1) La variable aléatoire X = "nombre de lancers de la pièce". X varie entre 1 et 5.
Loi de probabilité :

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	1/2	1/4	1/8	1/16	1/16

La question revient à calculer la valeur moyenne de X, c'est-à-dire l'espérance de X.

$E(X) = 1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{16}+5\cdot\frac{1}{16} = 1{,}9375$.

On peut s'attendre à devoir lancer le dé 2 fois, en moyenne.

---

2) Notons X = "le gain de l'élève".
Ici, il n'y a que deux cas possibles.

$P(X = 1'000'000) = \frac{1}{2^{20}}=\frac{1}{1'048'576}$.

$P(X = -50) = 1-\frac{1}{2^{20}}=\frac{1'048'575}{1'048'576}$.

En moyenne, le gain de l'élève sera de : $E(X) = 1'000'000\cdot\frac{1}{2^{20}}-50\cdot\frac{1'048'575}{1'048'576}\approx-49{,}05$.

Donc en moyenne l'élève est nettement perdant, mais, lorsqu'il gagne, il gagne beaucoup, si le professeur tient parole, ce que je doute.

---

3) X = "nombre de fois qu'il a renversé la quille en n lancers". X varie entre 0 et n.
X suit une variable aléatoire binomiale $B(n\ ,\ p = 0{,}3)$

a) Ici, $n = 7$ et on désire calculer $P(X >= 4)$, qui vaut :
$P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) =$

$C_4^7\cdot0{,}3^4\cdot0{,}7^3+C_5^7\cdot0{,}3^5\cdot0{,}7^2+C_6^7\cdot0{,}3^6\cdot0{,}7^1+C_7^7\cdot0{,}3^7\cdot0{,}7^0\approx0{,}126036\approx12{,}6\,\%$

b) On cherche n tel que $P(X > 0) \geq 0{,}9$. On obtient donc l'équation :
$1 - P(X = 0) \geq 0{,}9$. Donc $1-0{,}7^n\geq0{,}9$

$0{,}7^n\leq0{,}1$; $n\cdot\log(0{,}7)\leq\log(0{,}1)$; $n\geq\frac{\log(0{,}1)}{\log(0{,}7)}\approx6{,}46$.

Il faut lancer la boule au moins 7 fois pour avoir plus de 90% de chances de renverser la quille au moins une fois.

---

4) Notons : D = "l'alarme se déclenche" et I = "il y a une intrusion".
L'énoncé nous dit que :
$P(D \mid I) = 0{,}99$; $P(D \mid \bar{I}) = 0{,}005$; $P(I) = \mathbf{0{,}000001}$. Donc $P(\bar{I}) = 0{,}999999$.
$P(D \cap I) = P(D \mid I) \cdot P(I) = 0{,}99 \cdot 10^{-6} = \mathbf{0{,}00000099}$;
$P(D \cap \bar{I}) = P(D \mid \bar{I}) \cdot P(\bar{I}) = 0{,}005 \cdot 0{,}999999 = \mathbf{0{,}004999995}$.
On peut remplir le tableau de probabilités :

	D	$\bar{D}$	
I	**0,000000990**	0,000000010	**0,000001**
$\bar{I}$	**0,004999995**	0,994999005	0,999999
	0,005000985	0,994999015	**1**

La probabilité que l'alarme se déclenche pour rien vaut :
$$P(\bar{I} \mid D) = \frac{P(\bar{I} \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}004999995}{0{,}005000985} \approx 0{,}9998 \text{ .}$$
Ce système d'alarme est beaucoup trop peu fiable pour être vraiment utile, car dans 99,98% des cas, il se déclenche pour rien et sonne une fausse alerte !
Il y a tellement peut d'intrusion dans ce magasin, qu'un système d'alarme ne sert à rien. Il coute probablement plus chère que les dégâts dus à l'intrusion.
Si le risque de 0,0001% signifie qu'il y a en moyenne une intrusion tous les millions de jours, le magasin est tranquille pour des années !

---

5) On supposera (bien sûr) que chaque billet acheté a la même probabilité d'être un billet gagnant.

a) Probabilité de gagner au moins un lot en achetant 12 billets =
1 – probabilité de n'acheter aucun billet gagnant =
1 – (nombre de cas où l'on a pas de billet gagnant / nombre d'achats possibles de 12 billets) =
$$1 - \frac{C_{12}^{98}}{C_{12}^{100}} \approx 1 - \frac{8{,}123256 \cdot 10^{14}}{10{,}50421 \cdot 10^{14}} \approx 0{,}2267 = 22{,}67\%$$

L'autre calcul possible, plus long, est de calculer :
la probabilité d'avoir un billet gagnant + la probabilité d'avoir 2 billets gagnants =
$$\frac{C_1^2 \cdot C_{11}^{98}}{C_{12}^{100}} + \frac{C_2^2 \cdot C_{10}^{98}}{C_{12}^{100}} \approx \frac{2 \cdot 1{,}120449 \cdot 10^{14}}{10{,}50421 \cdot 10^{14}} + \frac{1 \cdot 0{,}140056 \cdot 10^{14}}{10{,}50421 \cdot 10^{14}} \approx 0{,}2133 + 0{,}0133 \approx 0{,}2267 = 22{,}67\%$$

b) Si on prend n billets, la probabilité de gagner au moins un lot est de : $1 - \frac{C_n^{98}}{C_n^{100}}$.

In faut trouver n pour que cette probabilité dépasse 80%.
Une méthode autre que par tâtonnement me semble dépasser le niveau du collège.
Programmation du calcul dans "OP1" :
```
1 - ( 98  PRB nCr  2nd ANS ) ÷ (100  PRB nCr  2nd ANS) =
```
" 1 = OP1" donne : 0,02 Il est bon de vérifier sur des cas connus.
"12 = OP1" donne : 0,226666... Il est bon de vérifier sur des cas connus.
"98 = OP1" donne : 0,99979798...
"50 = OP1" donne : 0,7525...
"60 = OP1" donne : 0,8424...
"56 = OP1" donne : 0,80888888...
"55 = OP1" donne : 0,8
En achetant 55 billets, on a 80% de chance de gagner au moins un lot !

6) En lisant l'énoncé, une interprétation possible est que 11% des ampoules provenant de la première usine sont défectueuse, 6% des ampoules provenant de la deuxième usine sont défectueuses et 2% des ampoules provenant de la troisième usine sont défectueuses.

--------------------- Avec l'interprétation ci-dessus, on peut résoudre l'exercice -------------------

Notons : U_i = "l'ampoule vient de l'usine i", $i = 1, 2$ ou 3 et D = "Ampoule défectueuse".
L'énoncé nous dit que :
$P(U_1) = \mathbf{0{,}53}$; $P(U_2) = \mathbf{0{,}31}$; $P(U_3) = 1 - 0{,}53 - 0{,}31 = \mathbf{0{,}16}$;
$P(D \mid U_1) = 0{,}11$; $P(D \mid U_2) = 0{,}06$; $P(D \mid U_3) = 0{,}02$.
$P(D \cap U_1) = 0{,}53 \cdot 0{,}11 = \mathbf{0{,}0583}$; $P(D \cap U_2) = 0{,}31 \cdot 0{,}06 = \mathbf{0{,}0186}$;
$P(D \cap U_3) = 0{,}16 \cdot 0{,}02 = \mathbf{0{,}0032}$.

On peut remplir le tableau de probabilités :

	U_1	U_2	U_3	
D	**0,0583**	**0,0186**	**0,0032**	0,0801
$\bar{D}$	0,4717	0,2914	0,1568	0,9199
	0,53	**0,31**	**0,16**	**1**

La probabilité que l'ampoule défectueuse provienne de la nouvelle usine vaut :
$$P(U_3 \mid D) = \frac{P(U_3 \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}0032}{0{,}0801} \approx 0{,}03995 \ .$$
Il n'y a que 4% de chances que cette ampoule défectueuse provienne de la nouvelle usine !

Si elle n'était pas défectueuse, la probabilité qu'elle provienne de la nouvelle usine serait de :
$$P(U_3 \mid \bar{D}) = \frac{P(U_3 \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{0{,}1568}{0{,}9199} \approx 0{,}17045 \approx 17\,\% \ .$$