❶ Les abscisses des intersections sont : $x = 0$ et $x = 1$. $A_1 = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2\, dx = \left[\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\cdot x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

Pour A_2 :

Les abscisses des intersections sont : $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{4}$, car $\cos(x) = \sin(x)$ en ces deux valeurs.

$$A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) - \sin(x)\, dx = \left[\sin(x) + \cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(0) - \cos(0) =$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 \underline{\underline{= \sqrt{2} - 1}}$$

<u>Pour A_3 :</u> calculons les abscisses des intersections.

Il faut que $x^2 = 3 - x^2 \iff 2x^2 = 3 \iff x^2 = \frac{3}{2} \iff x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1,2247$ en accord avec le graphique.

$$A_3 = \int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} (3 - x^2) - x^2\, dx = \int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} 3 - 2x^2\, dx = \left[3x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \left[3\cdot\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\cdot\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3\right]\cdot 2 =$$

$$A_3 = 2\cdot\left[3\cdot\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right] = 2\cdot\left[2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\right] \underline{\underline{= 2\cdot\sqrt{6} \approx 4,898979}}$$

On peut vérifier sur le graphique que la réponse est plausible !

<u>Pour A_4 :</u> calculons les abscisses des intersections.

Il faut que $1 - x^2 = x^2 - 2 \iff 2x^2 = 3 \iff x^2 = \frac{3}{2} \iff \underline{\underline{x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} = \pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}}} \approx \pm 1,2247$

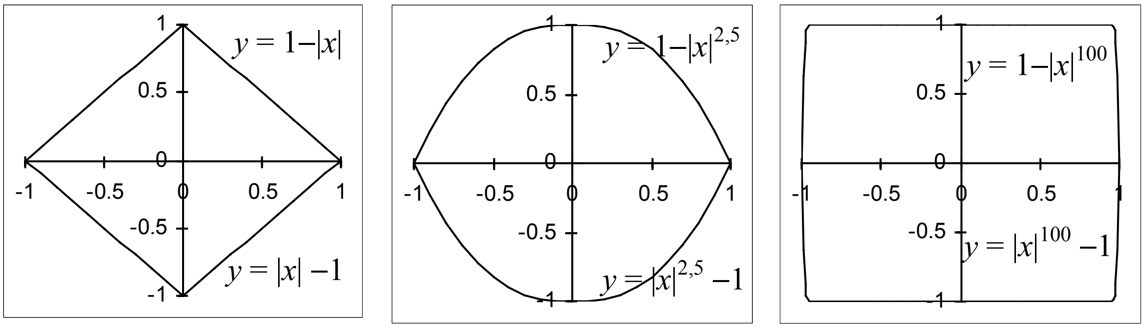
C'est exactement le même problème que le précédent, avec un décalage vers le bas de 2 unités.
Les graphiques diffèrent en apparence, car l'échelle de l'axe des abscisses diffère.
Donc $A_4 = A_3 \approx 4,898979$

<u>Pour A_5 :</u> les abscisses des intersections sont $x = -1$ et $x = 1$, c'est facile à voir.

$$A_5 = \int_{-1}^{1} \left(1 - x^a - (x^a - 1)\right) dx = 2\cdot\int_{-1}^{1} \left(1 - x^a\right) dx = 2\cdot\left[x - \frac{1}{a+1}\cdot x^{a+1}\right]_{-1}^{1} \underline{\underline{= 4\cdot\left[1 - \frac{1}{a+1}\right]}}$$

Pour $a = 10$; $a = 100$ et $a = 1'000$, il suffit de remplacer a par sa valeur dans l'expression ci–dessus.
Si a est pair et tend vers l'infini, la surface tend vers un carré de côtés 2, l'aire A_5 tend vers 4.
Si a est impair, la surface est différente.
Si a est non entier, la discussion est plus compliquée, car pour une infinité de ces valeurs, la fonction $f(x) = x^a$ n'est pas définie sur $[-1 ; 0]$.

❷ On considère les deux fonctions : $f(x)=1-|x|^c$ et $g(x)=|x|^c-1$.

a) 

b) Aire(c) = $\int_{-1}^{1}\left(1-|x|^c-\left(|x|^c-1\right)\right)dx = 2\cdot\int_{-1}^{1}\left(1-|x|^c\right)dx = 4\cdot\int_{0}^{1}\left(1-x^c\right)dx = 4\cdot\left[x-\frac{x^{c+1}}{c+1}\right]_0^1 = \underline{\underline{4-\frac{4}{c+1}}}$

c) Pour $c=1$, Aire(1) = $4-\frac{4}{2}=2$. C'est l'aire d'un losange de diagonales de longueurs 2.

d) La question revient à trouver c tel que : $4-\frac{4}{c+1}=2,75$, donc

$\frac{4}{c+1}=1,25 \quad\Leftrightarrow\quad c+1=\frac{4}{1,25} \quad\Leftrightarrow\quad c=\frac{4}{1,25}-1=\underline{\underline{2,2=c}}$

f et g sont proches du graphique du milieu ci-dessus.

e) $\lim\limits_{c\to\infty} Aire(c) = \lim\limits_{c\to\infty} 4-\frac{4}{c+1}=4$. C'est l'aire du carré vers lequel tendent les courbes des fonctions f et g, lorsque c tend vers l'infini.

Il est intéressant de noter que lorsque c tend vers 0^+, l'aire tend également vers 0^+.

---

❸ Le volume d'un cylindre de base de rayon R et de hauteur h vaut :

$\pi\cdot\int_0^h R^2\,dx=\pi\cdot R^2\cdot\int_0^h 1\,dx=\pi\cdot R^2\cdot h$, attention, on intègre la fonction constante : $f^2(x)=R^2$.

C'est bien le volume d'un cylindre : base fois hauteur.

---

❹ Le volume d'un cône généré par la fonction $f(x)=a\cdot x$ vaut :

$$\pi\cdot\int_0^h (a\cdot x)^2\,dx=\pi\cdot a^2\cdot\int_0^h x^2\,dx=\pi\cdot a^2\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^h=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot a^2\cdot h^3=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(a\cdot h)^2\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot R^2\cdot h$$

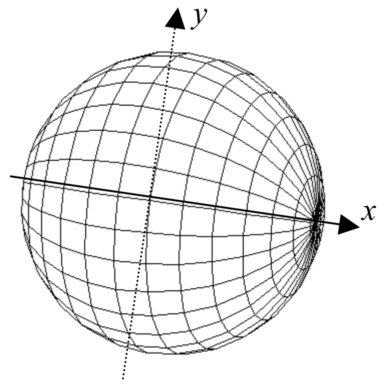
Le rayon R de base vaut : $R=f(h)=a\cdot h$. Autrement dit, $a=\frac{R}{h}$

On retrouve volume d'un cône : un tiers fois base fois hauteur.

---

❺ Volume engendré par $f_1 = \sqrt{r^2 - x^2}$

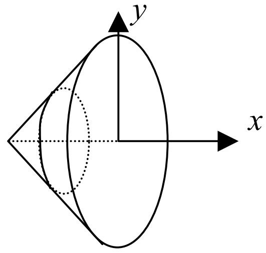
Volume = $\pi \cdot \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 \; dx = \pi \cdot \left[r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} = \pi \cdot \left[r^3 - \frac{r^3}{3} - r^2 \cdot (-r) + \frac{(-r)^3}{3} \right] =$



Volume = $\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3$

On retrouve bien le volume d'une sphère de rayon r : Volume = $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Le deuxième volume est celui d'un cône de hauteur $h = 2$ et rayon $r = 1$

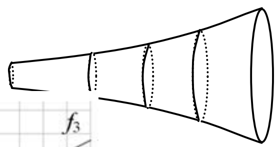


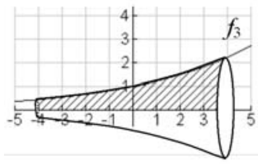
Volume = $\pi \cdot \int_{0}^{2} \frac{1}{4} x^2 \; dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \underline{\underline{\pi \cdot \frac{2}{3}}}$.

Remarquons qu'on retrouve le volume d'un cône : $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$.

Volume du 3ème corps :

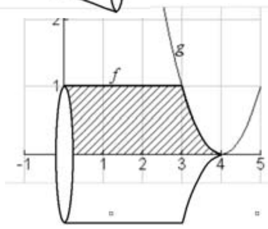
$$V = \pi \cdot \int_{-4}^{4} \left(e^{\frac{x}{5}} \right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-4}^{4} e^{\frac{2}{5}x} \; dx = \pi \cdot \left[\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{2}{5}x} \right]_{-4}^{4} = \frac{5\pi}{2} \cdot \left[e^{\frac{8}{5}} - e^{-\frac{8}{5}} \right] \approx 37,315$$





Volume du 4ème corps :

$$V = \pi \cdot \int_0^3 1^2 \; dx + \pi \cdot \int_3^4 (x-4)^4 \; dx = \pi \cdot 3 + \pi \cdot \left[\frac{1}{5} \cdot (x-4)^5 \right]_3^4 = 3\pi + \frac{\pi}{5} = \frac{16\pi}{5} \approx 10,053$$



❻ Volume = $\pi \cdot \int_{-1}^{1} x^2 - x^4 \; dx = \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{1} = \pi \cdot \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right] \cdot 2 = \frac{4\pi}{15} \approx 0,837758$

❼ a) Volume = $\pi \cdot \int_1^a x^{-2} \; dx = \pi \cdot \left[\frac{-1}{x} \right]_1^a = \pi \cdot \left[\frac{-1}{a} + 1 \right] = \pi \cdot \left[1 - \frac{1}{a} \right]$

b) Ce volume tend vers π lorsque a tend vers l'infini.

c) L'aire hachurée = $\int_1^a \frac{1}{x} \, dx = [\ln(x)]_1^a = \ln(a)$

d) Cette aire tends vers l'infini lorsque a tend vers l'infini.

Puisque cette aire correspond à celle d'une tranche du corps de révolution, elle est plus petite que l'aire latérale.
En conséquence, lorsque a tend vers l'infini, le volume de ce corps tend vers π, alors que l'aire latérale tend vers l'infini. On obtient un corps de volume fini mais nécessitant une infinité de papier pour l'emballer !