Exercice 1:

$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 8\\ 2 & -4 & 6\end{pmatrix}$

a) Les éléments de la deuxième ligne sont : 2 ; –4 ; 6.
b) Les éléments de la troisième colonne sont : 8 et 6.
c) $a_{13} = 8$; $a_{21} = 2$.
d) $i = 2$ et $j = 3$, car $a_{23} = 6$.

Exercice 2 :

Soient les matrices suivantes : $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & -4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 7 & -6\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}3\\ -8\end{pmatrix}$.

a) $A+B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3 & 5+4\\ 2+2 & -4+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 9\\ 4 & -4\end{pmatrix}$

$B+A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+1 & 4+5\\ 2+2 & 0-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 9\\ 4 & -4\end{pmatrix}$

Il semble que $A+B = B+A$, qu'il est facile de démontrer de façon général.

b) $(A+B)+C=\begin{pmatrix}4 & 9\\ 4 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 7 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 11 & -10\end{pmatrix}$

$A+(B+C)=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & -4\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 7 & -6\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\\ 9 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 11 & -10\end{pmatrix}$

Il semble que $(A+B)+C = A+(B+C)$, qu'il est facile de démontrer de façon général.

c) $4\cdot(A+C)=4\cdot\left(\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 7 & -6\end{pmatrix}\right)=4\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 9 & -10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 8\\ 36 & -40\end{pmatrix}$

$4\cdot A+4\cdot C=4\cdot\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & -4\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 7 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 20\\ 8 & -16\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & -12\\ 28 & -24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 8\\ 36 & -40\end{pmatrix}$

Il semble que $\lambda\cdot(A+C) = \lambda\cdot A+\lambda\cdot C$, qu'il est facile de démontrer de façon général.

d) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+10 & 4+0\\ 6-8 & 8+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 4\\ -2 & 8\end{pmatrix}$

$B\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+8 & 15-16\\ 2+0 & 10+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -1\\ 2 & 10\end{pmatrix}$

On constate que : $A\cdot B \neq B\cdot A$ habituellement, mais pas toujours.

e) $(B\cdot C)\cdot D=\left(\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 7 & -6\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}3\\ -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+28 & -9-24\\ -2 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\cdot 3+33\cdot 8\\ -6+48\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}339\\ 42\end{pmatrix}$

$B\cdot(C\cdot D)=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 7 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ -8\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3+24\\ 21+48\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}21\\ 69\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 21+4\cdot 69\\ 42\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}339\\ 42\end{pmatrix}$

Il semble que le produit matriciel soit associatif, ce qui se démontre de façon générale.

f) On peut donc conjecturer que l'addition matricielle soit commutative et associative et que la multiplication par un scalaire soit distributif.
La **multiplication matricielle n'est pas commutative**, mais elle est **associative**.

Exercice 3 :

Soit la matrice : $A=\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Soit la matrice : $C=\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$

a) $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Elle correspond au **neutre** pour l'addition, donc au nombre 0.

b) $B=-A=\begin{pmatrix} -11 & -7 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$. Elle correspond à l'**opposé** de A.

c) $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Elle correspond au **neutre** pour la multiplication, donc au nombre 1.

Elle s'appelle la **matrice identité**. Elle correspond au 1 des nombres réels.

d) $A \cdot C=\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice C correspond à l'**inverse pour la multiplication**.

La notation usuelle de l'inverse est : A^{-1}. On n'écrit pas : $\frac{1}{A}$. Cette écriture est *incorrecte* !

Exercice 4 :

Soit la matrice : $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Soit la matrice : $D=\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

a) $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Elle correspond au **neutre** pour l'addition, donc au nombre 0.

b) $B=-A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$. Elle correspond à l'**opposé** de A.

c) $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Elle correspond au **neutre** pour la multiplication, donc au nombre 1.

Elle s'appelle la **matrice identité**. Elle correspond au 1 des nombres réels.

d) $A \cdot D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} \cdot a_{22}-a_{12} \cdot a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11} \cdot a_{22}-a_{12} \cdot a_{21} \end{pmatrix}$

Le nombre : $a_{11} \cdot a_{22}-a_{12} \cdot a_{21}$ s'écrit **det(*A*)**. Il s'appelle **le déterminant** de la matrice A.
Si le déterminant det(A) est non nul, alors :

$C=\frac{1}{det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$ est telle que : $A \cdot C=I$ et $C \cdot A=I$.

La matrice C correspond à l'**inverse pour la multiplication**.
On l'appelle **la matrice inverse de A**.

La notation usuelle de l'inverse est : A^{-1}. On n'écrit pas : $\frac{1}{A}$. Cette écriture est *incorrecte* !

Exercice 5 :

Soit la matrice : $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

En utilisant l'exercice 4d), on calcule : **det(*A*)** = 2 · 5 – 7 · (–1) = 17.

La **matrice inverse** de A est : $A^{-1}=\frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{17} & \frac{-7}{17} \\ \frac{1}{17} & \frac{2}{17} \end{pmatrix}$

Exercice 6 :

Le système s'écrit : $\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$. $A = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, det($A$) = 22 - 21 = 1.

En multipliant à gauche par la matrice inverse : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$, on obtient :

$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc

$I \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10 - 7 \cdot 3 \\ -3 \cdot 10 + 11 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, donc

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On vérifie facilement la solution : $x = -1$; $y = 3$.

On remarque que l'exercice 4.d permet de résoudre facilement n'importe quel système d'équations.

Exercice 7 :

a) L'affirmation est **correcte**, car le nombre de colonne de la première matrice est égale au nombre de ligne de la deuxième matrice et vaut 4, donc le produit peut se faire. Le nombre de lignes de la première colonne correspondra au nombre de lignes du résultat, c'est-à-dire 3 et le nombre de colonne de la deuxième matrice correspondra au nombre de colonne du résultat, c'est-à-dire 5.

b) Pour deux matrices A et B, le produit $A \cdot B$ est souvent différent de $B \cdot A$, mais parfois ces deux produits sont égaux, par exemple si les matrices sont diagonales. Une matrice est diagonale si tous les éléments hors de la diagonale de la matrice sont nuls. Ceux de la diagonale peuvent être non nul ou nul. Donc l'affirmation est **fausse** en toute généralité.
L'exercice 4.d donne un contre exemple.

c) L'affirmation est **vraie**, mais c'est long à démontrer ou il faut connaître plus de théorie pour le démontrer.

d) L'affirmation est **fausse**, ce qui est une grande différence des nombres réels.
Exemples : $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. L'égalité est vraie pour tous nombres réels a et b.

e) L'affirmation est **fausse**, ce qui est une autre grande différence des nombres réels.
Un premier exemple évident est le cas de la matrice $A = 0$ (comme pour les nombres réels).
Mais dès que la matrice A est non inversible, il se peut que $A \cdot B = A \cdot C$ pour deux matrices B et C différentes.
Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$.
$A \cdot B = A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour tous nombres réels b_{21} ; b_{22} ; c_{21} ; c_{22}.

Exercice 8 :

Soient les matrices suivantes : $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) $$B+C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot(B+C)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 7 \\ 12 & 15 & 9 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 12 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 7 \\ 6 & 3 & -9 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B+A\cdot C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 12 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -7 & 7 \\ 6 & 3 & -9 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 7 \\ 12 & 15 & 9 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

Il semble que $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$, ce qui se démontre de façon général.

b) $$A+B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)\cdot C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 & -17 & 9 \\ 40 & -17 & -5 \\ 17 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 7 \\ 6 & 3 & -9 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}\quad \text{c.f. a)}$$

$$B\cdot C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 & -10 & 2 \\ 34 & -20 & 4 \\ 17 & -10 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot C+B\cdot C=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 7 \\ 6 & 3 & -9 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 17 & -10 & 2 \\ 34 & -20 & 4 \\ 17 & -10 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 & -17 & 9 \\ 40 & -17 & -5 \\ 17 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Il semble que $(A+B)\cdot C = A\cdot C+B\cdot C$, ce qui se démontre de façon général.

c) Comme écrit précédemment, la multiplication matricielle est **distributive** sur l'addition matricielle.
Dans tous les cas on a :

$A\cdot(B+C) = A\cdot B+A\cdot C$ et

$(A+B)\cdot C = A\cdot C+B\cdot C$.