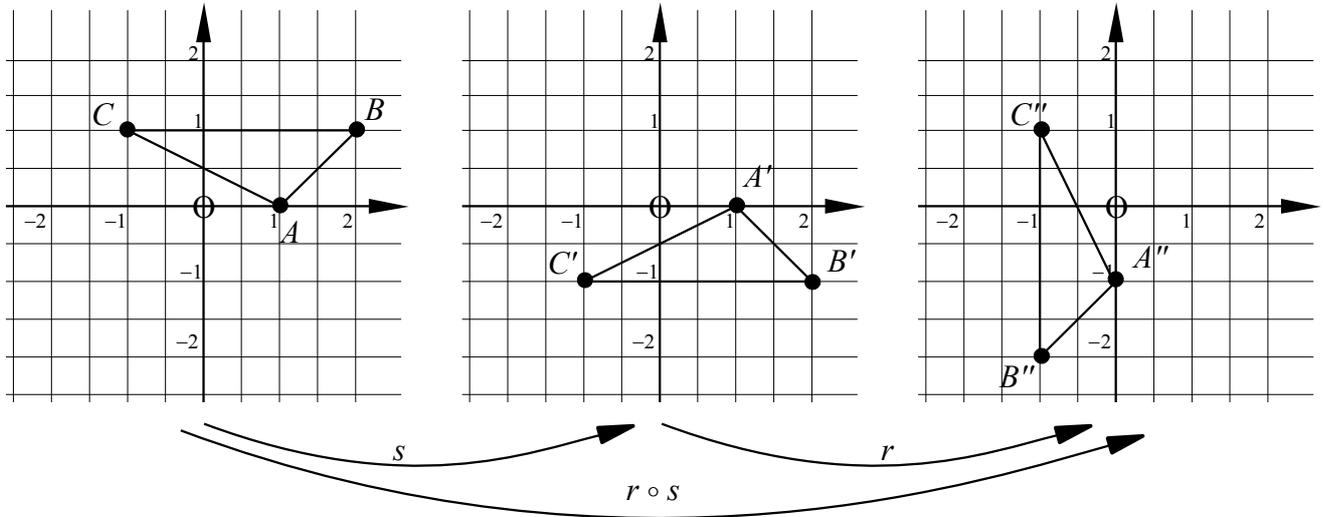


1.1

$$M(r) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; M(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; M(r \circ s) = M(r) \cdot M(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2



1.3 L'image du triangle ABC par $r \circ s$ est égale au triangle du repère de droite, car l'image par $r \circ s$ est égale à l'image par r de l'image par s .

1.4 $M(s \circ r) = M(s) \cdot M(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

La matrice obtenue est différente de celle de $M(r \circ s)$, donc les transformations $r \circ s$ et $s \circ r$ ne sont pas identiques. $r \circ s$ est une symétrie orthogonale d'axe $y = -x$.

$s \circ r$ est une symétrie orthogonale d'axe $y = x$, \vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont échangés par $s \circ r$.

2.1 $M(r_{30}) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, M(r_{60}) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2.2 $M(r_{30}) \cdot M(r_{60}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

2.3 $M(r_{30}) \cdot M(r_{60})$ donne exactement la même matrice, car les rotations dans \mathbb{R}^2 sont commutatives.

2.4 $M(r_{90})$ est égale à la matrice obtenue ci-dessus, car une rotation de 90° correspond à effectuer une rotation de 60° suivit d'une rotation de 30° .

3.1 $M(r_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$; $M(r_\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$

3.2 $M(r_\alpha \circ r_\beta) = M(r_\alpha) \cdot M(r_\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} =$
 $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) & -\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \\ \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) & -\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \end{pmatrix} =$
 $\begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$.

Les formules d'addition d'angles des fonctions trigonométriques ont été utilisées dans la dernière égalité. On retrouve comme attendu la matrice d'une rotation d'angle $\alpha + \beta$.

4.1 $f(\langle x ; y \rangle) = \langle 0,5x ; 2y \rangle$, donc $M(f) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (la matrice n'est pas nécessaire).

La droite D d'équation $y=1+x$ passe par les points $A=\langle 0 ; 1 \rangle$ et $B=\langle 1 ; 2 \rangle$.

Les images par f de ces points sont : $A'=\langle 0 ; 2 \rangle$ et $B'=\langle 0,5 ; 4 \rangle$.

La pente de D' égale $\frac{4-2}{0,5-0} = 4$, l'ordonnée à l'origine est donnée par A' .

Donc l'équation de D' est $y=2+4x$.

4.2 Les images par f de A' et B' sont : $A''=\langle 0 ; 4 \rangle$ et $B''=\langle 0,25 ; 8 \rangle$.

La pente de D'' égale $\frac{8-4}{0,25-0} = 16$, l'ordonnée à l'origine est donnée par A'' .

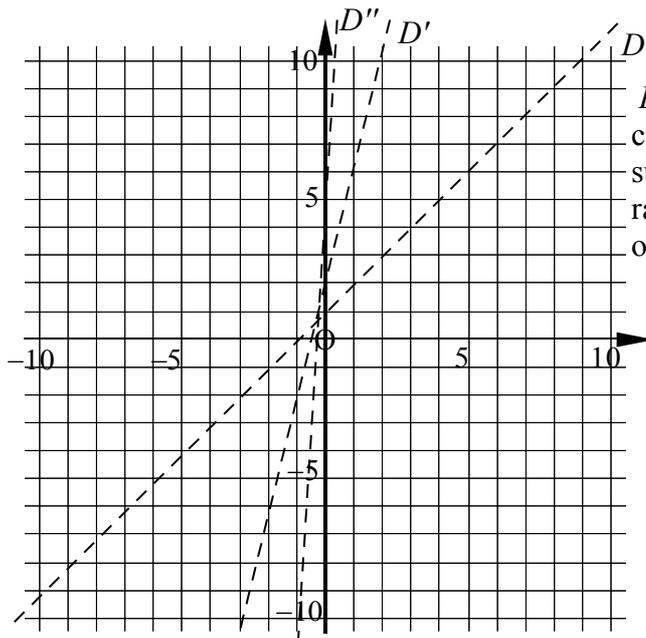
Donc l'équation de D'' est $y=4+16x$.

4.3 Les images par f de A'' et B'' sont : $A'''=\langle 0 ; 8 \rangle$ et $B'''=\langle 1/8 ; 16 \rangle$.

La pente de D''' égale $\frac{16-8}{1/8-0} = 64$, l'ordonnée à l'origine est donnée par A''' .

Donc l'équation de D''' est $y=8+64x$.

4.4 En continuant ainsi, on remarque que l'ensemble des droites obtenues sont exactement toutes celles qui s'écrivent sous la forme : $y=2^n+4^n x$ pour $n \in \mathbb{N}$.



D''' et les autres droites, sont presque confondues avec l'axe des ordonnées, sur ce graphique. Les droites se rapprochent de plus en plus de l'axe des ordonnées.

5.1 $M(f \circ g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, donc

$(f \circ g)\langle x ; y \rangle = \sqrt{2} \cdot \langle x - y ; x + y \rangle$.

5.2 f correspond à une rotation de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre (inverse du sens trigo).

$M(g) = 2 \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$, qui correspond à une homothétie d'un facteur 2 composé avec une rotation de $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ dans le sens trigonométrique, l'ordre des deux transformations étant sans importance.

$f \circ g$ correspond à une homothétie d'un facteur 2 composé avec une rotation de 45° dans le sens trigonométrique, l'ordre des deux transformations étant sans importance. Ce résultat est normale, car il correspond à tout augmenter d'un facteur 2, puis à tourner de 135° puis à tourner de -90° .

6.1 $M(S_{60}) = \begin{pmatrix} \cos(2 \cdot 60^\circ) & \sin(2 \cdot 60^\circ) \\ \sin(2 \cdot 60^\circ) & -\cos(2 \cdot 60^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $M(S_{90}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$M(r_{-60}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est similaire de la matrice calculée dans l'exercice 2.1.

6.2 $M(r_{-60} \circ S_{90}) = M(r_{-60}) \cdot M(S_{90}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Cette matrice est bien égale à $M(S_{60})$, ce qui montre que $R_{-60} \circ S_{90} = S_{60}$.

Ceci montre donc qu'effectuer une symétrie orthogonale d'axe C_2 , suivit d'une rotation de 60° dans le sens des aiguilles d'une montre correspond à faire une symétrie orthogonale d'axe formant un angle de 60° avec l'horizontale et de pente positive. L'ordre de la composition a de l'importance !

7. $M(f) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ qui est égal à deux fois une matrice de rotation de 30° dans

le sens trigonométrique, autour de l'origine. f est donc la composée d'une homothétie H_λ de rapport $\lambda = 2$ avec une rotation R_α d'angle $\alpha = 30^\circ$.

En résumé $f = R_\alpha \circ H_\lambda$, $\lambda = 2$ et $\alpha = 30^\circ$.

Remarquez que $f = H_\lambda \circ R_\alpha$, l'ordre de la composition n'est pas important **ici**.