

❶ Réponses :

$$1. \quad I_1 = \int_{-2}^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{16}{3}$$

$$2. \quad I_2 = \int_0^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{81}{4}$$

$$3. \quad I_3 = \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \left(1 - \frac{1^3}{3} \right) - \left((-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

$$4. \quad I_4 = \int_1^2 (x^2 - x) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} \right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} \right) = \frac{5}{6}$$

$$5. \quad I_5 = \int_{-1}^3 (9-x^2) dx = \left(9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^3 = \left(9 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} \right) - \left(9 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) = \frac{80}{3}$$

$$6. \quad I_6 = \int_0^2 (8-x^3) dx = \left(8x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = \left(8 \cdot 2 - \frac{2^4}{4} \right) - \left(8 \cdot 0 - \frac{0^4}{4} \right) = 12$$

$$7. \quad I_7 = \int_1^3 (x^3 - x^2) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^3 = \left(\frac{3^4}{4} - \frac{3^3}{3} \right) - \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3} \right) = \frac{34}{3}$$

$$8. \quad I_8 = \int_{-1}^2 3 \cdot (x-2)^2 dx = (x-2)^3 \Big|_{-1}^2 = (2-2)^3 - (-1-2)^3 = 27$$

$$9. \quad I_9 = \int_0^1 (1+x-x^2) dx = \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \left(1 + \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) - \left(0 + \frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} \right) = \frac{7}{6}$$

$$10. \quad I_{10} = \int_0^\pi (1 + \sin(x)) dx = (x - \cos(x)) \Big|_0^\pi = (\pi - \cos(\pi)) - (0 - \cos(0)) = \pi + 2$$

$$11. \quad I_{11} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = \sin(x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$12. \quad I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \cdot \cos(2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2} \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot 0)\right) = \frac{1}{2}$$

❷ Solutions :

$$1. \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) dx = \left[-\frac{1}{2} \cos(2x) \right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{2} \cdot (\cos(2\pi) - \cos(-2\pi)) = -\frac{1}{2} \cdot (1 - 1) = 0$$

$$2. \quad \int_{-11}^2 \sqrt[3]{5-2x} dx = \int_{-11}^2 (5-2x)^{\frac{1}{3}} dx = \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{-2} (5-2x)^{\frac{4}{3}} \right]_{-11}^2 = \frac{-3}{8} \cdot \left\{ (5-4)^{\frac{4}{3}} - (5+22)^{\frac{4}{3}} \right\} = \frac{-3}{8} \cdot \{1 - 81\} = 30$$

$$3. \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin(4x) - 5 \cos(x)) dx = \left[-\frac{1}{4} \cos(4x) - 5 \sin(x) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$\left\{ \left[-\frac{1}{4} \cos(4\pi) - 5 \sin(\pi) \right] - \left[-\frac{1}{4} \cos\left(-\frac{4\pi}{2}\right) - 5 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] \right\} = \left\{ \left[-\frac{1}{4} - 0 \right] - \left[-\frac{1}{4} - (-5) \right] \right\} = -5$$

4.	$\int_0^1 \frac{x^3 + 1}{(x^4 + 4x + 1)^2} dx = \frac{-(x^4 + 4x + 1)^{-1}}{4} \Big _0^1 = \frac{-1}{4 \cdot (x^4 + 4x + 1)} \Big _0^1 = \frac{-1}{4 \cdot (1^4 + 4 \cdot 1 + 1)} - \frac{-1}{4 \cdot (0^4 + 4 \cdot 0 + 1)} =$ $\frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot 6} = \frac{5}{24}$
5.	$\int_1^3 (8 - x^3) dx = \left[8x - \frac{1}{4}x^4 \right]_1^3 = \left[24 - \frac{81}{4} \right] - \left[8 - \frac{1}{4} \right] = 24 - 8 - \frac{81}{4} + \frac{1}{4} = 16 - \frac{80}{4} = -4$
6.	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos(x) \cdot \sin^2(x) dx = \left[\frac{1}{3} \cdot \sin^3(x) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi} = \frac{1}{3} \cdot \left\{ \left[\sin^3(2\pi) \right] - \left[\sin^3\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] \right\} = \frac{1}{3} \cdot \{ [0] - [-1] \} = \frac{1}{3}$
7.	$\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = \int_{-1}^0 x \cdot (x^2 + 4)^{-\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot (x^2 + 4)^{\frac{1}{2}} \right]_{-1}^0 = (0 + 4)^{\frac{1}{2}} - (1 + 4)^{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{5}$
8.	$\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{7}{5}} 2(3 - 5x)^3 dx = \left[2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{-5} \cdot (3 - 5x)^4 \right]_{\frac{1}{5}}^{\frac{7}{5}} = \frac{-1}{10} \cdot \left\{ \left[(3 - 7)^4 \right] - \left[(3 - 1)^4 \right] \right\} = \frac{-1}{10} \cdot \{ [256] - [16] \} = -24$
9.	$\int_0^1 (x^2 - 1)(x^3 - 3x)^4 dx = \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot (x^3 - 3x)^5 \right]_0^1 = \frac{1}{15} \cdot \left\{ \left[(1^3 - 3)^5 \right] - \left[(0^3 - 0)^5 \right] \right\} = \frac{1}{15} \cdot \{ [-32] - [0] \} = \frac{-32}{15}$
10.	$\int_1^8 \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} - 3\sqrt{x} \right) dx = \int_1^8 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{1} \cdot x^{\frac{1}{2}} - 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \right]_1^8 = \left[\sqrt{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot x^{\frac{3}{2}} \right]_1^8 =$ $\left[2^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot 8^{\frac{3}{2}} \right] - \left[\sqrt{2} \cdot 1^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot 1^{\frac{3}{2}} \right] = \left[4 - 2 \cdot 8 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \right] - \left[\sqrt{2} - 2 \right] = 4 - 32 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} + 2 = 6 - 33 \cdot \sqrt{2}$
11.	$\int_{-2}^1 \frac{3x^2 - 5x}{2x} dx = \int_{-2}^1 (1,5x - 2,5) dx = \left[1,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 - 2,5x \right]_{-2}^1 = \left[0,75 \cdot 1^2 - 2,5 \right] - \left[0,75 \cdot 4 + 5 \right] =$ $0,75 - 2,5 - 3 - 5 = -9,75$
12.	$\int_{-\pi/2}^{\pi} -\sin(x) \cdot \cos(x) dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \cos^2(x) \right]_{-\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \cos^2(\pi) - \cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right\} = \frac{1}{2} \cdot \{ (-1)^2 - 0^2 \} = 0,5$
13.	$\int_2^4 e^{x/2} dx = \left[2 \cdot e^{\frac{x}{2}} \right]_2^4 = 2 \cdot \left\{ e^{\frac{4}{2}} - e^{\frac{2}{2}} \right\} = 2 \cdot (e^2 - e)$
14.	$\int_1^5 \frac{1}{3x} dx = \int_1^5 \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} \cdot \int_1^5 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} \cdot \left[\ln x \right]_1^5 = \frac{1}{3} \cdot \{ \ln(5) - \ln(1) \} = \frac{\ln(5)}{3}$
15.	$\int_{-3}^2 x \cdot e^{-2x^2} dx = \left[\frac{-1}{4} \cdot e^{-2x^2} \right]_{-3}^2 = \frac{-1}{4} \cdot \{ e^{-2 \cdot 4} - e^{-2 \cdot 9} \} = \frac{e^{-18} - e^{-8}}{4}$
16.	$\int_{-2}^0 \frac{x}{x^2 + 3} dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 3) \right]_{-2}^0 = \frac{1}{2} \cdot \{ \ln(3) - \ln(7) \} = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{3}{7}\right) = \ln\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \ln\sqrt{\frac{3}{7}}$ Réponses au choix !

$$\int_2^4 \frac{4x+4}{x^2+2x+3} dx = \int_2^4 2 \cdot (2x+2) \cdot (x^2+2x+3)^{-1} dx = 2 \cdot \left[\ln(x^2+2x+3) \right]_2^4 =$$

$$17. \quad 2 \cdot \left\{ \left[\ln(16+8+3) \right] - \left[\ln(4+4+3) \right] \right\} =$$

$$2 \cdot \left\{ \ln(27) - \ln(11) \right\} = 2 \cdot \ln\left(\frac{27}{11}\right)$$

$$18. \quad \int_{-2}^0 \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{x^2+x} dx = \int_{-2}^0 \frac{1}{2} \cdot (2x+1) e^{x^2+x} dx = \frac{1}{2} \cdot \left[e^{x^2+x} \right]_{-2}^0 = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left[e^0 \right] - \left[e^{4-2} \right] \right\} = \frac{1-e^2}{2}$$

$$\textcircled{3} \quad \int_{-2}^k (-2x+3) dx = \left(-x^2+3x\right) \Big|_{-2}^k = -k^2+3k+10 = -8$$

$$\Rightarrow -k^2+3k+18=0 \Rightarrow (k-6)(k+3)=0 \Rightarrow k=-3 \quad \text{ou} \quad k=6$$

$$\textcircled{4} \quad 1. \quad \text{La résolution : } \int_{-2}^2 \frac{-1}{x^2} dx = \int_{-2}^2 -x^{-2} dx = x^{-1} \Big|_{-2}^2 = \frac{1}{x} \Big|_{-2}^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{-2} = 1 \quad \text{est fausse, car la fonction } y = \frac{-1}{x^2}$$

s'annule en $x=0$. Elle n'est donc pas continue et le théorème fondamental ne s'applique pas. Cette intégrale n'est pas définie !

$$2. \quad \text{La résolution : } \int_1^3 \frac{2x-1}{(x^2-x-2)^2} dx = \left(x^2-x-2\right)^{-1} \Big|_1^3 = \dots \quad \text{est fausse, car la fonction à intégrer}$$

s'annule en $x=2$ qui se trouve dans l'intervalle $[1; 3]$. Elle n'est donc pas continue et le théorème fondamental ne s'applique pas. Cette intégrale n'est pas définie !

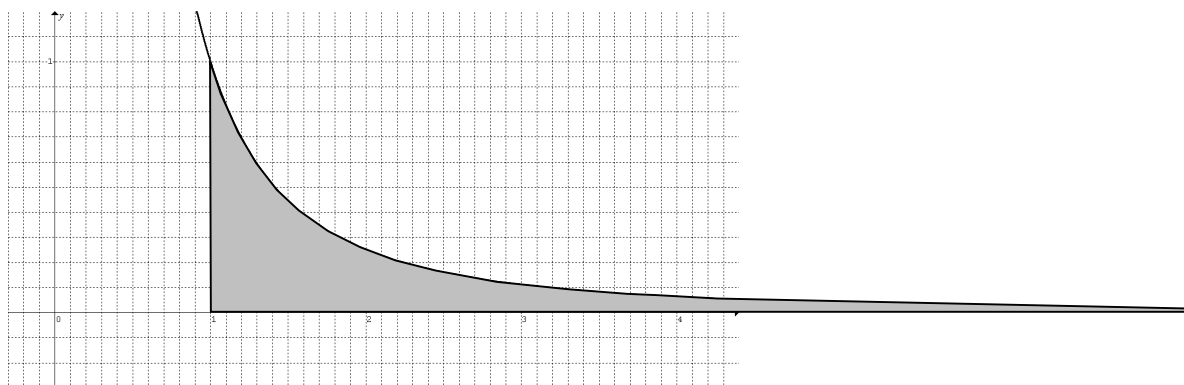
3. La fonction à intégrer tend vers l'infini lorsque x tend vers 0, et elle n'est pas continue en 0. Malgré cela, l'intégration sans réfléchir donne un résultat qui a un sens.

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{2}{3}} \Big|_0^8 = \frac{3}{2} \cdot 8^{\frac{2}{3}} - 0 = 6 \quad \text{est un résultat correct.}$$

4. Malgré que la borne supérieure ne soit pas un nombre, cette intégrale peut se faire sans difficultés

$$\text{particulières : } \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^\infty = -\frac{1}{\infty} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1. \quad \text{L'interprétation géométrique est jolie :}$$

le périmètre de la surface est infini, mais l'aire de la surface est finie et d'aire égale à 1 !



$$5. \quad \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x} \Big|_1^\infty = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\infty} - \frac{1}{2} = \infty. \quad \text{Cette fois-ci, l'aire est infinie}$$

6. $\int_0^\infty \sin(x) dx$ Cette intégrale n'a pas une valeur définie, car la fonction sinus oscille périodiquement. L'aire "sous la courbe" oscille aussi en fonction de la borne supérieure de l'intégrale.

5 Problèmes

1.a Non, les débits sont toujours des fonctions positives $f(t) \geq 0$ et $g(t) \geq 0$ pour tout t .

1.b La quantité d'eau entrée dans le lac entre les temps t_0 et t_1 égale $\int_{t_0}^{t_1} f(t) dt$.

1.c La quantité d'eau sortie dans le lac entre les temps t_0 et t_1 égale $\int_{t_0}^{t_1} g(t) dt$.

1.d La variation d'eau dans le lac entre les temps t_0 et t_1 égale $\int_{t_0}^{t_1} (f(t) - g(t)) dt$.

1.e La variation totale d'eau dans le lac entre les temps $t_0 = 0$ jours et $t_1 = 30$ jours égale

$$\int_{t_0}^{t_1} (f(t) - g(t)) dt = \int_0^{30} \left(10 - \frac{1}{2}t - 2 \cdot \sin(2\pi t) \right) dt = \left(10 \cdot t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{\pi} \cos(2\pi t) \right) \Bigg|_0^{30} = 75 \text{ méga litres.}$$

2. Après 2 heures, la consommation totale de carburant sera de : $\int_0^2 \left(4 - \frac{2}{1+t} \right) dt =$

$$4t + 2 \cdot \ln(1+t) \Big|_0^2 = 8 + 2 \cdot \ln(3) - (0 + \ln(1)) \cong 10,197 \text{ litres.}$$

3.a On connaît la dérivée de la fonction cherchée $T(t)$, donc $T(t)$ est une primitive de

$$T'(t) = -7 \cdot e^{-\frac{t}{10}}. \quad T(t) = \int -7 \cdot e^{-\frac{t}{10}} dt = 70 \cdot e^{-\frac{t}{10}} + C \quad \text{où } C \text{ est la constante d'intégration.}$$

On sait que $T(0) = 90^\circ\text{C}$ et que $T(0) = 70 \cdot e^{-\frac{0}{10}} + C = 70 + C$, donc

$$90 = 70 + C. \quad \text{On en déduit que } C = 20^\circ\text{C} \text{ et donc que } T(t) = 70 \cdot e^{-\frac{t}{10}} + 20^\circ\text{C}.$$

b) La température après 20 minutes est de $T(20) = 70 \cdot e^{-\frac{20}{10}} + 20^\circ\text{C} \approx 29,47^\circ\text{C}$.

La température après 100 minutes est de $T(100) = 70 \cdot e^{-\frac{100}{10}} + 20^\circ\text{C} \approx 20^\circ\text{C}$.

La température de la chambre est de 20°C , c'est celle vers laquelle la température de la tasse tend.

c) On cherche t tel que : $T(t) = 70 \cdot e^{-\frac{t}{10}} + 20^\circ\text{C} = 35^\circ\text{C}$.

$$\text{Il faut donc résoudre l'équation : } 70 \cdot e^{-\frac{t}{10}} = 15. \quad \text{Donc } e^{-\frac{t}{10}} = \frac{15}{70}, \quad -\frac{t}{10} = \ln\left(\frac{15}{70}\right).$$

$$\text{Le temps cherché vaut donc : } t = -10 \cdot \ln\left(\frac{15}{70}\right) \approx 15,4 \text{ minutes.}$$

4.a On connaît la dérivée de la fonction cherchée $N(t)$, donc $N(t)$ est une primitive de

$$N'(t) = 10 \cdot e^{-0,08 \cdot t}. \quad N(t) = \int 10 \cdot e^{-0,08 \cdot t} dt = -125 \cdot e^{-0,08 \cdot t} + C \quad \text{où } C \text{ est la constante d'intégration.}$$

On sait que $N(0) = 75$ et que $N(0) = -125 \cdot e^{-0,08 \cdot 0} + C = -125 + C$, donc

$$75 = -125 + C. \quad \text{On en déduit que } C = 200 \text{ et donc que } N(t) = -125 \cdot e^{-0,08 \cdot t} + 200.$$

b) La population après 10 années est de $N(10) = -125 \cdot e^{-0,8} + 200 \approx 143,8$ mille.

La population après 50 années est de $N(50) = -125 \cdot e^{-4} + 200 \approx 197,7$ mille.

La population tend à se stabiliser vers 200 mille habitants.

4.c On cherche t tel que : $N(t) = -125 \cdot e^{-0,08 \cdot t} + 200 = 150$.

Il faut donc résoudre l'équation : $-125 \cdot e^{-0,08 \cdot t} = -50$. Donc $e^{-0,08 \cdot t} = \frac{50}{125}$, $-0,08 \cdot t = \ln\left(\frac{50}{125}\right)$.

Le temps cherché vaut donc : $t = -\frac{1}{0,08} \cdot \ln\left(\frac{50}{125}\right) \approx 11,45$ années.

4.d Lorsque t devient grand, $N(t)$ se rapproche de 200 mille et ne dépasse jamais cette valeur. Donc le demi million d'habitants ne sera jamais atteint, selon ce modèle.

5. 1 année $\approx$ 52 semaines.

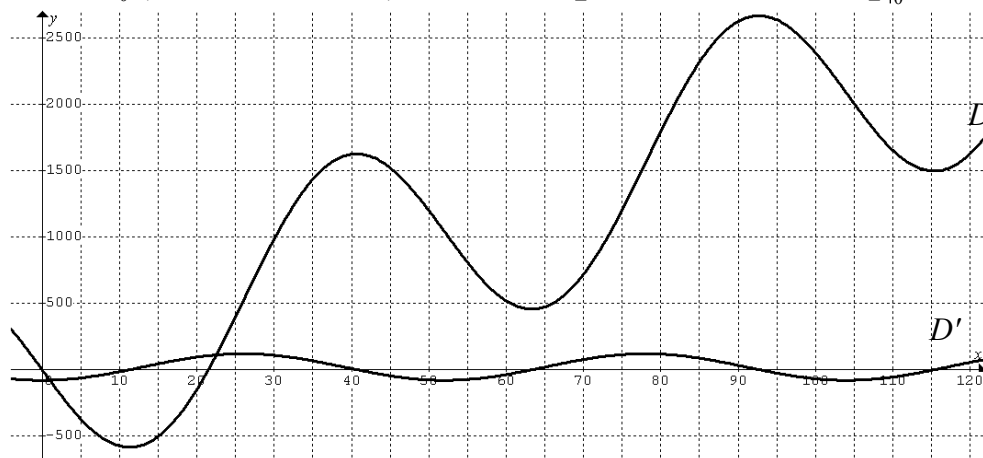
a) Bénéfice de la société sur 52 semaines = revenu sur 52 semaines – dépenses sur 52 semaines =

$$\int_0^{52} \left(100'000 \cdot \left(1,1 - \cos\left(\frac{\pi t}{26}\right) \right) - 90'000 \right) dt = \int_0^{52} \left(20'000 - 100'000 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{26}\right) \right) dt$$

$$= \left(20'000t - \frac{2600'000}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{26}\right) \right) \Big|_0^{52} = 1'040'000 \text{ CHF}$$

b) Pour les calculs des **avoirs** notons : $D(x)$ = " Argent en milliers de CHF disponible à l'instant x ".

$$D(x) = \int_0^x \left(20 - 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{26}\right) \right) dt = D(x) = \left[20t - \frac{2'600}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{26}\right) \right] \Big|_0^x = 20x - \frac{2'600}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{26}\right)$$



c) Cette somme $D(x)$ est maximale lorsque $D'(x) = 0$: $D'(x) = 20 - 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{26}\right)$.

$$D'(x) = 20 - 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{26}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{26}\right) = 0,2 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{26} = \cos^{-1}(0,2) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi x}{26} \approx \pm 1,37 [\text{rad}] + 2k\pi \Leftrightarrow x \approx (\pm 1,37 [\text{rad}] + 2k\pi) \cdot \frac{26}{\pi} \Leftrightarrow x \approx \pm 11,34 + 52 \cdot k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Le maximum est obtenu pour $x \approx -11,34 + 52 \approx 40,66$. Cela se confirme sur le graphique.

La trésorerie est maximale durant le 41^{ème} semaine.

6. a) La position du paquet est définie par :

$$D(T) = \int_0^T \left(2 - 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) \right) dt = \left(2t + \frac{18}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) \right) \Bigg|_0^T =$$

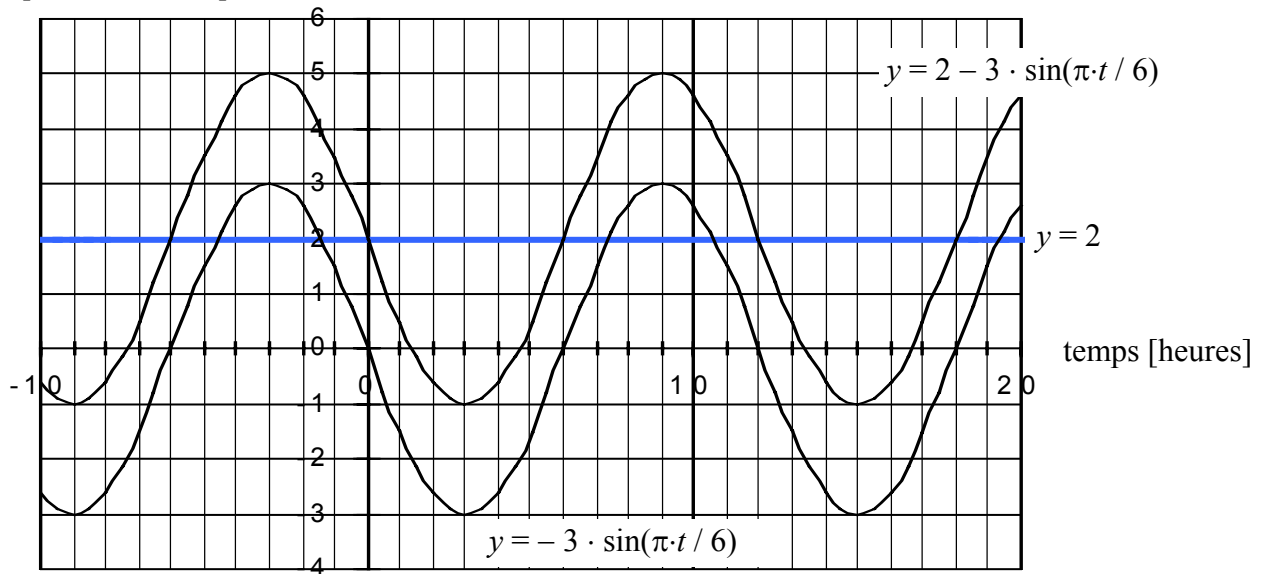
$$D(T) = 2T + \frac{18}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi T}{6}\right) - \left[2 \cdot 0 + \frac{18}{\pi} \cdot \cos(0) \right] \approx 2 \cdot T + 5,730 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot T}{6}\right) - 5,730$$

- b) Après 4 heures, la position est : $D(4) \approx 2 \cdot 4 + 5,730 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 4}{6}\right) - 5,730 = -0,594$ milles.

Les douaniers doivent rechercher le paquet à environ 0,6 milles en amont de l'estuaire.

Ils doivent donc remonter la rivière de 0,6 milles relativement à l'endroit de la fouille du bateau.

vitesses [milles / heures]



Position du paquet en fonction du temps.

