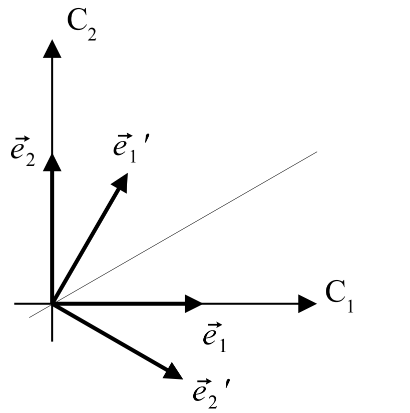
Exercice 1:

$$M(f)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \qquad f(\vec{x})=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$\vec{y}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \qquad f(\vec{y})=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{3\cdot\sqrt{3}+1}{2}\end{pmatrix}$$

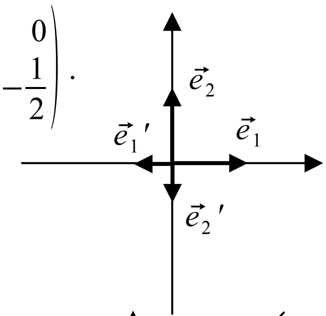
$$\vec{z}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \qquad f(\vec{z})=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}+1}{2}\end{pmatrix}$$



La transformation f est une symétrie orthogonale d'axe formant un angle de 30° avec l'axe C_1.

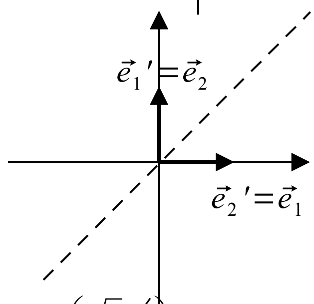
Exercice 2 :

1) $M(f)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ Les images de $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ sont : $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.



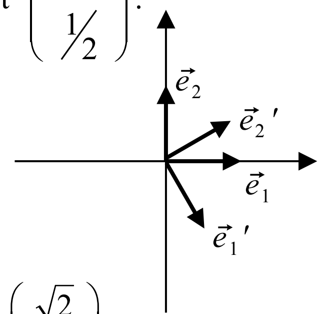
Cela correspond à une symétrie centrale de centre origine composée avec une homothétie de rapport 1/2. L'ordre des transformations donne le même résultat ici.

2) $M(f)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ Les images de $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ sont : $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.



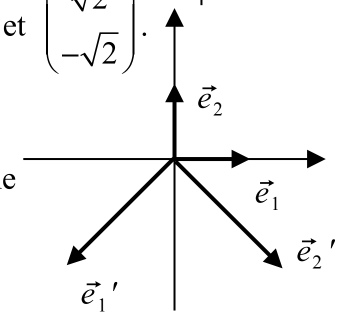
Les deux vecteurs de bases sont échangés par cette transformation linéaire, donc elle correspond à une symétrie d'axe de 45° passant par l'origine, d'équation $x_2 = x_1$.

3) $M(f)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ Les images de $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ sont : $\begin{pmatrix}1/2\\ -\sqrt{3}/2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\ 1/2\end{pmatrix}$.



Les deux vecteurs de bases sont tournés de 60° dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens trigonométrique inverse ou de −60° dans le sens trigonométrique. Cette transformation correspond donc à une rotation de −60° dans le sens trigonométrique, autour de l'origine. C.f. table CRM pour les matrices de rotation.

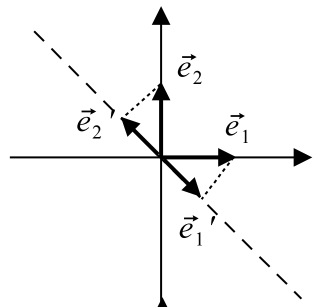
4) $M(f)=\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$ Les images de $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ sont : $\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}$.



Les deux vecteurs de bases sont tournés de −135° dans le sens trigonométrique et agrandis d'un facteur 2. Cette transformation correspond donc à une rotation de −135° dans le sens trigonométrique, autour de l'origine composée avec une homothétie de rapport 2. C.f. table CRM pour les matrices de rotation.

Exercice 3 :

1)

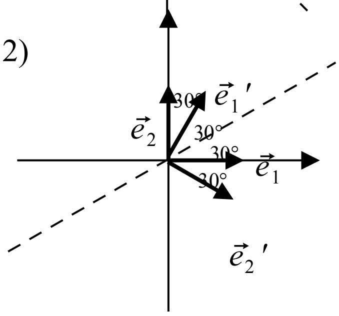


Les images de $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ sont : $\begin{pmatrix}0{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$.

La matrice de cette transformation est : $M(f)=\begin{pmatrix}0{,}5 & -0{,}5\\-0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}$.

Cela correspond à une projection sur l'axe d'équation : $x_2=-x_1$.

2)



L'image de $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix}\cos(60°)\\\sin(60°)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$

L'image de $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est : $\begin{pmatrix}\sin(60°)\\-\cos(60°)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

La matrice de cette transformation est : $M(f)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Cela correspond à une symétrie axiale, d'axe de 30° :

Exercice 4 :

4.1) $f(\langle x\,;\,y\rangle)=\langle 4x-y\,;\,-3x+2y\rangle$, donc $M(f)=\begin{pmatrix}4 & -1\\-3 & 2\end{pmatrix}$.

On cherche l'image D' de la droite D d'équation : $2x+3y=4$.
Nous avons vu que l'image par une transformation linéaire d'une droite est une droite.
L'image d'un vecteur position est un vecteur position de la droite image.
L'image d'un vecteur directeur est un vecteur directeur de la droite image.
Une façon de faire est de trouver une équation vectorielle de la droite :
$\vec{v}=\langle 2\,;\,0\rangle+\lambda\cdot\langle 3\,;\,-2\rangle \quad \lambda\in\mathbb{R}$.

Un vecteur position de la droite image D' est : $f(\langle 2\,;\,0\rangle)=\langle 4\cdot 2-0\,;\,-3\cdot 2+0\rangle=\langle 8\,;\,-6\rangle$

Un vecteur directeur de D' est : $f(\langle 3\,;\,-2\rangle)=\langle 4\cdot 3-(-2)\,;\,-3\cdot 3+2\cdot(-2)\rangle=\langle 14\,;\,-13\rangle$

Donc une équation vectorielle de D' est : $\vec{v}=\langle 8\,;\,-6\rangle+\lambda\cdot\langle 14\,;\,-13\rangle \quad \lambda\in\mathbb{R}$.

Une autre façon de faire est de trouver un deuxième vecteur position de la droite image D'.
Pour $\lambda=-1$, on trouve un autre vecteur position de la droite D : $\langle -1\,;\,2\rangle$.

$f(\langle -1\,;\,2\rangle)=\langle 4\cdot(-1)-1\cdot 2\,;\,-3\cdot(-1)+2\cdot 2\rangle=\langle -6\,;\,7\rangle$ est un autre point de D'.

Donc $\vec{v}_{D'}=\langle 8\,;\,-6\rangle-\langle -6\,;\,7\rangle=\langle 14\,;\,-13\rangle$ est un vecteur directeur de D'.

Et on retrouve l'équation vectorielle de la droite image D'.
$\vec{v}=\langle 8\,;\,-6\rangle+\lambda\cdot\langle 14\,;\,-13\rangle \quad \lambda\in\mathbb{R}$ que l'on peut écrire $\vec{w}=\langle 8\,;\,-6\rangle+\lambda\cdot\langle 14\,;\,-13\rangle \quad \lambda\in\mathbb{R}$
Pour mettre en évidence que c'est l'équation de la droite image D'.

L'équation cartésienne de la droite image D' est : $13x+14y=20$
On prend le vecteur directeur, on change le signe d'une des composantes, ce qui donne les coefficients de y et de x. Ensuite, on remplace x et y par les coordonnées d'un point pour obtenir le terme constant.

4.2) La matrice correspondante à une symétrie orthogonale d'axe $y = a \cdot x$ ou $y = \tan(\alpha) \cdot x$ s'écrit :

$M(S_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$. $\tan(\alpha) = 2$, donc $\alpha = \tan^{-1}(2) \approx 63{,}435°$.

$\cos(2\alpha) = -0{,}6$ et $\sin(2\alpha) = 0{,}8$.

Donc la matrice de la symétrie orthogonale d'axe $y = 2x$ est $M(S_\alpha) = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

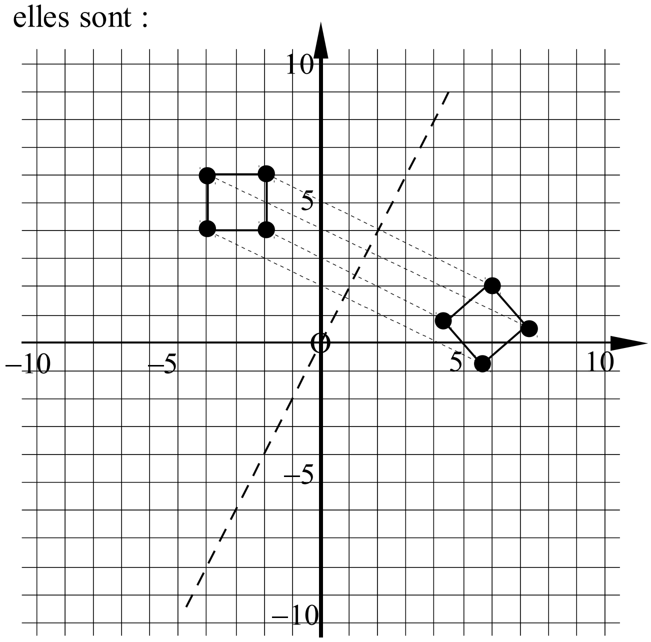
Maintenant, les images du carré sont faciles à calculer, elles sont :

$$\begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}2 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}6 \\ -0{,}8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}4 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$$



Une **autre manière** de trouver la matrice de la symétrie orthogonale d'axe $y = a \cdot x$, est de se rendre compte que la direction de l'axe est représentée par le vecteur : $\vec{v}_{axe} = \langle 1 \ ; \ a \rangle = 1 \cdot \vec{e}_1 + a \cdot \vec{e}_2$.

Un vecteur orthogonal à l'axe est : $\vec{v}_{\text{ortho}} = \langle a \ ; -1 \rangle = a \cdot \vec{e}_1 - 1 \cdot \vec{e}_2$.

L'image de $\vec{v}_{axe} = \langle 1 \ ; \ a \rangle$ est égale à lui-même : $S_\alpha(1 \cdot \vec{e}_1 + a \cdot \vec{e}_2) = 1 \cdot \vec{e}_1 + a \cdot \vec{e}_2$

L'image de $\vec{v}_{\text{ortho}} = \langle a \ ; -1 \rangle$ est égale à son opposé : $S_\alpha(a \cdot \vec{e}_1 - 1 \cdot \vec{e}_2) = -a \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2$.

Puisque S_α est une transformation linéaire :

$S_\alpha(\vec{e}_1) + a \cdot S_\alpha(\vec{e}_2) = 1 \cdot \vec{e}_1 + a \cdot \vec{e}_2$ et

$a \cdot S_\alpha(\vec{e}_1) - S_\alpha(\vec{e}_2) = -a \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2$.

En multipliant la deuxième égalité des deux côtés par a et en ajoutant les deux égalités, on obtient :

$(1 + a^2) \cdot S_\alpha(\vec{e}_1) = (1 - a^2) \cdot \vec{e}_1 + 2a \cdot \vec{e}_2$.

Ce qui donne la première colonne de la matrice de S_α.

En multipliant la première égalité des deux côtés par a, et la deuxième égalité par -1 et en ajoutant les deux égalités, on obtient : $(1 + a^2) \cdot S_\alpha(\vec{e}_2) = 2a \cdot \vec{e}_1 - (1 - a^2) \cdot \vec{e}_2$.

Ce qui donne la deuxième colonne de la matrice de S_α.

$$M(S_\alpha) = \begin{pmatrix} \dfrac{1-a^2}{1+a^2} & \dfrac{2a}{1+a^2} \\ \dfrac{2a}{1+a^2} & -\dfrac{1-a^2}{1+a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{5} & \dfrac{4}{5} \\ \dfrac{4}{5} & \dfrac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$ La matrice déjà trouvée ci-dessus.

Exercice 5 :

$M(f)=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ et $M(g)=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}$.

On simplifiera l'écriture en écrivant $f(\vec{b})$ au lieu de $M(f(\vec{b}))$.

1a) $f(\vec{b})=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+6\\ -6+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ -3\end{pmatrix}$

$(g\circ f)(\vec{b})=g(f(\vec{b}))=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40+9\\ 16-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}49\\ 13\end{pmatrix}$

1b) $g(\vec{b})=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10-9\\ -4+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-19\\ -1\end{pmatrix}$

$(f\circ g)(\vec{b})=f(g(\vec{b}))=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-19\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19-2\\ -57-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\ -58\end{pmatrix}$

Pour information : $M(f\circ g)=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 17 & -8\end{pmatrix}$ pas nécessaire de faire ce calcul.

$M(g\circ f)=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14 & 7\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ pas nécessaire de faire ce calcul.

2) On cherche $\vec{a}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ tel que $f(\vec{a})=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_1+2x_2\\ 3x_1+x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}$

On peut résoudre : $\begin{cases}-x_1+2x_2=-2\\ 3x_1+\ \ x_2=3\end{cases}$ Solution : $\vec{a}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8/7\\ -3/7\end{pmatrix}$

Autre manière : $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}=\frac{1}{-7}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}8\\ -3\end{pmatrix}$

Exercice 6 :

1) $M(f)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 4\end{pmatrix}$ et, c.f. ex. 4.2 avec $y=-x$, $M(g)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

2) $\vec{a}=\langle 2\,;1\rangle$ et $\vec{b}=\langle 0\,;3\rangle$

$f(\vec{a})=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$; $f(\vec{b})=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 12\end{pmatrix}$

$g(\vec{a})=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -2\end{pmatrix}$; $g(\vec{b})=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 0\end{pmatrix}$

$(f\circ g)(\vec{a})=f(g(\vec{a}))=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -7\end{pmatrix}$

$(f\circ g)(\vec{b})=f(g(\vec{b}))=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\ 3\end{pmatrix}$