Exercice 1

Soit $\{\vec{e}_1\ ;\ \vec{e}_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et f la transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ décrite par la matrice $M(f)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Donnez les images des vecteurs : $\vec{x}=2\cdot\vec{e}_1$; $\vec{y}=3\cdot\vec{e}_1-\vec{e}_2$ et $\vec{z}=\vec{e}_1-\vec{e}_2$.

Exercice 2

Interprétez géométriquement les transformations linéaires suivantes :

1) $M(f)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2) $M(f)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) $M(f)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

4) $M(f)=\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Exercice 3

Relativement à la base canonique $\{\vec{e}_1\ ;\ \vec{e}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, déterminez la matrice des transformations linéaires suivantes :

1) La projection orthogonale sur la droite $y=-x$. Faites un dessin !

2) La rotation d'angle 30°. Faites un dessin !

Exercice 4

1) Soit $f(\langle x\ ;\ y\rangle)=\langle 4x-y\ ;\ -3x+2y\rangle$ une transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

a) Déterminez la matrice $M(f)$ de f.

b) Déterminez l'équation vectorielle de la droite D', images par f, de la droite D d'équation :

$\vec{v}=\langle 2\ ;\ 0\rangle+\lambda\cdot\langle 3\ ;\ -2\rangle \quad \lambda\in\mathbb{R}$.

2) Déterminez l'image du carré de sommets $\langle -4\ ;\ 6\rangle$; $\langle -4\ ;\ 4\rangle$; $\langle -2\ ;\ 4\rangle$; $\langle -2\ ;\ 6\rangle$ par la rotation d'angle 60° dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5

Soient f et g deux transformations linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ dont les matrices associées sont :

$M(f)=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $M(g)=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $\vec{b}=\langle -2\ ;\ 3\rangle$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

1) Calculez $(g\circ f)(\vec{b})$ et $(f\circ g)(\vec{b})$.

2) Quel est le vecteur $\vec{a}$ tel que $f(\vec{a})=\vec{b}$?

Exercice 6

Soient les transformations linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ suivantes :

° f définie par $f(\langle x\ ;\ y\rangle)=\langle 2x-y\ ;\ -x+4y\rangle$

° g définie par la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $x+y=0$.

1) Donnez les matrices $M(f)$ et $M(g)$.

2) Calculez l'image du segment d'extrémités $\langle 2\ ;\ 1\rangle$ et $\langle 0\ ;\ 3\rangle$, par f, par g et par $f\circ g$.