Exercice 1

On considère le triangle de sommets $A = \langle 1\ ;\ 0 \rangle$; $B = \langle 2\ ;\ 1 \rangle$; $C = \langle -1\ ;\ 1 \rangle$, ainsi que les transformations linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

r = la rotation autour de l'origine d'un angle de $\dfrac{\pi}{2}$ dans le sens des aiguilles d'une montre ;

s = la symétrie axiale d'axe C_1.

1.1 Ecrivez les matrices $M(r)$, $M(s)$ et $M(r \circ s)$.

1.2 Dessinez trois repères, l'un à côté de l'autre.
Dans celui de gauche, dessinez le triangle ABC, dans celui du milieu dessinez l'image du triangle ABC par la transformation s et dans celui de droite dessinez l'image par la transformation r du triangle obtenu dans le repère du milieu.

1.3 Sans calculs, dessinez également l'image du triangle ABC par la transformation $r \circ s$.

1.4 Les transformations $r \circ s$ et $s \circ r$ sont-elles identiques ?

Exercice 2

On considère les transformations linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

r_{30} = la rotation autour de l'origine d'un angle de $\dfrac{\pi}{6}$ dans le sens trigonométrique ;

r_{60} = la rotation autour de l'origine d'un angle de $\dfrac{\pi}{3}$ dans le sens trigonométrique ;

r_{90} = la rotation autour de l'origine d'un angle de $\dfrac{\pi}{2}$ dans le sens trigonométrique.

2.1 Ecrivez les matrices $M(r_{30})$ et $M(r_{60})$.

2.2 Effectuez le produit matriciel $M(r_{30}) \cdot M(r_{60})$.

2.3 Sans calculs, par réflexions, écrivez le résultat du produit matriciel $M(r_{60}) \cdot M(r_{30})$.

2.4 En utilisant ce qui précède, écrivez la matrice $M(r_{90})$.

Exercice 3

Généralisation de l'exercice précédent.

On considère les transformations linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

r_α = la rotation autour de l'origine d'un angle de α dans le sens trigonométrique, pour tout angle α.

3.1 Ecrivez les matrices $M(r_\alpha)$ et $M(r_\beta)$, puis effectuez le produit matriciel $M(r_\alpha) \cdot M(r_\beta)$.

3.2 La matrice obtenue par le produit matriciel ci-dessus est-elle égale à la matrice $M(r_{\alpha+\beta})$?

Exercice 4

4.1 Soit $f\left(\langle x\ ;\ y \rangle\right) = \langle 0{,}5\,x\ ;\ 2y \rangle$ une transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
Déterminez l'équation de la droite D', images par f, de la droite D d'équation $y = 1 + x$.

4.2 Déterminez l'équation de la droite D'', images par f, de la droite D'.

4.3 Déterminez l'équation de la droite D''', images par f, de la droite D''.

4.4 En continuant ainsi, quel ensemble de droites $\{ D, D', D'', D''', \dots \}$ obtient-on ?

Exercice 5

Soient f et g deux transformations linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ dont les matrices associées sont :

$M(f)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M(g)=\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

5.1 Calculez $(f \circ g)\langle x \ ; \ y\rangle$.

5.2 Interprétez géométriquement les transformations f, g et $f \circ g$.
Vérifiez la cohérence de vos réponses avec la partie 5.1.

Exercice 6

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les transformations linéaires suivantes :

a) La symétrie orthogonale S_{60} par rapport à l'axe $y=\tan(\pi/3)\cdot x$ formant un angle de 60° avec l'horizontale.

b) La symétrie orthogonale S_{90} par rapport à l'axe C_2.

c) La rotation R_{-60} d'angle de 60° dans le sens des aiguilles d'une montre.

6.1 Donnez les matrices $M(S_{60})$, $M(S_{90})$ et $M(R_{-60})$.

6.2 Montrez que $R_{-60} \circ S_{90} = S_{60}$. Interprétez géométriquement cette égalité.

Exercice 7

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les transformations linéaires f définie par $M(f)=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Montrez que f est la composée d'une homothétie H_λ avec une rotation R_α, donc $f=R_\alpha \circ H_\lambda$.
Déterminez la valeur de λ et celle de α.
