

I. Problèmes historiques

I.1 Le problème du Grand duc de Toscane: Le jeu de *passé-dix*

On jouait beaucoup, au XVI^{ème} et XVII^{ème} siècle, au jeu de *passé-dix*.

La règle en est très simple : on jette trois dés au hasard ;

- ° l'un des joueurs gagne s'il obtient une somme de points supérieurs à 10 ;
- ° il perd si la somme des points est inférieure ou égale à 10.

a) Ce jeu est-il *équitable* ?

b) Ecrivez toutes les combinaisons des trois dés faisant apparaître la somme de 9, puis toutes les combinaisons des trois dés faisant apparaître la somme 10.

c) L'expérience a montré que la somme de 9 sortait moins souvent que la somme 10 alors qu'il y a pourtant autant de combinaisons pour obtenir ces deux sommes. Pourquoi ?

d) Quelle est la différence de fréquence d'apparition entre la somme de 9 et celle de 10 ?

I.2 Le premier problème du chevalier de Méré: le problème des dés.

« Je n'ai pas le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort M. de Méré; car il a un très bon esprit, mais il n'est pas géomètre. C'est comme vous savez, un grand défaut. Il me disait donc qu'il avait trouvé difficulté sur les nombres pour cette raison: si l'on entreprend de faire 6 avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre par quatre coups. Si l'on entreprend de faire « sonnez » (double six) avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en vingt-quatre coups, et néanmoins 24 est à 36, qui est le nombre des faces de deux dés, comme 4 est à 6, qui est le nombre des faces d'un dé.

Voilà quel était son grand scandale et qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes et que l'arithmétique se dément. » (Extrait de la lettre de B.Pascal à P. Fermat datée du 29 juillet 1654)

Formulée en langage moderne le « scandale » du chevalier de Méré revient à poser la question suivante: pourquoi est-il plus avantageux d'obtenir au moins un 6 en lançant 4 fois un dé que d'obtenir au moins un double 6 en lançant 24 fois deux dés alors que 4 est à 6 comme 24 est à 36 ?

I.3 Le deuxième problème du chevalier de Méré: le problème des Partis

Dans une première lettre de l'été 1654 (malheureusement perdue), B.Pascal soumet à P.Fermat un deuxième problème, posé par le chevalier de Méré:

Deux joueurs, engagent chacun 32 pistoles dans un jeu de pile ou face. Empochera les 64 pistoles celui d'entre eux qui, le premier, aura obtenu 3 succès, consécutifs ou non. Après avoir joué les trois premières manches, ils sont obligés de se séparer, et la partie ne sera jamais terminée. Un joueur a gagné deux fois, l'autre une fois. Comment partager équitablement l'enjeu entre eux ?

Quelle réponse donnez-vous à cette question et pourquoi ?

P. Fermat répondra à B. Pascal qui lui répondra à son tour, dans cette même lettre du 29 juillet 1654. Cette date symbolique est considérée par certains comme le véritable début de l'étude mathématique des probabilités. Pascal présente à Fermat, non seulement la solution à la question du chevalier de Méré, mais une méthode qui permet une généralisation. Ce problème est connu sous le nom de: *problème des partis*. B.Pascal dans son traité: *Traité du triangle arithmétique* précise ce qu'il entend par cette dénomination.

« Pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties.

Pour entendre les règles des partis, la première chose qu'il faut considérer est que l'argent que les joueurs ont mis au jeu ne leur appartient plus, car ils en ont quitté la propriété: mais ils ont reçu en revanche le droit d'attendre ce que le hasard leur en peut donner, suivant les conditions dont ils sont convenus d'abord.

Mais comme c'est une loi volontaire, ils peuvent la rompre de gré à gré; et ainsi, en quelque terme que le jeu se trouve, ils peuvent le quitter; et, au contraire de ce qu'ils ont fait en y entrant, renoncer à l'attente du hasard, et rentrer chacun en la propriété de quelque chose. Et en ce cas, le règlement de ce qui doit leur appartenir doit être tellement proportionné à ce qu'ils avaient droit d'espérer de la fortune, que chacun d'eux trouve entièrement égal de prendre ce qu'on lui assigne ou de continuer l'aventure du jeu: et cette juste distribution s'appelle le parti. » (Pascal B., *Traité du triangle arithmétique*, 1654).

IIa. Notion d'événement

Introduction.



Pierre de Fermat
(1601 – 1665)

Le calcul des probabilités s'occupe de **phénomènes aléatoires**, c'est-à-dire de phénomènes qui, lorsqu'ils sont observés dans des conditions déterminées, ne mènent pas toujours à la même issue. Néanmoins, même si ces phénomènes ont des issues variées, **dépendant du hasard**, on observe une certaine **régularité statistique**.

On doit à Pierre de Fermat et Blaise Pascal les premières bases du calcul des probabilités.



Blaise Pascal
(1623 – 1662)

exemple :

Lorsqu'on jette une pièce de monnaie, l'issue de l'expérience, c'est à dire l'apparition de pile ou face, n'est pas prévisible. Néanmoins, si l'on répète cette épreuve (expérience aléatoire) un grand nombre de fois, la fréquence relative du nombre d'apparitions de face dans la série d'épreuves est toujours voisine de 0,5 (pour une pièce symétrique).

Cette permanence statistique a été vérifiée au XVIII^e siècle déjà par Buffon, qui lançant une pièce de monnaie 4'040 fois, a obtenu 2'048 faces, soit une fréquence de 0,5069.

Au début du XX^e siècle, Pearson a obtenu une fréquence de 0,5005 pour 24'000 coups. Il est permis de supposer qu'en lançant une pièce de monnaie un nombre encore plus grand de fois, on arriverait à une fréquence encore plus proche de 0,5.

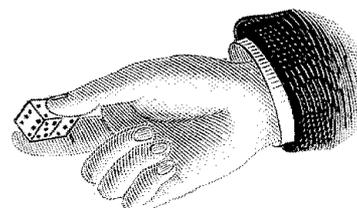
Dans l'exemple que nous avons choisi, cette probabilité de 0,5 apparaissait d'emblée pour des raisons de symétrie évidentes. Mais il n'en est pas de même pour un grand nombre de phénomènes aléatoires montrant cependant aussi une telle régularité statistique : accidents de la circulation, durée de la vie humaine, proportion de pièces défectueuses produites par une machine, etc.

Le calcul des probabilités, que nous allons présenter sous forme axiomatique, est un modèle mathématique pour certains aspects quantitatifs de ces phénomènes réels : la probabilité d'un événement est un nombre bien défini et fixe, alors que, la fréquence de ce même événement sera un nombre variable, fluctuant légèrement d'une série d'expériences aléatoires réelles à une autre.

étymologie :

En arabe : « az-ahr » signifie : avec les dés.

En latin : « aléa » signifie : dé.



Définitions et notations.

définitions :

- ◇ L'**univers** est l'ensemble U de toutes les issues possibles, incompatibles deux à deux, qui se présentent au cours d'une épreuve aléatoire déterminée.
- ◇ Une **issue** est un élément de l'univers U .

exemple : On jette un dé une seule fois, et on note le nombre de points obtenu. Les **issues** possibles sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6. On prend donc, pour l'**univers** de cette expérience : $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

définition : \diamond Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers.

exemple : Pour l'expérience précédente, sont des **événements** :

$$\{1\} = \text{« le nombre obtenu est } 1 \text{ ».}$$

$$\{1; 3\} = \text{« le nombre obtenu est impair et plus petit ou égal à trois ».}$$

$$\{2; 4; 6\} = \text{« le nombre obtenu est pair ».}$$

exercice II.1 : On jette une pièce de monnaie deux fois de suite.

a) Donner l'univers de cette expérience aléatoire.

b) Décrire, en français dans le texte, trois événements liés à cette expérience.

définition : \diamond On dit qu'un événement **a eu lieu** s'il contient l'issue qui s'est produite lors de l'expérience.

exemple : Soit l'expérience qui consiste à jeter un dé. Posons $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, et supposons que le résultat obtenu soit la face 3. Alors l'événement :

$$\{1; 3; 5\} = \text{« le nombre obtenu est impair » a eu lieu.}$$

$$\{1; 2; 4; 6\} = \text{« le nombre obtenu est soit 1, soit pair » n'a pas eu lieu.}$$

définitions et notations :

\diamond \emptyset est l'événement **impossible**.

\emptyset n'a jamais lieu.

\diamond U est l'événement **certain**.

U a toujours lieu.

\diamond \bar{A} se lit l'événement **contraire de A**.

\bar{A} a lieu $\Leftrightarrow A$ n'a pas lieu.

\diamond $A \cup B$ se lit l'événement **A union B**.

$A \cup B$ a lieu $\Leftrightarrow A$ ou B a lieu.

\diamond $A \cap B$ se lit l'événement **A inter B**.

$A \cap B$ a lieu $\Leftrightarrow A$ et B ont lieu.

\diamond Un **événement élémentaire** est constitué d'une issue exactement.

\diamond Si deux événements A et B sont tels que $A \cap B = \emptyset$, on dit qu'ils sont **incompatibles**.

De tels événements ne peuvent se produire simultanément.

exercice II.2 : On considère le jet d'un dé à six faces et l'univers $U = \{1;2;3;4;5;6\}$.

Soient les événements :

A = « le nombre obtenu est pair ».

B = « le nombre obtenu est plus petit ou égal à quatre ».

C = « le nombre obtenu est 1 ou 5 ».

a) Compléter les égalités suivantes :

$$A = \qquad \qquad \qquad B =$$

$$\bar{A} = \qquad \qquad \qquad \bar{B} =$$

$$A \cap B = \qquad \qquad \qquad \overline{A \cap B} =$$

$$B \cap C = \qquad \qquad \qquad B \cap \bar{C} =$$

$$\overline{A \cap B \cup C} = \qquad \qquad \qquad \overline{(A \cap B) \cup C} =$$

$$\overline{A \cup B \cup C} = \qquad \qquad \qquad \overline{(A \cup C) \cap B} =$$

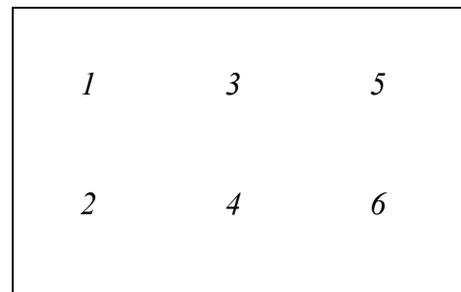
b) Trouver un événement élémentaire de U .

c) Trouver deux événements incompatibles.

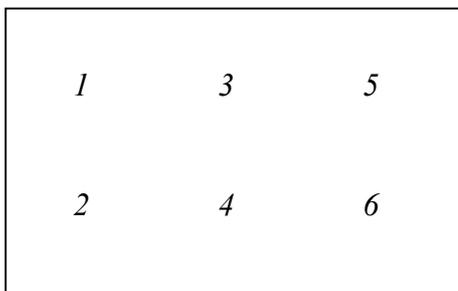
d) Illustrer, à l'aide des diagrammes, les opérations ensemblistes données en légende.



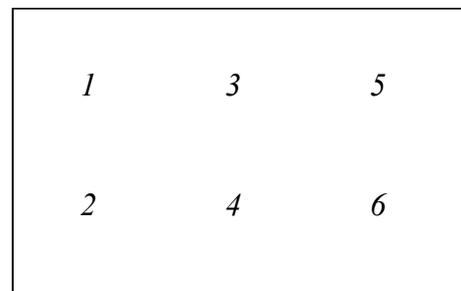
$$A \cap B$$



$$A \cap \bar{B}$$



$$(A \cup C) \cap \bar{B}$$



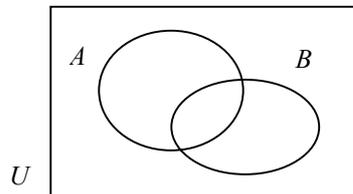
$$\bar{B} \cup \bar{C}$$

e) Trouver une issue telle que $A \cap B$ soit réalisé. Même question avec $A \cap \bar{B}$.

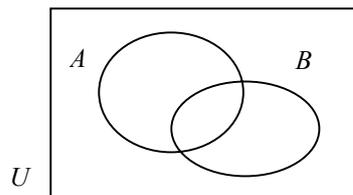
Iib. Diagramme ensembliste

Soient A et B deux événements d'un univers U . En utilisant uniquement les symboles A , B , \overline{A} , \overline{B} , \cap et \cup , déterminer les événements décrits ci-dessous et les illustrer dans les diagrammes de Venn.

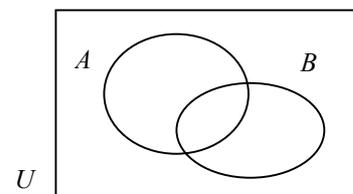
1) « A et B sont réalisés » :



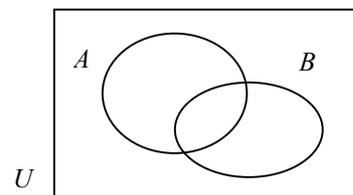
2) « A ou B est réalisé » :



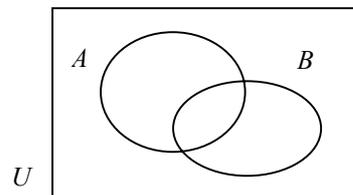
3) « A n'est pas réalisé » :



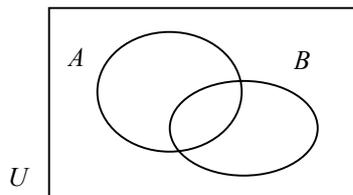
4) « A est réalisé et B n'est pas réalisé » :



5) « Un seul des événements A, B est réalisé » :



6) « Ni A , ni B n'est réalisé » :



Lois de Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ on a aussi : $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

III. Axiomes et théorèmes

Ce n'est qu'en 1933 que la théorie des probabilités a été présentée sous une forme axiomatisée par le mathématicien russe Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903 - 1987) dans sa publication : "Fondements de la théorie des probabilités".



Andrey Nikolaevich
Kolmogorov (1903 – 1987)

Soit U un univers fini. On dit que l'on définit une **probabilité** sur les événements de U si à tout événement $A \subset U$ on associe un nombre $P(A)$, appelé probabilité de l'événement A , satisfaisant aux trois axiomes suivants :

- (1) Pour tout événement A , $P(A) \geq 0$.
- (2) $P(U) = 1$.
- (3) Si $A \cap B = \emptyset$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

remarque : Tous ces axiomes sont « légitimes ». En effet, il est souhaitable que la probabilité d'un événement soit positive ou nulle, que l'événement certain ait une chance sur une de se produire, et enfin que la probabilité de réalisation de deux événements incompatibles soit la somme des probabilités de chacun des événements.

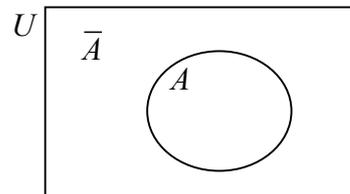
théorème 1 : $P(\emptyset) = 0$

en effet : $U \cap \emptyset = \emptyset$

$$\begin{aligned} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} P(U \cup \emptyset) &= P(U) + P(\emptyset) \\ \Rightarrow P(U) &= P(U) + P(\emptyset) \quad \Rightarrow P(\emptyset) = 0 \end{aligned}$$

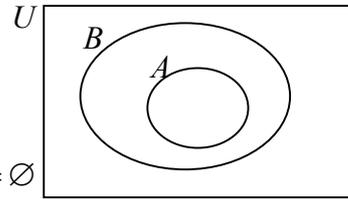
théorème 2 : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

en effet : $A \cap \bar{A} = \emptyset$



$$\begin{aligned} U &= A \cup \bar{A} \\ P(U) &= P(A \cup \bar{A}) \\ \stackrel{(3)}{\Rightarrow} P(U) &= P(A) + P(\bar{A}) \\ \stackrel{(2)}{\Rightarrow} 1 &= P(A) + P(\bar{A}) \quad \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) \end{aligned}$$

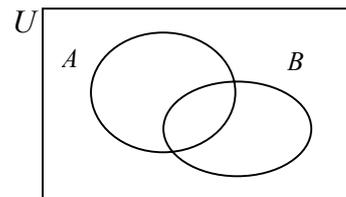
théorème 3 : Si $A \subseteq B$ alors $P(A) \leq P(B)$



en effet :

$$\begin{aligned} \emptyset &= A \cap (B \cap \bar{A}) \text{ car } A \cap \bar{A} = \emptyset \\ B &= A \cup (B \cap \bar{A}) \\ \stackrel{(3)}{\Rightarrow} P(B) &= P(A) + \underbrace{P(B \cap \bar{A})}_{\geq 0 \text{ (Axiome 1)}} \Rightarrow P(B) \geq P(A) \end{aligned}$$

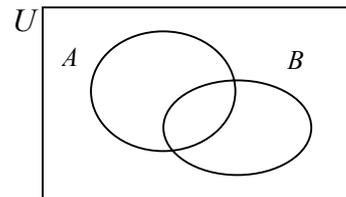
théorème 4 : $P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B)$



en effet :

$$\begin{aligned} \emptyset &= (A \cap B) \cap (B \cap \bar{A}) \\ B &= (A \cap B) \cup (B \cap \bar{A}) \\ \stackrel{(3)}{\Rightarrow} P(B) &= P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A}) \Rightarrow P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

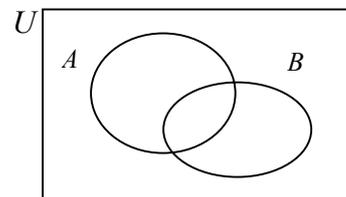
théorème 5 : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



en effet :

$$\begin{aligned} \emptyset &= A \cap (B \cap \bar{A}) \\ A \cup B &= A \cup (B \cap \bar{A}) \\ \stackrel{(3)}{\Rightarrow} P(A \cup B) &= P(A) + P(B \cap \bar{A}) \stackrel{\text{thm. 4}}{=} P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

théorème 6 : $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$



en effet :

$$\begin{aligned} \emptyset &= (A \cup B) \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) \\ U &= (A \cup B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) \\ \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \underbrace{P(U)}_{=1} &= P(A \cup B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) \Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) \end{aligned}$$

Autre : $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) \stackrel{\text{thm. 2}}{=} 1 - P(A \cup B)$

Lois de Morgan :
 $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$
 $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$

fait : Le troisième axiome exprime que si A et B sont incompatibles, la probabilité que l'un ou l'autre se produise égale la somme des probabilités de réalisation de A et de B :

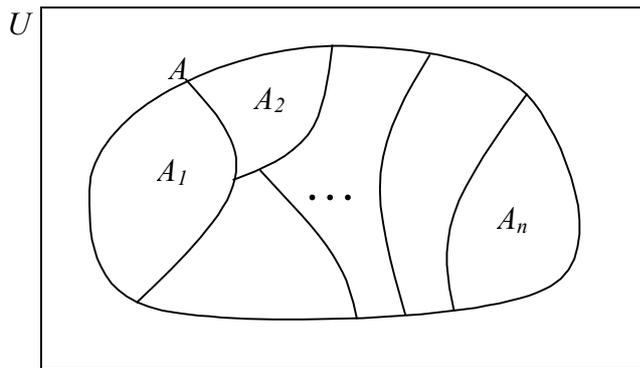
$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

En pratique, cela signifie que pour calculer $P(A \cup B)$ lorsque A et B sont incompatibles, il suffit de connaître $P(A)$ et $P(B)$. Cet axiome se généralise à une **famille d'événements deux à deux incompatibles** :

théorème 7 : Si A_1, A_2, \dots, A_n sont des événements deux à deux incompatibles, alors :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

C'est le théorème fondamental. Pour calculer la probabilité d'un événement donné A , on décompose cet événement en une *réunion d'événements incompatibles deux à deux*, dont on connaît la probabilité individuelle :

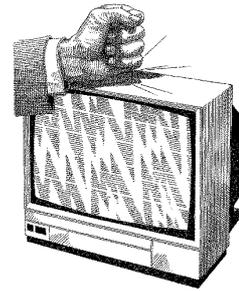


$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

exercice III.1 : Trois personnes A , B et C participent à une course et personne d'autre. A et B ont la même probabilité de gagner, et chacun d'eux a deux fois plus de chance de gagner que C . Calculer la probabilité pour que B ou C gagne. (On sait que A ou B ou C gagne.)

exemple : Fabrication de téléviseurs.

On considère une chaîne de fabrication de téléviseurs. A la sortie, chaque téléviseur subit une vérification du tube cathodique (*TC*) et du haut parleur (*HP*). Les statistiques montrent que :



- le *TC* fonctionne avec une probabilité de 0,81.
- le *HP* fonctionne avec une probabilité de 0,75.
- le *TC* et le *HP* fonctionnent simultanément avec une probabilité de 0,66.

Déterminer la probabilité que :

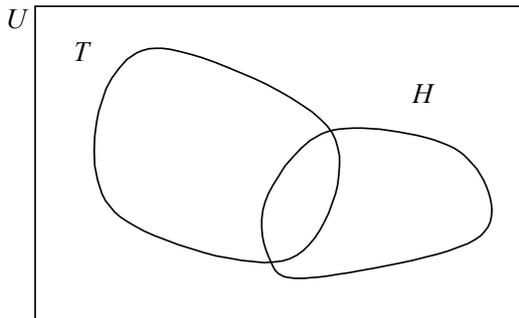
- a) le *TC* fonctionne seul.
- b) le *HP* ne fonctionne pas.
- c) seul l'un des deux éléments fonctionne.
- d) aucun des deux éléments ne fonctionne.
- e) le téléviseur ne fonctionne pas.

solution :

On notera : $T = \ll \text{le } TC \text{ fonctionne} \gg$
 $H = \ll \text{le } HP \text{ fonctionne} \gg$

D'après l'énoncé :

$$P(T) = \mathbf{0,81} \quad P(H) = \mathbf{0,75} \quad P(T \cap H) = \mathbf{0,66}$$



	<i>T</i>	\bar{T}	
<i>H</i>	0,66		0,75
\bar{H}			
	0,81		1,00

Les données sont en gras, le reste se déduit grâce aux propriétés des probabilités :

- a) $P(\text{seul } TC \text{ fonctionne}) =$
- b) $P(\text{le } HP \text{ ne fonctionne pas}) =$
- c) $P(\text{seul } TC \text{ ou } HP \text{ fonctionne}) =$
- d) $P(\text{ni } TC \text{ ni } HP \text{ fonctionne}) =$
- e) $P(\text{le téléviseur ne marche pas}) =$

IV. Evénements équiprobables

définition : Soit $U = \{i_1; i_2; \dots; i_n\}$ un univers contenant n issues possibles. Les événements élémentaires $I_1 = \{i_1\}$, $I_2 = \{i_2\}$, ..., $I_n = \{i_n\}$ sont dits **équiprobables** s'ils ont la même probabilité, c.-à-d. si $P(I_1) = P(I_2) = \dots = P(I_n)$.

On en déduit :

théorème : Si I_1, I_2, \dots, I_n sont n événements élémentaires équiprobables tels que $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n = U$, alors $P(I_k) = \frac{1}{n}$, pour $1 \leq k \leq n$.

en effet :

$$\begin{aligned} U &= I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n \\ \Rightarrow P(U) &= P(I_1) + P(I_2) + \dots + P(I_n) \\ \Rightarrow 1 &= n P(I_k) \quad \Rightarrow \quad P(I_k) = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

exemples :

- obtention d'une face donnée lors d'un jet de dé (non pipé).
- sortie d'un numéro (de 0 à 36) à la roulette d'un casino.
- tirage au sort d'une question d'oral de maturité.



conséquence : Si A est un événement de U formé par la réunion de k événements élémentaires équiprobables, alors $P(A) = \frac{k}{n}$.

autrement dit :

$$P(A) = \frac{\text{nombre total de cas favorables}}{\text{nombre total de cas possibles}}$$

remarque : Pendant longtemps, cette formule a été utilisée comme définition de la probabilité :

exemple : On jette un dé une seule fois. Soit $U = \{1; 2; \dots; 6\}$. Si le dé est régulier, on peut admettre que les six événements élémentaires $\{1\}, \{2\}, \dots, \{6\}$ sont équiprobables, c'est à dire que

$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$. Clairement l'événement $A = \{2; 4; 6\}$ a pour probabilité

$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, et l'événement $B = \{1; 5\}$ a pour probabilité $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

V. Probabilités conditionnelles

situation : Soient A et B deux événements d'un même univers U , avec $P(B) \neq 0$.

On s'intéresse à la probabilité que A se réalise, sachant que B s'est réalisé.

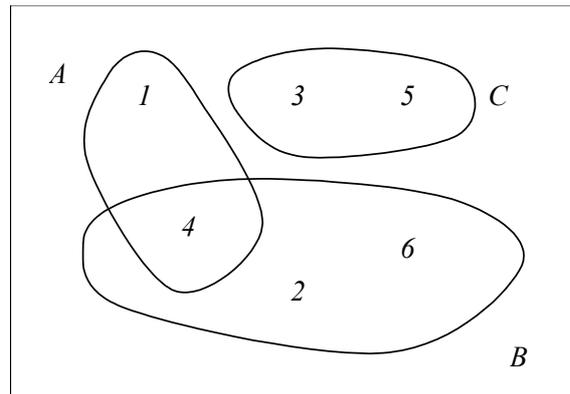
Cette probabilité est notée $P(A|B)$, et se lit « probabilité de A sachant B ».

exemple : On lance un dé. On a l'univers $U = \{1; 2; \dots; 6\}$, avec six événements élémentaires équiprobables. On considère les événements :

$$A = \{1; 4\}$$

$$B = \{2; 4; 6\}$$

$$C = \{3; 5\}$$



Supposons que le dé a été lancé, et que l'on nous dise que B s'est réalisé (c.-à-d. un nombre pair est sorti). L'univers des issues possibles est réduit à cet ensemble B .

Calcul de $P(A|B)$: la réalisation de A , sachant que B s'est produit.

La probabilité cherchée est de $P(A|B) = \frac{1}{3}$.

$$\text{on remarque que } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

Calcul de $P(C|B)$: pour la réalisation de C , il faut obtenir soit 3, soit 5, sachant qu'un nombre pair est sorti : il faut que l'ensemble $C \cap B = \emptyset$ se réalise, mais naturellement $P(C \cap B) = 0$.

$$\text{on remarque que } P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{1/2} = 0.$$

définition : Soient A et B deux événements d'un même univers U . On appelle "**probabilité conditionnelle de A sachant B** ", la probabilité que A se réalise, sachant que B s'est réalisé. Cette probabilité est définie par :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{définie seulement si } P(B) \neq 0$$

$$\text{cas particuliers : } P(A|A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = 1 \quad \text{et} \quad P(A|U) = \frac{P(A \cap U)}{P(U)} = P(A)$$

exercice V.1 : On lance une paire de dés (non pipés). Sachant que la somme est égale à 6, calculer la probabilité pour que l'un des deux dés ait donné 2.

exercice V.2 : Sur 100'000 garçons qui naissent, 89'620 sont encore en vie à 50 ans et 59'390 à 70 ans. Quelle probabilité un homme de 50 ans a-t-il d'être encore en vie à 70 ans ?

exemple : On effectue une enquête auprès de 250 salariés d'une entreprise comprenant 50 cadres et 200 employés, pour savoir s'ils sont favorables ou non à la journée continue. Le dépouillement indique que 30 cadres et 80 employés sont favorables, tous les autres étant contre.

Déterminer la probabilité pour que la première carte tirée de la boîte de réponses soit celle :

- a) d'une personne favorable.
- b) d'un cadre.
- c) d'une personne favorable si cette carte est celle d'un cadre.
- d) d'un cadre si cette carte est celle d'une personne favorable.

VI. Diagramme en arbre

Lorsqu'il est possible de schématiser une expérience aléatoire sous la forme d'un arbre dont les branches représentent les différentes possibilités, il est alors beaucoup plus aisé de calculer les probabilités liées à cette expérience.

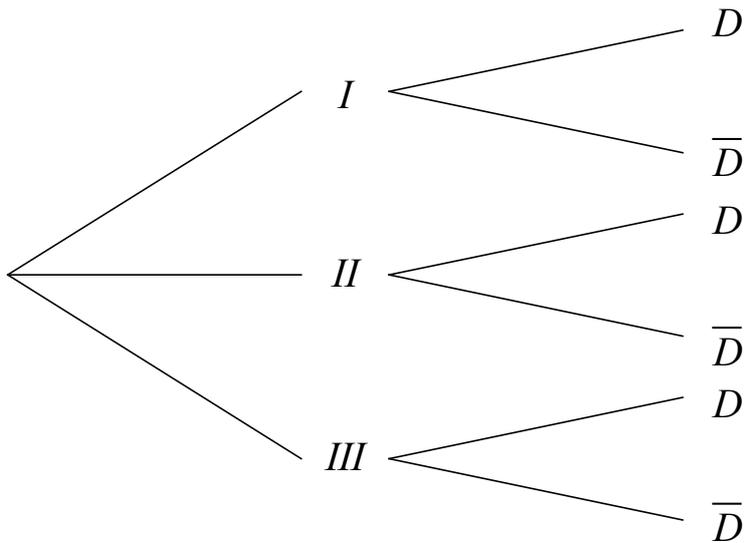
exemple : Soient 3 boîtes telles que :

la boîte	<i>I</i>	contient	10	ampoules dont	4	sont défectueuses.
la boîte	<i>II</i>	contient	6	ampoules dont	1	est défectueuse.
la boîte	<i>III</i>	contient	8	ampoules dont	3	sont défectueuses.
total			24	ampoules dont	8	sont défectueuses.

On choisit une boîte au hasard puis l'on extrait une ampoule. Calculer la probabilité :

- 1) que cette ampoule soit défectueuse.
- 2) que cette ampoule provienne de la boîte *II* sachant qu'elle est défectueuse.
- 3) que cette ampoule ne provienne pas de la boîte *II* sachant qu'elle n'est pas défectueuse.

solution : Un diagramme en arbre permet de décrire le processus et donne la probabilité de chaque branche de l'arbre :



1) $P(D) =$

2) $P(II|D) =$

3) $P(I \cup III | \bar{D}) =$

Complément :

	I	II	III	total
<i>D</i>				
\bar{D}				
total				

lemme : (Un "lemme" est un petit théorème très utile dans la démonstration d'autres théorèmes.)

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \quad \text{On a par extension : } P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B).$$

Démonstration

Par définition : $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, donc le résultat s'obtient en multipliant le tout par $P(B)$ CQFD.

exercice VI.1: Au fond d'un corridor se trouvent deux portes, une or, une mauve. Derrière la porte de couleur or, il fait beau quatre fois sur cinq, tandis que derrière la porte de couleur mauve, il fait beau trois fois sur dix. Les méandres du corridor font que lorsque qu'une personne arrive au fond de ce corridor, elle choisisse deux fois sur trois la première porte. Calculer la probabilité :

- 1) qu'il fasse beau.
- 2) sachant qu'il fait beau, que cela soit la porte mauve qui ait été choisie.
- 3) sachant qu'il ne fait pas beau, que cela soit la porte or qui ait été choisie.

exercice VI.2: Une urne contient une boule blanche, deux boules rouges et trois boules noires.

On tire deux boules. Quelle est la probabilité d'en avoir :

- i) une rouge et une noire ?
- ii) deux de couleurs différentes ?
- iii) une rouge et une noire, sachant que les boules tirées sont de couleurs différentes ?

VII. Événements indépendants

définition : Deux événements A et B d'un univers U sont dits **indépendants** si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

remarque : Cette définition traduit bien le fait que la réalisation de l'un des deux événements n'influence pas la réalisation de l'autre :

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

exemple : On jette une pièce de monnaie deux fois de suite, et on considère les événements :

A = « face apparaît au premier jet ».

B = « pile apparaît au second jet ».

C = « le même côté sort deux fois ».

D = « le nombre de faces est strictement inférieur à deux ».

a) les événements A et B sont-ils indépendants ?

b) même question avec les événements C et D .

solution : L'univers est $U = \{ PP; PF; FP; FF \}$, et clairement nous avons :

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(D) = \frac{3}{4}$$

a) $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$. Donc A et B sont indépendants.

b) $P(C \cap D) = \frac{1}{4} \neq P(C) \cdot P(D)$. Donc C et D ne sont pas indépendants.

exercice VII.1 : On dispose d'un jeu de 52 cartes.

Les événements « tirer un as » et « tirer un coeur » sont-ils indépendants ?

	A	\bar{A}	
B			
\bar{B}			
	C	\bar{C}	
D			
\bar{D}			

exercice VII.2 : On jette 3 fois une pièce de monnaie équilibrée. Soient les événements :

A = « face apparaît au premier jet ».

B = « face apparaît au deuxième jet ».

C = « la séquence FP apparaît dans cet ordre ».

Les événements A et B sont-ils indépendants ? Même question pour A et C , puis B et C .

propriétés : Montrez que si deux événements A et B sont indépendants, alors :

- i) A et \bar{B} sont indépendants
- ii) \bar{A} et B sont indépendants
- iii) \bar{A} et \bar{B} sont indépendants

exercice VII.3 : On lance un dé noir et un dé rouge. Soient les événements :

A = "le dé noir donne un résultat pair"

B = "le dé rouge donne un résultat pair"

C = "la somme des résultats des deux dés est impaire"

Montrez que C est indépendant de A et que C est indépendant de B .

Et pourtant, montrez que C est dépendant de $A \cap B$. (De même C est dépendant de $A \cup B$.)

challenge :

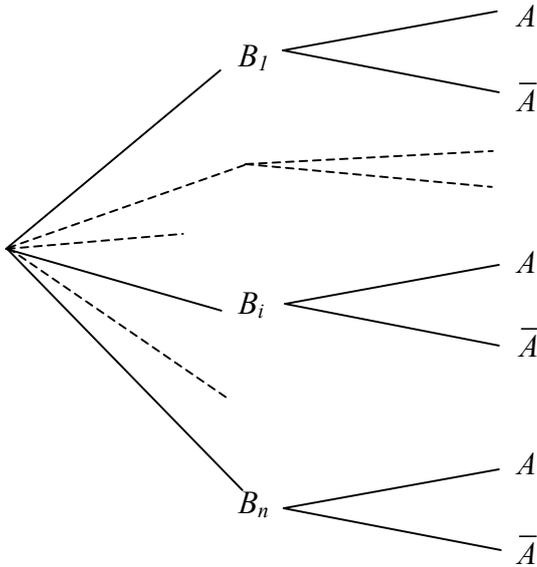
Saurez-vous montrer de façon générale que si C est indépendant de A , de B et de $A \cap B$, alors C est aussi indépendant de $A \cup B$?

VIII. Théorème de Bayes sur la probabilité des causes

Soit A un événement de l'univers U et B_1, B_2, \dots, B_n des événements incompatibles deux à deux dont la réunion donne U et tels que $P(B_i) \neq 0$ pour $i = 1, \dots, n$. On a

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A | B_i)}{P(B_1) \cdot P(A | B_1) + P(B_2) \cdot P(A | B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A | B_n)}$$

Démonstration :



Rappelons notre petit lemme :

$$P(A \cap B_i) = P(B_i) \cdot P(A | B_i) \quad \text{car} \quad P(A | B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(B_i)}$$

donc, par définition et en utilisant le lemme :

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P(A | B_i)}{P(A)}$$

Le numérateur est déjà obtenu, mais il faut encore transformer le dénominateur $P(A)$ en s'appuyant sur un schéma montrant que tous les B_i sont des événements incompatibles dont la réunion donne l'univers U .

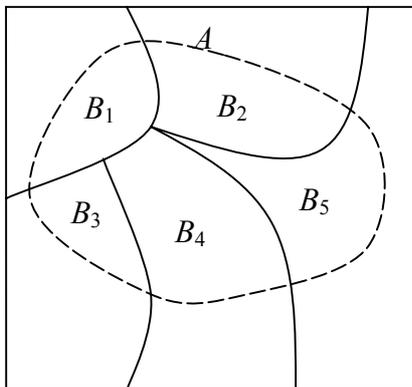
$$A = A \cap U = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) \Rightarrow$$

par distributivité ou en observant le schéma :

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$$

Et, compte tenu du fait que tous les événements $(A \cap B_i)$ sont disjoints et de l'axiome III ou du théorème 7 de la théorie :

$$\begin{aligned} P(A) &= P[(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)] = \\ &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n) = \\ &= P(B_1) \cdot P(A | B_1) + P(B_2) \cdot P(A | B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A | B_n) \end{aligned}$$



ici, $n = 5$

Et finalement :

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A | B_i)}{P(B_1) \cdot P(A | B_1) + P(B_2) \cdot P(A | B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A | B_n)}$$

Exemple :

Dans une salle de fête, il y a 80% d'enfants et 20% d'adultes. 18% des enfants aiment le café et 84% des adultes aiment le café.

Sachant qu'une personne aime le café, quelle est la probabilité que ce soit un enfant ?

Notons : B_1 = "être un enfant" ; B_2 = "être un adulte" ; A = "aimer le café".

On sait que : $P(B_1) = 0,80$; $P(B_2) = 0,20$; $P(A | B_1) = 0,18$; $P(A | B_2) = 0,84$. On cherche $P(B_1 | A)$.

$$P(B_1 | A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A | B_1)}{P(B_1) \cdot P(A | B_1) + P(B_2) \cdot P(A | B_2)} = \frac{0,80 \cdot 0,18}{0,80 \cdot 0,18 + 0,20 \cdot 0,84} = \frac{0,144}{0,312} \approx 0,462 = 46,2\%$$

IX. Variable aléatoire

Dans les applications des probabilités, en particulier à propos des jeux de hasard étudiés par Blaise Pascal et Pierre de Fermat, on s'intéresse à des variables comme le montant d'un gain ou d'une perte, dont les valeurs sont déterminées par le hasard.

définition : Soit U un univers fini muni d'une loi de probabilité.

On appelle **variable aléatoire discrète** toute fonction réelle X définie sur U : $X : U \rightarrow \mathbb{R}$

Dès lors, à chaque réel x on peut associer la probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur x :

exemple

On considère l'expérience qui consiste à lancer deux dés.

$$U = \{ (1;1); (1;2); \dots; (1;6); \dots; (2;1); (2;2); \dots; (6;6) \}$$

Définissons une variable aléatoire X par la fonction :

$$X : \{ (1;1); (1;2); (1;3); \dots; (6;6) \} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{donc } X(r;v) = r+v$$

$$(r;v) \quad \mapsto \quad r+v$$

On dit que la variable aléatoire X représente "*la somme des deux dés*".

L'ensemble des valeurs que cette variable aléatoire peut prendre est évidemment $\{ 2; 3; \dots; 12 \}$.

C'est l'ensemble des images de la fonction X .

Examinons de combien de façons chacune de ces valeurs peut être atteinte :

x_i	les cas favorables	total
2	(1;1)	1
3	(1;2) , (2;1)	2
4	(1;3) , (2;2) , (3;1)	3
5	(1;4) , (2;3) , (3;2) , (4;1)	4
6	(1;5) , (2;4) , (3;3) , (4;2) , (5;1)	5
7	(1;6) , (2;5) , (3;4) , (4;3) , (5;2) , (6;1)	6
8	(2;6) , (3;5) , (4;4) , (5;3) , (6;2)	5
9
10		
11		
12		

Valeurs à reporter dans le tableau des probabilités de X :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$P(X = x_i)$												

Ce tableau est aussi appelé : "**loi de probabilité**" ou "**distribution**" de la variable aléatoire X .

Notons encore que par exemple $X = 13$ est impossible pour l'expérience considérée et donc naturellement $P(X = 13) = 0$. On ne note les valeurs x_i que lorsque $P(X = x_i) \neq 0$.

Remarque :

Pour qu'un tableau de probabilités comme celui de la page précédente corresponde à une loi de probabilité, deux conditions doivent être satisfaites. Ecrivez ci-dessous ces deux conditions :

1)

2)

Probabilité que la variable aléatoire X soit comprise entre deux réels a et b :

Par exemple, dans le tableau, de la page précédente : $P(6 < X \leq 10) = \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} = \frac{18}{36}$

Mais ceci est équivalent à $P(6 < X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 6) =$

$$\left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} \right) - \left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} \right) = \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36}$$

On a la relation :

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

exercice IX.1 : Soit la distribution :

x	-3	-1	1	5	10
$P(X = x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

Calculez :

a) $P(X \leq -1)$

b) $P(X > -1)$

c) $P(-3 < X \leq 1)$

d) $P(-1 < X \leq 5)$

e) $P(-1 < X \leq 5 \mid X \geq -1)$

f) $P(X \leq 1 \mid X \geq -1)$

exercice IX.2 : On lance une pièce de monnaie 5 fois de suite. Soit X la variable aléatoire « nombre de faces obtenus ». Ecrire, sous forme de tableau, la loi de probabilité de X .

exercice IX.3 : On lance simultanément un dé et une pièce de monnaie. On considère la variable aléatoire X qui à chaque issue associe un nombre de la manière suivante : Si la pièce est tombée sur face on retient le chiffre indiqué par le dé, si la pièce est tombée sur pile alors on multiplie par 2 le chiffre indiqué par le dé. Etablir la loi de probabilité de X .

X. Espérance mathématique

Il est naturel, lors d'un pari, de vouloir estimer ses chances de réussite. Aussi bien la somme qu'il est possible de gagner que la probabilité du gain sont à prendre en considération.

activité : Un joueur a le choix entre deux loteries. La première loterie propose des billets à 10 F, et le joueur peut gagner 5'000 F une fois sur quatre cents. Par contre, s'il achète son billet à la deuxième loterie, ce dernier coûte 20 F, mais il peut rapporter 100'000 F avec une probabilité d'une chance sur dix mille. Voici, en résumé, la situation :
(Les billets n'étant jamais remboursés, que l'on soit gagnant ou perdant).

$X =$ "gain à la première loterie"

gain : x_i	-10	4'990
$p_i = P(X = x_i) :$	$\frac{399}{400}$	$\frac{1}{400}$

$Y =$ "gain à la deuxième loterie"

gain : y_i	-20	99'980
$p_i = P(Y = y_i) :$	$\frac{9'999}{10'000}$	$\frac{1}{10'000}$

En moyenne, combien gagnera-t-on ou perdra-t-on avec chacune des deux loteries ?

Quelle loterie choisir ?

fait : Les variables aléatoires que nous considérons ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs réelles x_1, x_2, \dots, x_n . De telles variables aléatoires s'appellent **discrètes**.

définition : L'**espérance mathématique** de la variable aléatoire X est définie par :

$$E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$$

définition : On dit qu'un jeu est **équitable** si son espérance mathématique est nulle.

liens entre statistiques et probabilités :

- 1) Tandis qu'*en calcul des probabilités* les valeurs de la variable sont multipliées par leurs probabilités respectives pour donner l'**espérance mathématique**, *en statistiques* elles sont multipliées par leurs fréquences respectives expérimentales pour donner **la moyenne**.
- 2) Si on observe un grand nombre de réalisations d'une variable aléatoire X , la moyenne des résultats obtenus sera proche de l'espérance mathématique $E(X)$.

Deux autres quantités peuvent être associées à une variable aléatoire.

définition : La **variance** d'une variable aléatoire X est définie par : $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot (x_i - E(X))^2$

définition : L'**écart-type** d'une variable aléatoire X est défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

La variance ne sert à rien d'autre que de calculer l'écart-type.

L'écart-type mesure "un écart moyen à la moyenne".

Il a l'avantage de posséder la même unité que la variable aléatoire X .

exercice X.1 : Pamela et Fabien se mettent d'accord pour faire le jeu suivant : il s'agit de lancer simultanément 4 pièces de monnaie. S'il n'y a que des piles ou que des faces, Fabien doit donner 5 F à Pamela. S'il y a autant de piles que de faces, c'est encore Pamela qui gagne, et Fabien doit lui donner 1 F. Dans tous les autres cas, Pamela doit donner 2 F à Fabien. A qui le jeu profite-t-il ?

exercice X.2 : Dans une urne il y a 1 boule rouge, 9 boules vertes et 90 boules noires.

Le jeu consiste à tirer une boule au hasard. Pour jouer, vous devez payer 3 F.

Si vous tirez la boule rouge, vous recevez 100 F, si vous tirez une boule verte, vous recevez 20 F, si vous tirez une boule noire vous ne recevez rien. Jouez-vous ?

XI. La loi binomiale

La loi binomiale est une des lois de probabilités les plus anciennes. Elle fut découverte par Jacques Bernoulli, et figure dans son ouvrage *Ars Conjectandi* consacré aux travaux de Huygens, aux dénombrements et aux jeux de hasard.



Jacques Bernoulli
(1654 – 1705)

Exemple d'une variable aléatoire binomiale

Il arrive fréquemment que l'on puisse ramener un problème à la situation suivante :

- On répète n fois une expérience qui n'a que deux issues possibles, appelées "Succès" et "échec" ;
- Les expériences sont indépendantes les unes des autres ;
- La probabilité p de Succès est la même à chaque expérience ;
- La variable aléatoire X représente le nombre de Succès.

En résumé :

$X =$ "Le nombre de Succès lorsqu'on répète n fois une expérience qui a probabilité p de Succès".
Les expériences étant indépendantes les unes des autres.

exemple :

L'expérience consiste à jouer à la roulette.

Les sorties possibles sont les nombres entiers entre 0 et 36, ce qui fait 37 sorties possibles, toutes équiprobables.

On joue sur le numéro 0.

La probabilité de Succès est donc : $p = 1 / 37$.

La probabilité d'échec est donc : $q =$ _____

On joue $n = 7$ fois.

$X =$ "le nombre de fois que l'on gagne".

Calculez : $P(X = 0)$ et $P(X = 7)$.

Les autres probabilités sont moins faciles à calculer.



Pour fixer les idées, calculons $P(X = 4)$.

$P(X = 4)$ = la somme des probabilités des séquences conduisant à la réalisation de $X = 4$.

Une manière d'obtenir exactement 4 Succès en 7 expérience est : $S ; \acute{e} ; S ; \acute{e} ; S ; S ; \acute{e}$.

Et la probabilité de cette séquence particulière est : $\frac{1}{37} \cdot \frac{36}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{36}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{36}{37} = \left(\frac{1}{37}\right)^4 \cdot \left(\frac{36}{37}\right)^3$

Une autre manière d'obtenir exactement 4 Succès est : $\acute{e} ; S ; S ; S ; \acute{e} ; \acute{e} ; S$.

La probabilité de cette autre séquence particulière est : $\frac{36}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{36}{37} \cdot \frac{36}{37} \cdot \frac{1}{37} = \left(\frac{1}{37}\right)^4 \cdot \left(\frac{36}{37}\right)^3$

Elle est la même que la précédente. Toute séquence conduisant à la réalisation de $X = 4$ Succès, a la même probabilité de se produire.

Il faut donc compter le nombre de séquences différentes qui mènent à $X = 4$ Succès.

Ce nombre est : $\overline{P(4;3)} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = C_4^7$

D'où : $P(X = 4) = C_4^7 \cdot \left(\frac{1}{37}\right)^4 \cdot \left(\frac{36}{37}\right)^3$

On imagine aisément la formule générale calculant la probabilité d'obtenir k Succès, lorsque l'expérience est répétée 7 fois en tout :

$$P(X = k) = C_k^7 \cdot \left(\frac{1}{37}\right)^k \cdot \left(\frac{36}{37}\right)^{7-k}$$

La ligne ci-dessus, pour k variant de 0 à 7 définit la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

exercice XI.1 : Justifiez intuitivement pourquoi en moyenne il y a $n \cdot p$ succès lorsqu'on répète n fois une expérience ayant p chances de succès.

Formalisation :

Soit une expérience ne comportant que deux issues, appelées « Succès » et « échec ».

Les expériences sont indépendantes les unes des autres.

Notons : $P(\text{succès}) = p$; $P(\text{échec}) = 1 - p$.

On répète n fois l'expérience, et l'on considère la variable aléatoire

$X =$ "le nombre de Succès obtenus durant ces n répétitions de l'expérience".

La loi suivie par cette variable aléatoire est appelée **loi binomiale**, ou encore **loi de Bernoulli**, notée :

$$B(n; p)$$

Si X suit la loi binomiale $B(n; p)$ alors nous avons :

$$P(X = k) = C_k^n \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \quad \text{avec} \quad C_k^n = \frac{n!}{(n - k)! \cdot k!} \quad \text{où} \quad 0 \leq k \leq n$$

Les valeurs de la **moyenne** et de l'**écart-type** sont données par les formules :

$$E(X) = n \cdot p \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

Une question classique

Reprenons l'exemple du jeu à la roulette. On se pose souvent la question :

"Combien de fois faut-il jouer (répéter l'expérience) pour avoir 90% de chances ou plus de gagner au moins une fois ?"

La question revient à déterminer n pour que $P(X \geq 1) \geq 90\%$.

On utilise : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$ et $P(X = 0) = (1 - p)^n$.

La question s'écrit donc : $1 - (1 - p)^n \geq 0,9$

Dans notre exemple, $p = \frac{1}{37}$, donc $1 - p = \frac{36}{37}$. Il faut déterminer n pour que $1 - \left(\frac{36}{37}\right)^n \geq 0,9$.

Donc $0,1 \geq \left(\frac{36}{37}\right)^n$.

Vous avez vu en 2^{ème} année comment résoudre ce genre d'équation, où l'inconnue se trouve comme exposant. A vous de terminer...

(la réponse est $n \geq 85$).