Approximation de la loi Binomiale par la loi Normale

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi Binomiale $B(n, p)$.
Donc on répète n fois une expérience.
Il n'y a que deux issues, "*succès*" et "*échec*". P("*succès*") = p et P("*échec*") = $q = 1 - p$.
Chaque expérience est indépendante des autres.
X = "nombre de succès".

On sait que $P(X=j) = C_j^n \cdot p^j \cdot q^{n-j}$. $E(X) = n \cdot p$ $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Notons : $\mu = E(X)$ et $\sigma = \sigma(X)$.

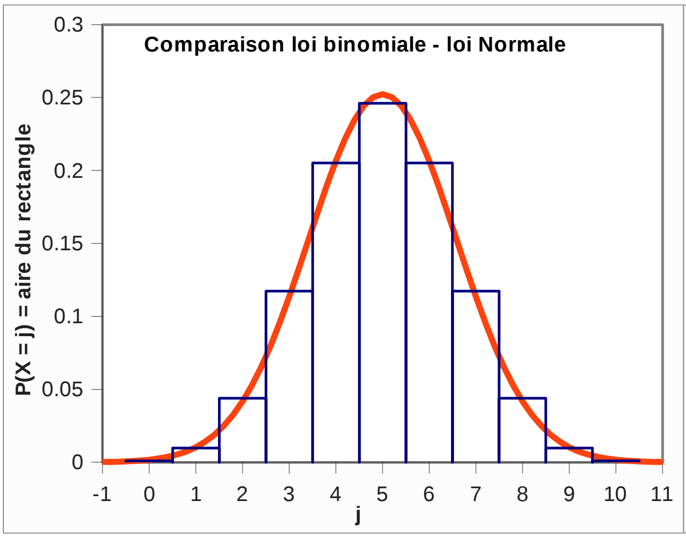
Il est naturel de s'intéresser à $P(X \le k)$, qui vaut $\sum_{j=0}^{j=k} C_j^n \cdot p^j \cdot q^{n-j}$.

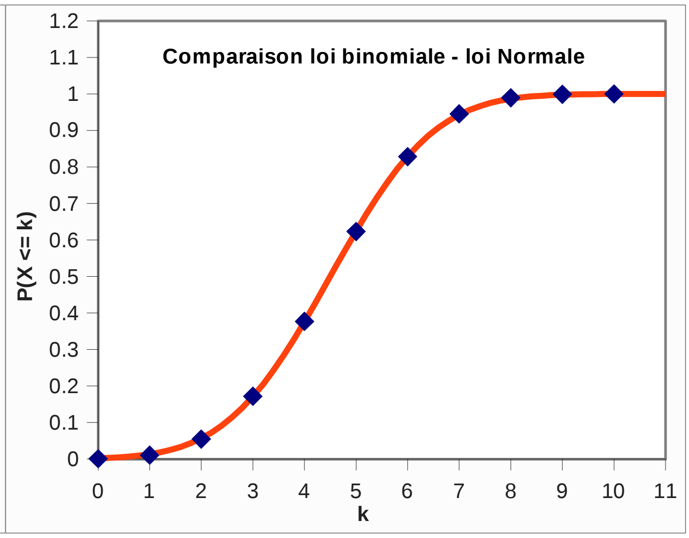
En principe cette somme est facile à calculer, mais les calculs peuvent être long !

Typiquement, on peut s'intéresser à savoir quelle est la probabilité que la variable aléatoire s'éloigne de sa moyenne de plus qu'un ou deux ou trois écarts-type. Cela s'écrit :

$P(-\sigma \le X - \mu$ et $X - \mu \le \sigma) = ?$
$P(-2 \cdot \sigma \le X - \mu$ et $X - \mu \le 2 \cdot \sigma) = ?$
$P(-3 \cdot \sigma \le X - \mu$ et $X - \mu \le 3 \cdot \sigma) = ?$

Étudions la distribution de probabilités de la loi Binomiale $B(n, p)$. Cas $n = 10$; $p = 0{,}5$





$P(X = j)$ = l'aire sous le rectangle de largeur 1, centré en j.
Cette aire est très proche de l'aire sous la courbe.
Dans le graphique de droite, les points représentent $P(X \le k)$ et la courbe représente l'aire sous la courbe depuis $-\infty$ jusqu'à $k + 0{,}5$. On remarque visuellement que les points se trouvent sur la courbe.

La courbe de gauche est représentée par la fonction $f(j) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(j-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$

appelée "densité de probabilité de la loi Normale".

La courbe de droite est représentée par l'intégrale de la fonction f. Aire $(k) = \int_{-\infty}^{k+0{,}5} f(t)\, dt$.

Cette aire est égale à $\Phi\left(\frac{k+0{,}5-\mu}{\sigma}\right)$ où $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

La fonction Φ, "PHI" est compliquée à calculer. C'est pour cela qu'elle est listée dans des tables.
Un résumé se trouve dans la page suivante. Une de ces tables se trouve plus loin.

Résumé

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi Binomiale $B(n, p)$.
Donc on répète n fois une expérience.
Il n'y a que deux issues, "*succès*" et "*échec*". P("*succès*") = p et P("*échec*") = $q = 1 - p$.
Chaque expérience est indépendante des autres.
X = "nombre de succès".

On sait que $P(X = j) = C_j^n \cdot p^j \cdot q^{n-j}$. $E(X) = n \cdot p$ $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Notons : $\mu = E(X)$ et $\sigma = \sigma(X)$.

Lorsque $n \cdot p$ et $n \cdot q$ sont suffisamment grands, typiquement plus grands que 5, on a la très bonne approximation suivante :

$$\boxed{P(x \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k+0{,}5-\mu}{\sigma}\right)}$$

La fonction Φ, "PHI" est listée dans une table, pour des abscisses positives. c.f. la page suivante.
Pour des abscisses x négatives, on utilise : $\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$.

Quelques propriétés :

$$P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$$

$$P(k_1 < X \leq k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k_1+0{,}5-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-0{,}5-\mu}{\sigma}\right)$$

Exercice :
On lance 100 fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée.
X = nombre de piles obtenus.
Donc $p = 0{,}5$ et $\mu = E(X) = n \cdot p = 50$.

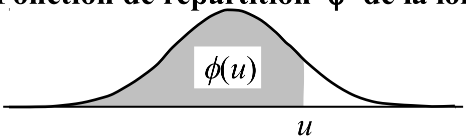
i) Calculez l'écart-type σ de la variable aléatoire X.

ii) À l'aide de la théorie qui précède et du tableau de la page suivante, calculez $P(45 \leq X \leq 55)$

iii) À l'aide de la théorie qui précède et du tableau de la page suivante, calculez $P(40 \leq X \leq 60)$

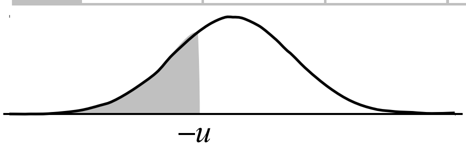
Fonction de répartition ϕ de la loi normale $Z \sim N(0, 1)$:

$$\Phi(u) = P(Z < u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

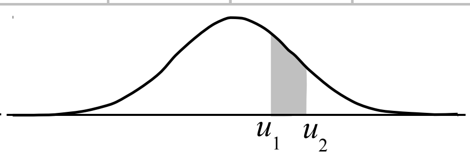


Si X est binomiale, avec "n grand", alors : $P(X \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x+0,5-E(X)}{\sigma(X)}\right)$

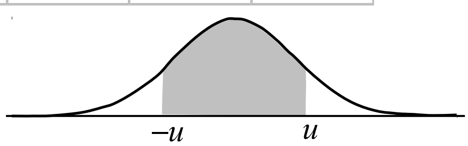
u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997



$P(Z < -u) = \Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$

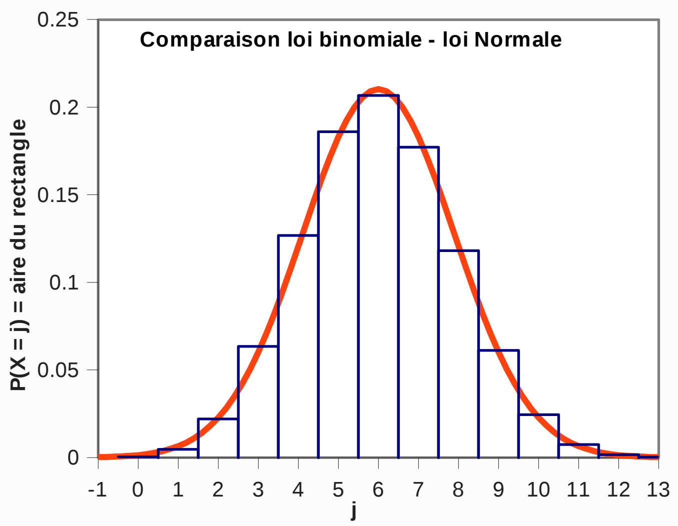


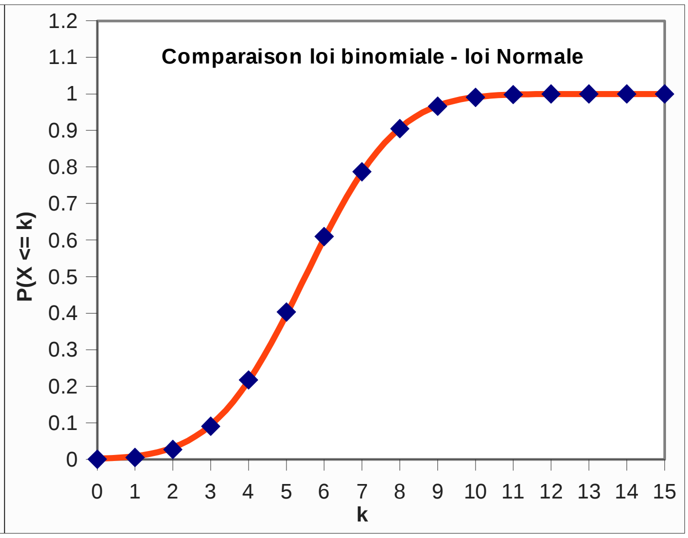
$P(u_1 < Z < u_2) = \Phi(u_2) - \Phi(u_1)$



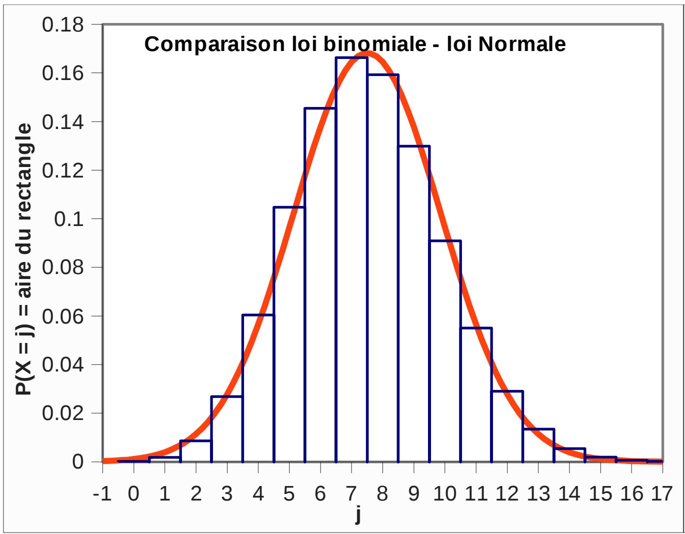
$P(-u < Z < u) = 2 \cdot \Phi(u) - 1$

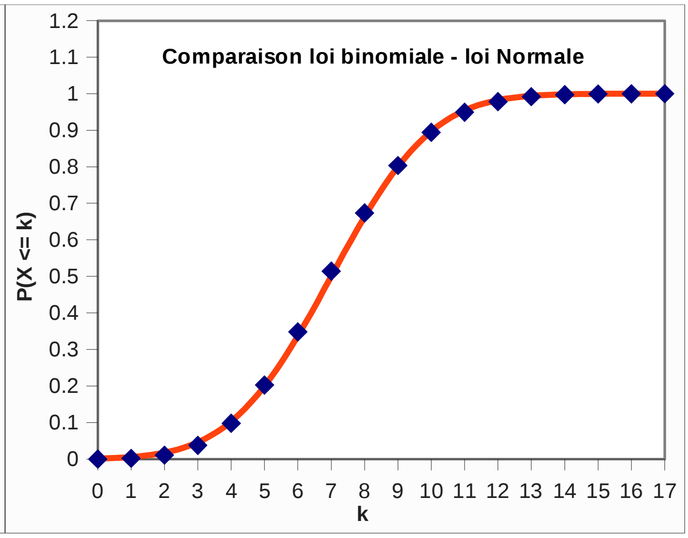
Juste pour la curiosité. Toutes les remarques de la page 1 restent valables.
Étudions la distribution de probabilités de la loi Binomiale B(n, p). Cas $n = 15$; $p = 0{,}4$





Étudions la distribution de probabilités de la loi Binomiale B(n, p). Cas $n = 30$; $p = 0{,}25$





Étudions la distribution de probabilités de la loi Binomiale B(n, p). Cas $n = 20$; $p = 0{,}7$