❶ Calculez en valeur exacte les intégrales définies suivantes.

1. $I_1 = \int_{-2}^{2} x^2 dx$	2. $I_2 = \int_{0}^{3} x^3 dx$	3. $I_3 = \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) dx$
4. $I_4 = \int_{1}^{2} \left(x^2 - x\right) dx$	5. $I_5 = \int_{-1}^{3} \left(9 - x^2\right) dx$	6. $I_6 = \int_{0}^{2} \left(8 - x^3\right) dx$
7. $I_7 = \int_{1}^{3} \left(x^3 - x^2\right) dx$	8. $I_8 = \int_{-1}^{2} 3 \cdot \left(x - 2\right)^2 dx$	9. $I_9 = \int_{0}^{1} \left(1 + x - x^2\right) dx$
10. $I_{10} = \int_{0}^{\pi} \left(1 + \sin(x)\right) dx$	11. $I_{11} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx$	12. $I_{12} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)\, dx$

❷ Calculez en valeur exacte les intégrales définies suivantes.

1. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x)\, dx$	2. $\int_{-11}^{2} \sqrt[3]{5 - 2x}\, dx$	3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\sin(4x) - 5 \cdot \cos(x)\right) dx$
4. $\int_{0}^{1} \frac{x^3 + 1}{\left(x^4 + 4x + 1\right)^2} dx$	5. $\int_{1}^{3} \left(8 - x^3\right) dx$	6. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos(x) \cdot \sin^2(x)\, dx$
7. $\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$	8. $\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{7}{5}} 2 \cdot \left(3 - 5x\right)^3 dx$	9. $\int_{0}^{1} \left(x^2 - 1\right) \cdot \left(x^3 - 3x\right)^4 dx$
10. $\int_{1}^{8} \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} - 3 \cdot \sqrt{x}\right) dx$	11. $\int_{-2}^{1} \frac{3x^2 - 5x}{2x} dx$	12. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\sin(x) \cdot \cos(x)\, dx$
13. $\int_{2}^{4} e^{\frac{x}{2}} dx$	14. $\int_{1}^{5} \frac{1}{3x} dx$	15. $\int_{-3}^{2} x \cdot e^{-2x^2} dx$
16. $\int_{-2}^{0} \frac{x}{x^2 + 3} dx$	17. $\int_{2}^{4} \frac{4x + 4}{x^2 + 2x + 3} dx$	18. $\int_{-2}^{0} \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{x^2 + x} dx$

❸ Déterminez la ou les valeur(s) de k telle(s) que $\int_{-2}^{k} \left(-2x + 3\right) dx = -8$

❹ Les intégrales qui suivent comportent des pièges ou des parties spéciales.
A vous de les découvrir et de les mettre en évidence. Les pièges 1 ; 2 et 3 sont à connaître !

1. $\int_{-2}^{2} \frac{-1}{x^2} dx$	2. $\int_{1}^{3} -\frac{2x - 1}{\left(x^2 - x - 2\right)^2} dx$	3. $\int_{0}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$
4. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$	5. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$	6. $\int_{0}^{\infty} \sin(x)\, dx$

❺ **Problèmes**

1. Une ville est alimentée en eau par l'intermédiaire d'un lac de rétention en amont d'un barrage. Soit $f(t)$ le débit à l'entrée du lac et $g(t)$ le débit à la sortie (exprimés en méga litres par jour).

a) f et g peuvent-elles être des fonctions négatives ? nulles ?

b) Trouvez une formule qui représente la quantité totale d'eau entrée dans le lac entre les temps t_0 et t_1.

c) Même question pour la quantité totale qui sort du lac.

d) Même question pour exprimer la variation totale de la quantité d'eau contenue dans le lac durant la même période.

e) Si $f(t)=20-\frac{1}{2}t$ et $g(t)=10+2\cdot\sin(2\pi t)$, calculez la variation totale de la quantité d'eau contenue dans le lac durant les 30 premiers jours.

2. La consommation en carburant d'un bateau à moteur s'élève à $C(t)=4+\frac{2}{1+t}$ litres par heure.

Si le moteur est mis en marche en $t=0$, combien de carburant exactement aura-t-il consommé après 2 heures ?

3. On s'intéresse à la température $T(t)$ d'une tasse d'eau chaude, qui varie en fonction du temps t.
On sait qu'elle satisfait : $T'(t)=-7\cdot e^{-\frac{t}{10}}$ où

T est exprimé en degré centigrade °C, t est exprimé en minutes et au temps $t = 0$ minutes, la température de la tasse est de 90°C.

a) Exprimez la température $T(t)$ de la tasse en fonction du temps.

b) Quelle est la température de la tasse après 20 minutes et après 100 minutes ?
(Saurez-vous en déduire la température de la chambre dans laquelle se trouve la tasse ?)

c) Après combien de temps, la température de la tasse est-elle de 35°C ?

4. Due à une immigration, le nombre d'habitants N d'une ville augmente en fonction du temps t.
On sait qu'il satisfait : $N'(t)=10\cdot e^{-0,08\cdot t}$ où

N est exprimé en milliers d'habitants, t est exprimé en années, et au temps $t = 0$, le nombre d'habitants est de 75 mille.

a) Exprimez le nombre d'habitants $N(t)$ en fonction du temps.

b) Quelle est le nombre d'habitants après 10 ans et après 50 ans ?

c) Après combien de temps, la population atteindra-t-elle les 150 mille habitants ?

d) La population de la ville atteindra-t-elle le demi million d'habitants ?

5. Une fabrique de maillots de bain réalise la plupart de ses ventes en été, mais répartit sa fabrication sur l'ensemble de l'année si bien que les coûts de production sont constants tout au long de l'année. De ce fait, la compagnie peut être confrontée à des difficultés de trésorerie. Les coûts estimés de fabrication et salaires s'élèvent à 90'000 CHF par semaine et le revenu estimé peut se calculer par la formule $100'000\cdot\left(1{,}1-\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{26}\right)\right)$ CHF par semaine où t est le nombre de semaines écoulées depuis le début de l'année. Une année = 52 semaines.

a) Quel est le montant du bénéfice que cette société peut espérer réaliser en une année ?

b) Tracez le graphique du montant des avoirs en milliers de CHF de la fabrique en fonction du temps, sur une période de 120 semaines.

c) Durant quelle semaine la trésorerie est-elle maximale ?

6. Dans l'estuaire d'une rivière, les officiers des douanes ont arraisonné un bateau suspecté de trafic de drogue. Mais la fouille a été vaine. Un informateur a néanmoins déclaré plus tard qu'un paquet flottant avait été jeté par-dessus bord juste avant l'arrivée des douaniers. Outre le courant de la rivière, cet estuaire est soumis à un courant dû à la marée. Ces deux courants se combinent pour produire un courant dont la vitesse (en nœuds) est estimée à $V(t)=2-3\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{6}\right)$, où t est le temps en heures depuis le moment où le bateau a été intercepté.

(Un nœud = 1 mille marin par heure)

a) Trouvez une formule indiquant de combien le paquet a dérivé après T heures.

b) Si les douaniers reviennent après 4 heures, à quel endroit leur conseilleriez-vous de commencer leurs recherches ?