

d) $P(0,46 < X \leq 1,98) \approx$
0,97615 - 0,67724 ≈ 0,29891

e) $P(-1,45 < X \leq 0,21) \approx$
0,38317 - (1 - 0,92647)≈0,509

f) $P(-0,34 < X \leq 0,34) \approx$
2 · 0,63307 - 1 ≈ 0,26614

exercice XIII.4 : Donner un argument graphique permettant de justifier que :

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \;=\; 0$$

La fonction à intégrer est de symétrie centrale, de centre égale à l'origine. Donc la partie d'aire algébrique positive pour x > 0 est exactement compensé par la partie d'aire algébrique négative pour x < 0. Globalement l'aire algébrique est nulle, donc E(X) = 0.

Parenthèse :

Par calculs : $E(X) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \;= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot (0-0) = 0$

fait : Une intégration par partie permet d'établir que l'écart-type de X vaut $\sigma(X) = 1$.

Parenthèse. Pour les curieux, voici comment calculer l'écart-type de X ~ N(0, 1)

$$Var(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(-x)}_{u} \cdot \underbrace{(-x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}_{v'}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \underbrace{(-x)}_{u} \cdot \underbrace{(-x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}_{v} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(-1)}_{u'} \cdot \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}}}_{v}\, dx = 0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

La dernière intégrale vaut 1, car la fonction à intégrer est une fonction de densité de probabilité et leur intégrale vaut toujours 1.
Pour montrer que cette dernière intégrale vaut vraiment 1, cela dépasse le cadre du collège.

XIV. La loi normale comme approximation d'autres lois

La loi normale $N(\mu\,;\sigma)$ a ceci d'extraordinaire, qu'une somme ou une moyenne de beaucoup de variables aléatoires indépendantes suit approximativement une telle loi.

Une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n\,,p)$ est la somme de n variables aléatoires indépendantes ne prenant que les valeurs 0 et 1. Elle est donc liée à la loi normale.

Application à la loi binomiale

exemple :
Lançons 10 fois de suite une pièce de monnaie et comptons le nombre de pile obtenu. Ce nombre représente une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $B(10\,;\,0{,}5)$.

Espérance de X : $\mu = \mathrm{E}(X) = 5$

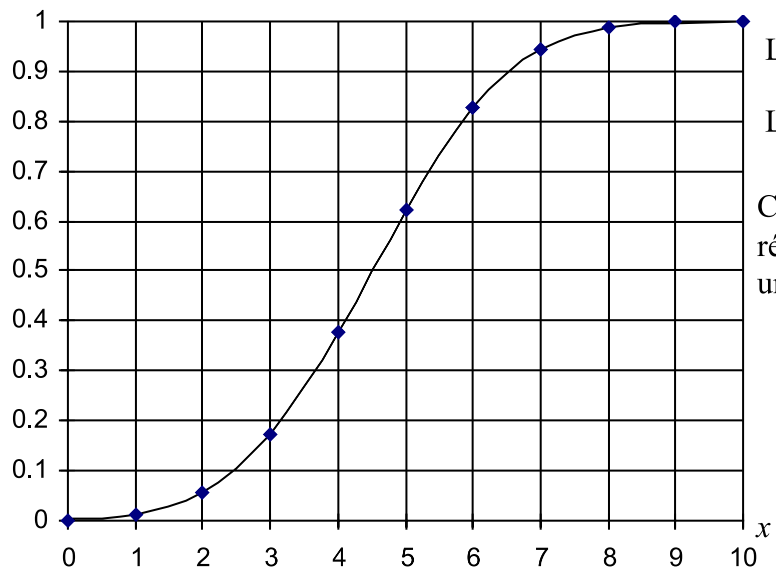
Ecart-type de X : σ = racine$(10 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5) \approx 1{,}5811388$

Le tableau suivant montre le lien entre la loi binomiale $B(\,10\,;\,0{,}5)$ et la loi normale $N(\,0\,;\,1)$.

Remplissez-le, puis comparez $P(X \le x)$ avec $\Phi\left(\dfrac{x+0{,}5-\mu}{\sigma}\right)$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=x)$	0,0010	0,0098	0,0439	0,1172	0,2051	0,2461	0,2051	0,1172	0,0439	0,0098	0,0010
$P(X \le x)$	0,0010	0,0107	0,0547	0,1719	0,3770	0,6230	0,8281	0,9893	0,9893	0,9990	1
$\dfrac{x+0{,}5-\mu}{\sigma}$	-2,846	-2,214	-1,581	-0,949	-0,316	0,3162	0,948	1,5811	2,2136	2,8460	3,4785
$\Phi\left(\dfrac{x+0{,}5-\mu}{\sigma}\right)$	0,0022	0,0134	0,0569	0,1714	0,3759	0,6241	0,8286	0,9431	0,9865	0,9978	0,9997

Sous forme graphique, la comparaison donne :



La courbe représente : $\Phi\left(\dfrac{x+0{,}5-\mu}{\sigma}\right)$

Les points représentent : $P(X \le x)$

Cet exemple illustre le fait que la fonction de répartition Φ de la loi normale $N(0\,;\,1)$ fournit une approximation de la loi binomiale.

problème :

Lançons 100 fois de suite une pièce de monnaie et comptons le nombre de pile obtenu.
Quelle est la probabilité que ce nombre soit entre 40 et 60 ?

La variable aléatoire X = "nombre de pile" suit une loi binomiale $B(100 ; 0{,}5)$.
Il est facile de calculer $P(40 \leq X \leq 60)$, mais c'est assez long à faire. C.f. exercice 3, série 9.

solution :

Si X suit une loi binomiale $B(n, p)$, alors :

$$P(X = x) \approx \Phi\left(\frac{x + 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x - 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right)$$

et

$$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b + 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right)$$

où $\mu = \mathrm{E}(X) = n \cdot p$; $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$; x, a et b sont des entiers entre 0 et n.

En pratique, l'approximation est assez bonne lorsque : $n \cdot p \geq 5$ et $n \cdot (1 - p) \geq 5$.

Donc notre problème se résout en calculant :
$\mu = \mathrm{E}(X) = 100 \cdot 0{,}5 = 50$; $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 5$;

$$P(40 \leq X \leq 60) \approx \Phi\left(\frac{60 + 0{,}5 - 50}{5}\right) - \Phi\left(\frac{40 - 0{,}5 - 50}{5}\right) \approx \Phi(2{,}1) - \Phi(-2{,}1) = 2 \cdot \Phi(2{,}1) - 1 \approx 0{,}9643$$

Il y a environ 96% de chances d'obtenir entre 40 et 60 piles en lançant 100 fois une pièce de monnaie !
Un calcul exact donne $P(40 \leq X \leq 60)$ = **0,9647**998...

exercice XIV.1 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(15 ; 0{,}6)$

a) Quelle est l'espérance μ et l'écart-type σ de X ? $\mu = 15 \cdot 0{,}6 = 9$ $\sigma \approx 1{,}8974$

b) Calculer $P(X = 10)$ $\approx$ *0,186*

c) Calculer : $\Phi\left(\frac{10 + 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right)$ et comparer au résultat de b)

Réponse : Φ(0,7906) – Φ(0,2635) ≈ 0,181, cela fait une différence de 2,8%

d) Calculer $P(X = 8)$ $\approx$ *0,177*

e) Calculer : $\Phi\left(\frac{8 + 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{8 - 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right)$ et comparer au résultat de d)

Réponse : Φ(–0,2635) – Φ(–0,7906) ≈ 0,181, cela fait une différence de 2,2%

f) Calculer $P(7 \leq X \leq 11)$ *≈ 0,11806 + 0,17708 + 0,20660 + 0,18594 + 0,12678 = 0,81446*

g) Calculer : $\Phi\left(\frac{11 + 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{7 - 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right)$ et comparer au résultat de f)

Réponse : Φ(1,3176) – Φ(–1,3176) ≈ 0,81236, cela fait une différence de 0,26%