1) Loi de probabilité :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,1	0,2	0,4	0,15	0,15

Vérification :
$P(X = x_i) > 0$ et $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}15 + 0{,}15 = 1$

1.1) $P(1 \le X \le 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}15 = 0{,}75$

1.2) $P(X \ge 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 0{,}4 + 0{,}15 + 0{,}15 = 0{,}7$

1.3) $P(X = 4 \mid X \ge 2) = \dfrac{P(X=4)}{P(X \ge 2)} = \dfrac{0{,}15}{0{,}7} = \dfrac{15}{70} = \dfrac{3}{14} \approx 21{,}43\%$

1.4) $P(X = 2 \mid X \ne 4) = \dfrac{P(X=2)}{P(X \ne 4)} = \dfrac{0{,}4}{1-0{,}15} = \dfrac{0{,}4}{0{,}85} = \dfrac{40}{85} = \dfrac{8}{17} \approx 47{,}06\%$

E(X) = 0,1 · 0 + 0,2 · 1 + 0,4 · 2 + 0,15 · 3 + 0,15 · 4 = 2,05 = valeur moyenne de X.
Var(X) = 0,1 · $(0 - 2{,}05)^2$ + 0,2 · $(1 - 2{,}05)^2$ + 0,4 · $(2 - 2{,}05)^2$ + 0,15 · $(3 - 2{,}05)^2$ + 0,15 · $(4 - 2{,}05)^2$ =
Var(X) = 1,3475 ; écart-type = σ(X) = racine carrée de Var(X) ≈ 1,1608

---

2) Vous avez 2 chances sur 2^5 de gagner, soit 1 chance sur 16 de gagner 30 F.
En moyenne vous gagnez $\dfrac{30}{16}$ F par partie.
Vous avez $2^5 - 2$ chances sur 2^5 de perdre, soit 15 chances sur 16 de perdre 2 F.
En moyenne vous perdez $\dfrac{15}{16} \cdot 2 = \dfrac{30}{16}$ F par partie.
Le jeu est équilibré, en moyenne, vous gagnez autant que vous perdez. Le jeu est honnête.

2) Autre corrigé, plus formel. X = "Votre gain en une partie."

$\text{Card}(U) = 2^5$

P(FFFFF) = $\dfrac{1}{32}$

P(PPPPP) = $\dfrac{1}{32}$

P(mix de F et P) = $1 - \dfrac{2}{32} = \dfrac{30}{32} = \dfrac{15}{16}$

Loi de probabilité :

x_i	30	−2
$P(X = x_i)$	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{15}{16}$

$E(X) = 30 \cdot \dfrac{1}{16} + (-2) \cdot \dfrac{15}{16} = 0$

En moyenne, le gain potentiel et la perte potentielle sont égaux. Le jeu est équilibré.

---

3) Vous avez 1 chance sur 2^{14} de gagner, soit 1 chance sur 16'384 de gagner mille de francs.
Vous avez $2^{14} - 1$ chances sur 2^{14} de perdre, soit 16'383 chance sur 16'384 de perdre 1 franc.
En moyenne vous gagnez $\dfrac{1'000}{16'384} \approx 0{,}061035$ francs par partie.
En moyenne vous perdez $\dfrac{16'383}{16'384} \cdot 1 \approx 1$ franc par partie.
En moyenne vous êtes perdant, mais vous perdez peu, tandis que quand vous gagnez, c'est beaucoup.
Beaucoup de jeux de hasard sont basés sur ce principe.

En page suivante se trouve un autre corrigé, plus formel.

3) P(gain de mille francs) = $\frac{1}{2^{14}} = \frac{1}{16'384}$

P(perte de 1 franc) = $1 - \frac{1}{2^{14}} = 1 - \frac{1}{16'384} = \frac{16'383}{16'384}$

$$E(X) = 1'000 \cdot \frac{1}{16'384} + (-1) \cdot \frac{16'383}{16'384} = -\frac{15'383}{16'384} \approx -0,9389$$

X = "votre gain en une partie"
Loi de probabilité :

x_i	1'000	-1
P$(X = x_i)$	$\frac{1}{16'384}$	$\frac{16'383}{16'384}$

En moyenne vous êtes perdant, mais vous perdez peu, tandis que si vous gagnez, le gain est élevé. Beaucoup de jeux de hasard sont basés sur ce principe.

---

4) Par jeu l'élève dépense 30 francs !
Notons : X = "Gain de l'élève en une partie". Sans tenir compte de la taxe de participation.
Loi de probabilité :

x_i	2	4	8	16	32	...	2^{27}	2^{28}	2^{29}
P$(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	...	$\frac{1}{2^{27}}$	$\frac{1}{2^{28}}$	$\frac{2}{2^{29}}$

4.1) A partir de 4 faces de suites, l'élève gagne 32 francs, soit plus que sa taxe de participation
4.2) L'élève est gagnant lorsque $X \geq 32$. La probabilité qu'il soit gagnant vaut :
P($X \geq 32$) = 1 − P($X < 32$) = 1 − (1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16) = 1/16
L'élève n'est gagnant que une fois sur 16, mais le gain potentiel est énorme !

Calculons combien l'élève gagne en moyenne par jeu.
Gain moyenne =

$$E(X) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 8 + \frac{1}{16} \cdot 16 + ... + \frac{1}{2^{27}} \cdot 2^{27} + \frac{1}{2^{28}} \cdot 2^{28} + \frac{2}{2^{29}} \cdot 2^{29} = \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{28 \text{ fois}} + 2 = 30 .$$

Le gain moyen est égale à la dépense, donc le jeux est théoriquement équilibré.
4.3) Le jeu est théoriquement équilibré et le gain potentielle est énorme.
Théoriquement, l'élève reçoit du professeur autant que sa taxe de participation.
Question : le professeur est-il solvable ? Probablement pas !

---

5) Loi de probabilité de la variable aléatoire X = "nombre de pile obtenu lors de 5 jets d'une pièce".
Il n'y a qu'une chance sur 32 (=2^5) de n'obtenir aucun pile.
Il y a une chance sur 32 d'obtenir la suite : PFFFF.
Mais on peut obtenir un seul P de 4 autres façons : FPFFF ; FFPFF ; FFFPF ; FFFFP.
Donc il y a 5 chances sur 32 d'obtenir exactement 1 P.
Il y a une chance sur 32 d'obtenir la suite : PPFFF.
Mais on peut obtenir exactement deux P de 9 autres façons :
PFPFF ; PFFPF ; PFFFP ; FPPFF ; FPFPF ; FPFFP ; FFPPF ; FFPFP ; FFFPP.
Donc il y a 10 chances sur 32 d'obtenir exactement 2 P.
Par symétrie, il y a 10 chances sur 32 d'obtenir exactement 2 F, soit 3 P.
Par symétrie, il y a 5 chances sur 32 d'obtenir exactement 1 F, soit 4 P.
Par symétrie, il y a 1 chance sur 32 d'obtenir exactement 0 F, soit 5 P.

Si on a déjà vu le chapitre sur la loi Binomiale, on se rend compte que X suit une loi Binomiale $B\left(5; \frac{1}{2}\right)$. Donc $P(X = k) = \frac{5!}{k! \cdot (5-k)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{1-k} = \frac{5!}{k! \cdot (5-k)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$
On retrouve les probabilités calculées juste avant.

Suite en page suivante ...

Loi de probabilité :

x_i	0	1	2	3	4	5
$P\left(X = x_i\right)$	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

Espérance mathématique de X :
E(X) = 0 · 1/32 + 1 · 5/32 + 2 · 10/32 + 3 · 10/32 + 4 · 5/32 + 5 · 1/32 = 80 / 32 = 2,5

Ce résultat était attendu. Par symétrie, la moitié des lancés tombe sur pile, donc E(X) = 2,5.

Variance de X :
$V(X) = (0 - 2{,}5)^2 \cdot 1/32 + (1 - 2{,}5)^2 \cdot 5/32 + (2 - 2{,}5)^2 \cdot 10/32 + (3 - 2{,}5)^2 \cdot 10/32 + (4 - 2{,}5)^2 \cdot 5/32 + (5 - 2{,}5)^2 \cdot 1/32$
V(X) = 40 / 32 = 1,25

Ecart type de X : $\sigma(X) = \sqrt{1{,}25} \approx 1{,}118$