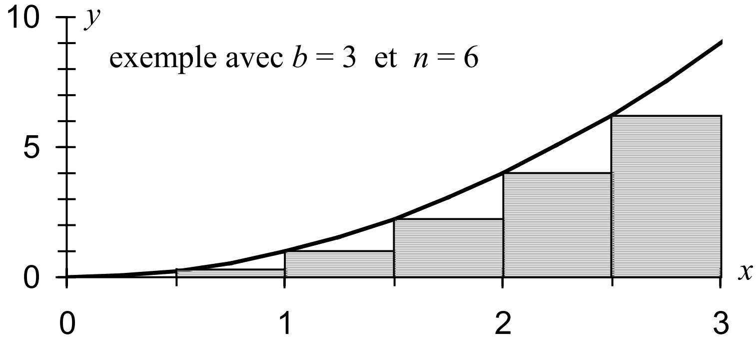
Appendice I : calculs d'aires par limite de sommation

Le but de ce qui suit est de calculer l'aire comprise entre l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite verticale d'équation $x = b$ et la courbe de $f(x) = x^d$, avec d un entier positif.
Notons $A_d(b)$ cette aire.

Avec la notation des intégrales : $A_d(b) = \int_0^b x^d \, dx$.

Découpons l'intervalle $[0 ; b]$ en n intervalles de même largeur : $h = \dfrac{b}{n}$.



$$A_d(b) = \lim_{n\to\infty}\left[h \cdot f(h) + h \cdot f(2\cdot h) + ... + h \cdot f(n \cdot h)\right]$$

Donc

$$A_d(b) = \lim_{n\to\infty} h \cdot \left[h^d + (2\cdot h)^d + ... + (n\cdot h)^d\right]$$

$$\Leftrightarrow \ A_d(b) = \lim_{n\to\infty} h^{d+1} \cdot \left[1 + 2^d + ... + n^d\right]$$

$$\Leftrightarrow \ A_d(b) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b}{n}\right)^{d+1} \cdot \left[1 + 2^d + ... + n^d\right]$$

$$\Leftrightarrow \ A_d(b) = b^{d+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{d+1}} \cdot \left[1 + 2^d + ... + n^d\right]$$

Pour calculer cette limite, il est utile de savoir exprimer la somme $1 + 2^d + ... + n^d$ plus simplement en fonction de n. Nous allons montrer ci-dessous que :

$$1 + 2^d + ... + n^d = \frac{n^{d+1}}{d+1} + \text{polynôme en } n \text{ de degré } \le n$$

Avec ce résultat, on obtient :

$$A_d(b) = b^{d+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{d+1}} \cdot \left[\frac{n^{d+1}}{d+1} + \alpha_d \cdot n^d + \alpha_{d-1} \cdot n^{d-1} + ... + \alpha_0\right]$$

$$A_d(b) = b^{d+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{d+1} + \underbrace{\frac{\alpha_d}{n} + \frac{\alpha_{d-1}}{n^2} + ... + \frac{\alpha_0}{n^{d+1}}}_{\text{tend vers } 0 \text{ quand } n \to \infty}\right] = \frac{b^{d+1}}{d+1}$$

Conclusion : L'aire cherchée est : $\boxed{A_d(b) = \dfrac{b^{d+1}}{d+1}}$, pour d entier ≥ 0.

Pour $d = 0$, cela correspond à l'aire d'un rectangle de largeur b et de hauteur 1.
Pour $d = 1$, cela correspond à l'aire d'un triangle rectangle de base b et de hauteur 1.

Remarquez que la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{d+1}}{d+1}$ égale x^{d+1}.

A la page suivante, on montre que : $1 + 2^d + ... + n^d = \dfrac{n^{d+1}}{d+1} + \text{polynôme en } n \text{ de degré } \le d$

Le but de ce qui suit est de trouver une formule pour calculer des sommes de puissances d'entiers consécutifs.

Notons : $S_d(n) = 1^d + 2^d + ... + n^d$, pour d entier ≥ 0.

On a : $S_0(n) = 1^0 + 2^0 + ... + n^0 = \underbrace{1+1+...+1}_{\text{n fois}} = n$

On a : $S_1(n) = 1^1 + 2^1 + ... + n^1 = 1 + 2 + ... + n$

Il existe plusieurs astuces pour calculer $S_1(n)$. En voici une, pas la plus simple, mais qui se généralise pour calculer $S_d(n)$ avec d entier ≥ 0.

$S_2(n+1) - S_2(n) = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 - \left[1^2 + 2^2 + ... + n^2\right] = (n+1)^2$

Exprimons cette différence d'une autre manière :

$S_2(n+1) - S_2(n) = 1^2 + (1+1)^2 + (2+1)^2 + (3+1)^2 + ... + (n+1)^2 - \left[1^2 + 2^2 + ... + n^2\right]$

$= 1^2 + (\cancel{1^2} + 2\cdot 1 + 1^2) + (\cancel{2^2} + 2\cdot 2 + 1^2) + (\cancel{3^2} + 2\cdot 3 + 1^2) + ... + (\cancel{n^2} + 2\cdot n + 1^2) - \left[\cancel{1^2} + \cancel{2^2} + ... + \cancel{n^2}\right]$

$= 1 + 2\cdot 1 + 1^2 + 2\cdot 2 + 1^2 + 2\cdot 3 + 1^2 + ... + 2\cdot n + 1^2$ on a simplifié

$= \underbrace{1+1+...+1}_{\text{n+1 fois}} + 2\cdot\underbrace{\left[1+2+3+...+n\right]}_{=S_1(n)}$ on a regroupé les termes et mis 2 en évidence.

Donc $n + 1 + 2\cdot S_1(n) = (n+1)^2$

On en déduit que : $S_1(n) = \dfrac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)\cdot n}{2}$, formule assez connue.

Répétons cette même idée pour calculer $S_2(n)$.

$S_3(n+1) - S_3(n) = 1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 - \left[1^3 + 2^3 + ... + n^3\right] = (n+1)^3$

Exprimons cette différence d'une autre manière :

$S_3(n+1) - S_3(n) = 1^3 + (1+1)^3 + (2+1)^3 + (3+1)^3 + ... + (n+1)^3 - \left[1^3 + 2^3 + ... + n^3\right]$

$= 1^3 + (\cancel{1^3} + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1) + (\cancel{2^3} + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1) + (\cancel{3^3} + 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1) + ... + (\cancel{n^3} + 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1)$

$- \left[\cancel{1^3} + \cancel{2^3} + ... + \cancel{n^3}\right]$

$= 1^3 \;\; + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1 \;\; + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1 \;\; + 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1 \;\; + 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1$ on a simplifié

$= \underbrace{1+1+...+1}_{\text{n+1 fois}} + 3\cdot\underbrace{\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2\right]}_{=S_2(n)} + 3\cdot\underbrace{\left[1+2+3+...+n\right]}_{=S_1(n)}$ regroupement + mises en évidence.

Donc $n + 1 + 3\cdot S_2(n) + 3\cdot S_1(n) = (n+1)^3$

On en déduit que : $S_2(n) = \dfrac{(n+1)^3 - (n+1) - 3\cdot S_1(n)}{3} = \dfrac{(n+1)^3 - (n+1) - 3\cdot\dfrac{(n+1)\cdot n}{2}}{3}$.

Après simplification, on obtient : $S_2(n) = \dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$

Remarquez que $S_2(n) = \dfrac{1}{3}\cdot n^3$ + polynôme de degré 2 en n.

En répétant la même idée, on obtient :

$n + 1 + 4\cdot S_3(n) + 6\cdot S_2(n) + 4\cdot S_1(n) = (n+1)^4$, les coefficients binomiaux apparaissent.

$n + 1 + 5\cdot S_4(n) + 10\cdot S_3(n) + 10\cdot S_2(n) + 5\cdot S_1(n) = (n+1)^5$, les coefficients binomiaux apparaissent.

$n + 1 + (d+1)\cdot S_d(n) + ... + (d+1)\cdot S_1(n) = (n+1)^{d+1}$, les coefficients binomiaux apparaissent.

Les seuls termes qui sont puissance de $d + 1$, sont $S_d(n)$ et $(n+1)^{d+1}$.

Donc $S_d(n) = \dfrac{1}{d+1}\cdot n^{d+1}$ + polynôme de degré d en n. CQFD

Il y a du travail, mais le résultat est intéressant.

Dans l'appendice suivant, nous montrons une autre manière de calculer des aires.

Appendice II : calculs d'aires par différence d'aires connues

Le but de ce qui suit est de calculer l'aire comprise entre l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite verticale d'équation $x = b$ et la courbe de $f(x) = \sqrt{x}$.

Notons $A_{0,5}(b)$ cette aire.

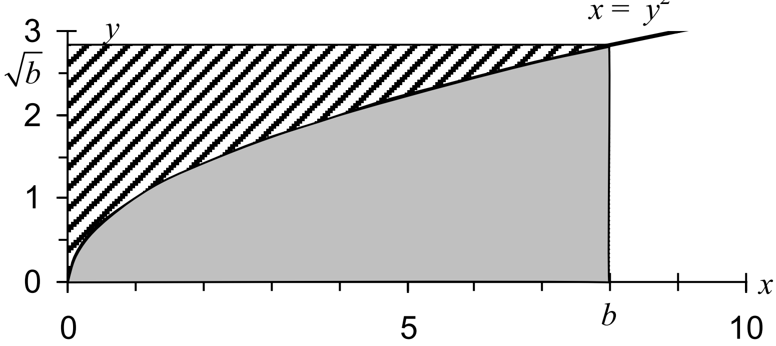
Avec la notation des intégrales : $A_{0,5}(b) = \int_0^b \sqrt{x}\, dx$.

L'aire hachurée est l'aire sous la parabole d'équation $x = y^2$, y variant entre 0 et $\sqrt{b}$.

Donc l'aire hachurée égale : $\frac{\left(\sqrt{b}\right)^3}{3}$

L'aire grise égale l'aire cherchée.

Elle vaut l'aire du rectangle de base b et de hauteur $\sqrt{b}$, moins l'aire hachurée.



$$A_{0,5}(b) = \int_0^b \sqrt{x}\, dx = b \cdot \sqrt{b} - \frac{\left(\sqrt{b}\right)^3}{3} = \left(\sqrt{b}\right)^3 - \frac{\left(\sqrt{b}\right)^3}{3} = \frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{b}\right)^3 .$$

Rappelons que : $\left(\sqrt{b}\right)^3 = b^{\frac{3}{2}}$.

Remarquez que la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{x}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$ égale $\sqrt{x}$.

En utilisant la même méthode, pouvez-vous montrer que :

Avec la notation des intégrales : $\int_0^b \sqrt[3]{x}\, dx = \frac{3}{4} \cdot \left(\sqrt[3]{b}\right)^4$. Rappelons que : $\left(\sqrt[3]{b}\right)^4 = b^{\frac{4}{3}}$.

Appendice III : calcul d'aire par limite de sommation non équidistante.

Le but de ce qui suit est de calculer l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la droite verticale d'équation $x = 1$, la droite verticale d'équation $x = b$ et la courbe de $f(x) = x^d$, avec d un nombre réel $\neq -1$.
Notons $A_d(b)$ cette aire.

Avec la notation des intégrales : $A_d(b) = \int_1^b x^d \, dx$.

L'idée principale est de découper l'intervalle [1 ; b] suivant une suite géométrique.

<u>Préliminaire :</u>
Multipliez : $(1+x+x^2+x^3+x^4+...+x^{n-1})$ par $(x-1)$ pour vérifier que l'on obtient : $x^n - 1$

Donc, si $x \neq 1$, on a : $\boxed{1+x+x^2+x^3+x^4+...+x^{n-1} = \frac{x^n-1}{x-1}}$ cette somme s'appelle sur **série géométrique**.

Pour calculer l'aire désirée, pour $b \neq 1$, posons : (pour $b \in]\,0\,;1[$, la démarche reste valable)
n un grand nombre entier, $\alpha = \sqrt[n]{b}$ et $x_k = \alpha^k$ $k = 0, 1, 2, ..., n$.

Donc : $x_0 = \alpha^0 = 1$ et $x_n = \alpha^n = b$.

Découpons selon des intervalles de largeur $x_{k+1} - x_k = \alpha^{k+1} - \alpha^k = \alpha^k \cdot (\alpha - 1)$

$\alpha = \sqrt[n]{b}$ tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini, donc $x_{k+1} - x_k$ tend vers 0 si $n \to \infty$.

On a :

$$A_d(b) = \lim_{n\to\infty}\left[(x_1-x_0)\cdot f(x_0)+(x_2-x_1)\cdot f(x_1)+...+(x_n-x_{n-1})\cdot f(x_{n-1})\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\alpha^0\cdot(\alpha-1)\cdot\left(\alpha^0\right)^d+\alpha^1\cdot(\alpha-1)\cdot\left(\alpha^1\right)^d+\alpha^2\cdot(\alpha-1)\cdot\left(\alpha^2\right)^d+...+\alpha^{n-1}\cdot(\alpha-1)\cdot\left(\alpha^{n-1}\right)^d\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\ (\alpha-1)\cdot\left[\left(\alpha^0\right)^{d+1}+\left(\alpha^1\right)^{d+1}+...+\left(\alpha^{n-1}\right)^{d+1}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\ (\alpha-1)\cdot\left[\alpha^{0\cdot(d+1)}+\alpha^{1\cdot(d+1)}+...+\alpha^{(n-1)\cdot(d+1)}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\ (\alpha-1)\cdot\left[\left(\alpha^{d+1}\right)^0+\left(\alpha^{d+1}\right)^1+...+\left(\alpha^{d+1}\right)^{n-1}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\ (\alpha-1)\cdot\frac{\left(\alpha^{d+1}\right)^n-1}{\alpha^{d+1}-1} \quad \text{valable si } \alpha \neq 1, \text{ donc si } d \neq -1.$$

$$= \lim_{n\to\infty}\ \frac{(\alpha-1)}{\alpha^{d+1}-1}\cdot\left(\left(\alpha^{d+1}\right)^n-1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\ \frac{1}{\frac{\alpha^{d+1}-1}{\alpha-1}}\cdot\left(\left(\alpha^n\right)^{d+1}-1\right)$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty}\ \frac{1}{\frac{\alpha^{d+1}-1}{\alpha-1}}\right)\cdot\left(b^{d+1}-1\right) \quad \text{la limite fait apparaître l'inverse de la dérivée de } y = x^{d+1} \text{ en } x = 1.$$

Si n tends vers l'infini, alors α tends vers 1 et la première limite égale $1/(d+1)$.

Conclusion : $\boxed{A_d(b) = \int_1^b x^d \, dx = \frac{1}{d+1}\cdot\left(b^{d+1}-1\right)}$ pour $d \neq -1$.

Ceci confirme les résultats des appendices précédents ! Pour $d = -1$, regardez l'appendice suivant.

Remarquez que la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{d+1}\cdot\left(x^{d+1}-1\right)$ égale x^d.

Appendice IV : calcul d'aire sous $y = 1/x$.

Le but de ce qui suit est de calculer l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la droite verticale d'équation $x = 1$, la droite verticale d'équation $x = b$ et la courbe de $f(x) = \frac{1}{x}$.

Notons $A_{-1}(b)$ cette aire.

Avec la notation des intégrales : $A_{-1}(b) = \int_1^b \frac{1}{x}\,dx$.

L'idée principale est la même que précédemment, c'est à dire de découper l'intervalle $[1 ; b]$ suivant une suite géométrique.

Pour calculer l'aire désirée, pour $b \neq 1$, posons : (pour $b \in \,]0 ; 1[$, la démarche reste valable)
n un grand nombre entier, $\alpha = \sqrt[n]{b}$ et $x_k = \alpha^k$ $k = 0, 1, 2, ..., n$.

Donc : $x_0 = \alpha^0 = 1$ et $x_n = \alpha^n = b$.

Découpons selon des intervalles de largeur $x_{k+1} - x_k = \alpha^{k+1} - \alpha^k = \alpha^k \cdot (\alpha - 1)$

$\alpha = \sqrt[n]{b}$ tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini, donc $x_{k+1} - x_k$ tend vers 0 si $n \to \infty$.

On a :

$$A_{-1}(b) = \lim_{n\to\infty}\left[(x_1 - x_0)\cdot f(x_0) + (x_2 - x_1)\cdot f(x_1) + ... + (x_n - x_{n-1})\cdot f(x_{n-1})\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\alpha^0\cdot(\alpha-1)\cdot\frac{1}{\alpha^0} + \alpha^1\cdot(\alpha-1)\cdot\frac{1}{\alpha^1} + \alpha^2\cdot(\alpha-1)\cdot\frac{1}{\alpha^2} + ... + \alpha^{n-1}\cdot(\alpha-1)\cdot\frac{1}{\alpha^{n-1}}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\alpha - 1)\cdot n$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot(\sqrt[n]{b} - 1)$$

Pour calculer cette limite, posons $x = \frac{1}{n}$, qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

$A_{-1}(b) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot(b^x - 1)$ c'est la dérivée de $y = b^x$ en $x = 0$.

$\left(b^x\right)' = \left(e^{x\cdot\ln(b)}\right)' = \ln(b)\cdot e^{x\cdot\ln(b)}$ qui vaut $\ln(b)$ pour $x = 0$.

Conclusion : $\boxed{A_{-1}(b) = \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \ln(b)}$ Remarquez que la dérivée de : $x \mapsto \ln(x)$ égale $1 / x$.

En choisissant un découpage astucieux de l'intervalle d'intégration, on a pu calculer l'aire sous n'importe quelle courbe de la forme $y = x^d$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Montrons que $\boxed{A_{-1}(b) = A_{-1}(a\cdot b) - A_{-1}(a)}$, qui est la propriété fondamentale des logarithmes.

$A_{-1}(b) = \int_1^b \frac{1}{x}\,dx$ et $A_{-1}(a\cdot b) - A_{-1}(a) = \int_a^{a\cdot b} \frac{1}{x}\,dx$

A un découpage de $[1 ; b]$ en par x_0 ; x_1 ; x_2 ; x_3 ; ... ; x_n, correspond un découpage de $[a ; a{\cdot}b]$ par $a{\cdot}x_0$; $a{\cdot}x_1$; $a{\cdot}x_2$; $a{\cdot}x_3$; ... ; $a{\cdot}x_n$.

L'aire du rectangle de base $x_{k+1} - x_k$ est $(x_{k+1} - x_k)\cdot\frac{1}{x_k}$.

L'aire du rectangle de base $a{\cdot}x_{k+1} - a{\cdot}x_k$ est $(a{\cdot}x_{k+1} - a{\cdot}x_k)\cdot\frac{1}{a\cdot x_k}$ qui est la même que précédemment.

Donc les deux aires $A_{-1}(b)$ et $A_{-1}(a\cdot b) - A_{-1}(a)$ sont égales !!!

Appendice V : calcul d'aire sous $y = e^x$.

Le but de ce qui suit est de calculer l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la droite verticale d'équation $x = 0$, la droite verticale d'équation $x = b$ et la courbe de $f(x) = e^x$.
Notons $E(b)$ cette aire.

Avec la notation des intégrales : $E(b) = \int_0^b e^x \, dx$.

Pour calculer l'aire désirée, pour $b \neq 0$, posons : (pour $b < 0$, la démarche reste valable)
N un grand nombre entier, $h = \dfrac{b}{N}$ et $x_k = k \cdot h \quad k = 0, 1, 2, ..., N$.
Donc : $x_0 = 0 \cdot h = 0$ et $x_n = N \cdot h = b$.
Découpons selon des intervalles de largeur h.
On a :

$$E(b) = \lim_{N\to\infty} \left[(x_1 - x_0) \cdot f(x_0) + (x_2 - x_1) \cdot f(x_1) + ... + (x_N - x_{N-1}) \cdot f(x_{N-1}) \right]$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left[h \cdot e^{0 \cdot h} + h \cdot e^{1 \cdot h} + h \cdot e^{2 \cdot h} + ... + h \cdot e^{(N-1) \cdot h} \right]$$

$$= \lim_{N\to\infty} \ h \cdot \left[\left(e^h\right)^0 + \left(e^h\right)^1 + \left(e^h\right)^2 + ... + \left(e^h\right)^{(N-1)} \right]$$

$$= \lim_{N\to\infty} \ h \cdot \frac{e^{N \cdot h} - 1}{e^h - 1} = \lim_{N\to\infty} \ h \cdot \frac{e^b - 1}{e^h - 1} = \lim_{h\to 0} \ h \cdot \frac{e^b - 1}{e^h - 1}$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} \ \frac{h}{e^h - 1} \right) \cdot (e^b - 1) = \left(\lim_{h\to 0} \ \frac{1}{\frac{e^h - 1}{h}} \right) \cdot (e^b - 1) = \frac{1}{\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}} \cdot (e^b - 1) = \frac{1}{\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h - e^0}{h - 0}} \cdot (e^b - 1)$$

Cette limite fait intervenir l'inverse de la dérivée de $y \to e^x$ en $x = 0$.
La dérivée de e^x étant e^x, la limite vaut $e^0 = 1$.

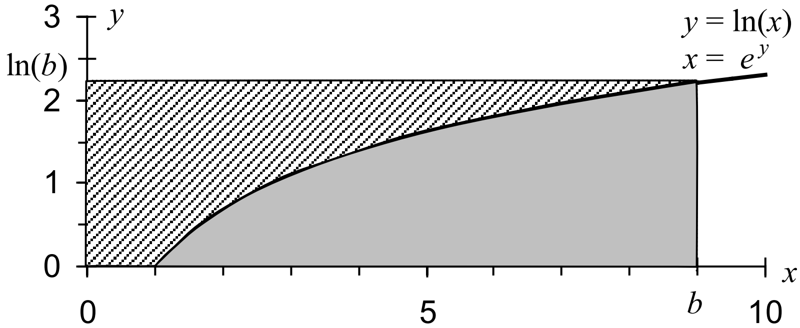
Conclusion : $\boxed{E(b) = \int_0^b e^x \, dx = e^b - 1}$

Remarquez que la dérivée de la fonction $x \mapsto e^x - 1$ égale e^x.

Appendice VI : calcul d'aire sous $y = \ln(x)$.

Le but de ce qui suit est de calculer l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la droite verticale d'équation $x = 1$, la droite verticale d'équation $x = b$ et la courbe de $f(x) = \ln(x)$.
Notons $L(b)$ cette aire. La méthode est similaire à celle de l'appendice II.

Avec la notation des intégrales : $L(b) = \int_1^b \ln(x)\,dx$.



L'aire hachurée est l'aire sous l'exponentielle d'équation $x = e^y$, y variant entre 0 et $\ln(b)$.
Donc selon l'appendice V, l'aire hachurée égale : $e^{\ln(b)} - 1 = b - 1$.

L'aire grise égale l'aire cherchée.
Elle vaut l'aire du rectangle de base b et de hauteur $\ln(b)$, moins l'aire hachurée.

$$L(b) = \int_1^b \ln(x)\,dx = b \cdot \ln(b) - (b-1) = b \cdot (\ln(b) - 1) + 1.$$

Il est bon de vérifier que pour $b = 1$, l'égalité est correcte.

Conclusion : $\boxed{\int_1^b \ln(x)\,dx = b \cdot (\ln(b) - 1) + 1}$

Remarquez que la dérivée de la fonction $x \mapsto x \cdot (\ln(x) - 1) + 1$ égale $\ln(x)$.

Appendice VII : calcul d'aire sous $y = \cos(x)$.

Le but de ce qui suit est de calculer l'aire comprise entre l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite verticale d'équation $x = \alpha$ et la courbe de $f(x) = \cos(x)$.
Notons $C(\alpha)$ cette aire.

Avec la notation des intégrales : $C(\alpha) = \int_0^\alpha \cos(x)\, dx$.

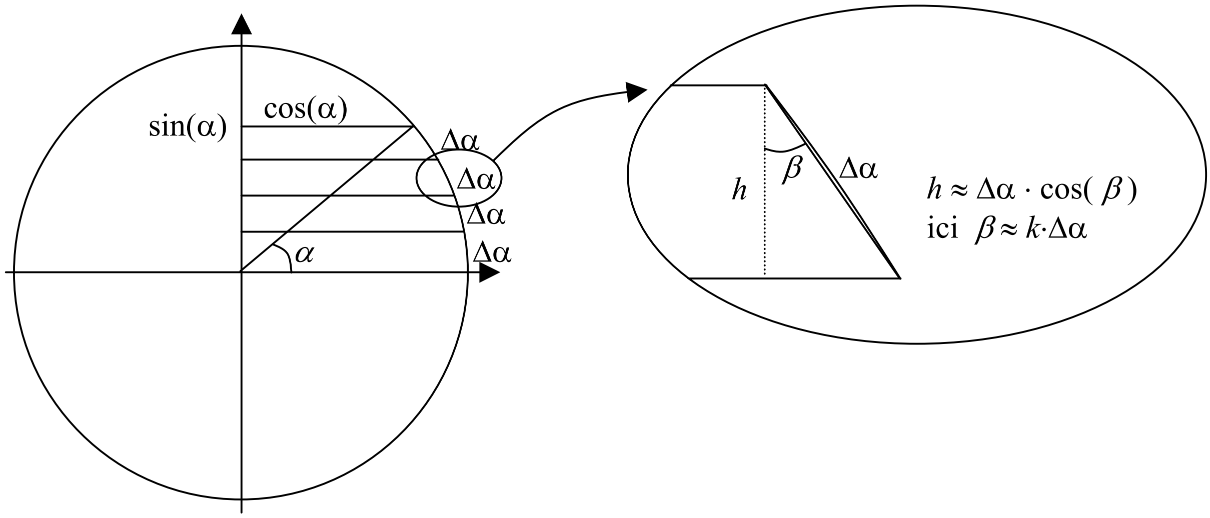
Cette fois, il est compliqué de calculer directement l'intégrale cherchée.

$\sum_{k=0}^{N-1} \cos(k \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$ n'est pas simple à exprimer dans ℝ. (En utilisant les nombres complexes ℂ, la somme se calcule facilement à l'aide de la formule de Moivre.)

Aidons-nous du cercle trigonométrique pour calculer une aire.

Découpons un arc de cercle d'angle α en N arcs d'angles : $\Delta\alpha = \frac{\alpha}{N}$.

Découpons des bandes presque trapézoïdales comme ci-dessous.
Le $k^{\text{ème}}$ trapèze a une grande base égale à $\cos(k\cdot\Delta\alpha)$, une petite base égale à $\cos((k + 1)\cdot\Delta\alpha)$, et une hauteur essentiellement égale à $h = \Delta\alpha \cdot \cos(k\cdot\Delta\alpha)$.



L'aire du $k^{\text{ème}}$ trapèze vaut donc : $\frac{\cos(k \cdot \Delta\alpha) + \cos((k+1) \cdot \Delta\alpha)}{2} \cdot \Delta\alpha \cdot \cos(k \cdot \Delta\alpha)$

Quand $\Delta\alpha$ est très petit, $\cos((k + 1)\cdot\Delta\alpha) \approx \cos(k\cdot\Delta\alpha)$ et donc

L'aire du $k^{\text{ème}}$ trapèze est presque égale à : $\Delta\alpha \cdot \cos^2(k \cdot \Delta\alpha)$. Rappelons que : $\Delta\alpha = \frac{\alpha}{N}$

La somme des aires de ces trapèzes s'exprime ainsi :

$\Delta\alpha \cdot [\cos^2(0\cdot\Delta\alpha) + \cos^2(1\cdot\Delta\alpha) + \cos^2(2\cdot\Delta\alpha) + ... + \cos^2((N - 1)\cdot\Delta\alpha)]$

Cette aire est presque égale à l'aire du secteur d'angle α plus l'aire du triangle de base $\cos(\alpha)$ et de hauteur $\sin(\alpha)$. A la limite, il y a égalité.

L'aire du secteur d'angle α vaut : $\frac{\alpha}{2}$. L'aire du triangle vaut : $\frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$.

Donc $\frac{\alpha + \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{2} = \lim_{N\to\infty} \frac{\alpha}{N} \cdot \left[\cos^2\left(0 \cdot \frac{\alpha}{N}\right) + \cos^2\left(1 \cdot \frac{\alpha}{N}\right) + \cos^2\left(2 \cdot \frac{\alpha}{N}\right) + ... + \cos^2\left((N-1) \cdot \frac{\alpha}{N}\right) \right]$

La limite est une intégrale. Cela signifie que : $\boxed{\int_0^\alpha \cos^2(x)\, dx = \frac{\alpha + \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{2}}$

Ce n'est pas exactement l'intégrale cherchée, mais c'est un résultat qui aidera.

Pour calculer l'aire désirée : $C(b) = \int_0^b \cos(x)\,dx$, utilisons la relation : $\cos(x) = 2\cdot\cos^2(x/2) - 1$

$$C(b) = \int_0^b \cos(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \frac{\alpha}{N}\cdot\left[\cos\left(0\cdot\frac{\alpha}{N}\right) + \cos\left(1\cdot\frac{\alpha}{N}\right) + \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{N}\right) + \ldots + \cos\left((N-1)\cdot\frac{\alpha}{N}\right)\right]$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{\alpha}{N}\cdot\left[2\cdot\cos^2\left(0\cdot\frac{\alpha}{2N}\right) - 1 + 2\cdot\cos^2\left(1\cdot\frac{\alpha}{2N}\right) - 1 + 2\cdot\cos^2\left(2\cdot\frac{\alpha}{2N}\right) - 1 + \ldots + 2\cdot\cos^2\left((N-1)\cdot\frac{\alpha}{2N}\right) - 1\right]$$

$$= \lim_{N\to\infty} 2\cdot\frac{\alpha}{2N}\cdot 2\cdot\left[\cos^2\left(0\cdot\frac{\alpha}{2N}\right) + \cos^2\left(1\cdot\frac{\alpha}{2N}\right) + \cos^2\left(2\cdot\frac{\alpha}{2N}\right) + \ldots + \cos^2\left((N-1)\cdot\frac{\alpha}{2N}\right)\right] - \frac{\alpha}{N}\cdot N$$

$$= 4\cdot\left[\frac{\frac{\alpha}{2} + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2}\right] - \alpha$$

$$= 2\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin(\alpha)$$

Conclusion : $\boxed{\int_0^\alpha \cos(x)\,dx = \sin(\alpha)}$

Remarquez que la dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ égale $\cos(x)$.

Avec ce résultat, il est facile de calculer : $\int_0^\alpha \sin(x)\,dx$, en utilisant $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$.

$$\int_0^\alpha \sin(x)\,dx = \int_0^\alpha \cos(x - \pi/2)\,dx = \int_{-\pi/2}^{\alpha-\pi/2} \cos(x)\,dx = \int_0^{\alpha-\pi/2} \cos(x)\,dx - \int_0^{-\pi/2} \cos(x)\,dx$$
$$= \sin(\alpha - \pi/2) - \sin(-\pi/2) = -\cos(\alpha) + 1$$

Conclusion : $\boxed{\int_0^\alpha \sin(x)\,dx = -\cos(\alpha) + 1}$

Vérifiez que pour $\alpha = 0$, l'égalité est correcte.

Remarquez que la dérivée de la fonction $x \mapsto -\cos(x) + 1$ égale $\sin(x)$.

En suivant les méthodes des appendices II et VI, il est facile de calculer : $\int_0^b \arccos(x)\,dx$, ainsi que $\int_0^b \arcsin(x)\,dx$.

On trouve que : $\boxed{\int_0^b \arccos(x)\,dx = b\cdot\arccos(b) - \sqrt{1-b^2} + 1}$

et $\boxed{\int_0^b \arcsin(x)\,dx = b\cdot\arcsin(b) + \sqrt{1-b^2} - 1}$