Exercice 1

Soit la matrice suivante: $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

a) Quels sont les éléments de la deuxième ligne ?
b) Quels sont les éléments de la troisième colonne ?
c) Que valent les éléments a_{13} et a_{21} ?
d) Quels sont les indices ij correspondant à l'élément 6 ?

Exercice 2

Soient les matrices suivantes : $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Calculez les matrices suivantes :

a) $A+B$ et $B+A$

b) $(A+B)+C$ et $A+(B+C)$

c) $4\cdot(A+C)$ et $4\cdot A+4\cdot C$

d) $A\cdot B$ et $B\cdot A$

e) $(B\cdot C)\cdot D$ et $B\cdot(C\cdot D)$

f) Observez ces calculs et conjecturez des propriétés des matrices.

Exercice 3

Soit la matrice : $A=\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Soit la matrice : $C=\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$

Déterminez :

a) la matrice O telle que $A+O=A$;

b) la matrice B telle que $A+B=O$;

c) la matrice I telle que $A\cdot I=A$. Vérifiez que l'on a aussi : $I\cdot A=A$.

d) Vérifiez que $A\cdot C=I$. Vérifiez que l'on a aussi : $C\cdot A=I$.

Exercice 4

Pour une matrice quelconque : $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Soit la matrice : $D=\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

Déterminez:

a) la matrice O telle que $A+O=A$;

b) la matrice B telle que $A+B=O$; Notation usuelle : $B=$ ______ à compléter

c) la matrice I telle que $A\cdot I=A$. On a aussi : $I\cdot A=A$. Elle s'appelle la **matrice identité**.

d) Effectuez le produit : $A\cdot D$.

Déduisez-en la matrice C telle que $A\cdot C=I$. Notation usuelle : $C=$ ______ à compléter

Sous quelle condition la matrice C est-elle définie ?

Comparez avec les calculs similaires dans l'ensemble des nombres réels, en particulier, si A était un nombre réel, à quoi correspondraient O ; B ; I et C ?

Exercice 5

Soit la matrice : $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. En utilisant l'exercice précédent,

déterminez la matrice C telle que $A\cdot C=I$. Comment s'appelle cette matrice ?

Exercice 6

Écrivez le système d'équations $\begin{cases} 11x+7y &= 10 \\ 3x+2y &= 3 \end{cases}$ sous forme matricielle.

En utilisant les résultats de l'exercice 3.d (et 3.a) résolvez ce système en effectuant un simple produit matriciel !

Exercice 7

Vrai ou Faux ? Justifiez!

a) Le produit d'une matrice 3x4 par une matrice 4x5 est défini et donne une matrice 3x5.

b) Si A et B sont deux matrices, alors $A \cdot B = B \cdot A$.

c) Si A ; B et C sont des matrices, alors $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
Une justification incomplète est suffisante.

d) Si le produit de deux matrices donne la matrice nulle $A \cdot B = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.
Cherchez un contre-exemple.

e) Si $A \neq 0$ et $A \cdot B = A \cdot C$, alors $B = C$.
Cherchez un contre-exemple.

Exercice 8

Les calculs sont assez longs, mais pas compliqués, à faire juste pour vous entraîner,
l'exercice n'est pas essentiel.

Soient les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculez :

a) $A \cdot (B + C)$ et $A \cdot B + A \cdot C$;

b) $(A + B) \cdot C$ et $A \cdot C + B \cdot C$;

c) Conjecturez des propriétés des matrices.
