❶ **Les trois objets en chute libre.**
Fixons les conditions de l'expérience de manière plus circonstanciée :

1. 3 objets sont lâchés à l'instant $t=0$ d'une altitude $h_{\max}$, qui n'est pas la même a priori pour les trois objets (!)
2. ils sont en chute en raison de la gravitation terrestre
3. la vitesse de chaque objet, qui dépend de la forme de l'objet et du milieu de chute, est une fonction du temps
4. à l'instant *t = 6* tous les objets touchent terre
5. très naturellement, altitude au sol *x(6) = 0*

Unités (non mentionnées dans les calculs ci-dessous) : s - m - m/s

Objet 1	**Objet 2**	**Objet 3**
Question 1. $v(t)=-9{,}8t$ $x(t)=\int -9{,}8t\ dt$ $x(t) = -4{,}9t^2 + C$ Détermination de C à l'aide de la condition initiale : $x(6) = 0$ $-4{,}9\cdot(6)^2 + C=0 \Rightarrow C=176{,}4$	$v(t)=-9{,}8\sqrt{t}$ $x(t)=\int -9{,}8\sqrt{t}\ dt$ $x(t) = -9{,}8\ \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C$ Détermination de C à l'aide de la condition initiale : $x(6) = 0$ $-9{,}8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot 6^{\frac{3}{2}}+C=0\Rightarrow C=96{,}0$	$v(t)=-9{,}8\left(1-\frac{1}{(1+t)^2}\right)$ $x(t) = -9{,}8\ t - \frac{9{,}8}{1+t} + C$ Détermination de C à l'aide de la condition initiale : $x(6) = 0$ $-9{,}8\cdot(6) - \frac{9{,}8}{1+6}+C=0\Rightarrow C=60{,}2$
Question 2. $x(0) = -4{,}9\cdot(0)^2 +176{,}4=176{,}4$	$x(0) = -9{,}8\left(\frac{2}{3}\right)(0)^{\frac{3}{2}}+96{,}0=96{,}0$	$x(0) = -9{,}8\cdot(0) - \frac{9{,}8}{1+0} + 60{,}2 = 50{,}4$

❷ **La décélération du TGV.** Unités : m, s, m/s et m/s^2.
La vitesse du TGV en fonction du temps est : $V(t)=\int a(t)\,dt+V_0$
V_0 est déterminée par la condition initiale, disant que la vitesse $V(0) = 50$ [m/s].
La distance parcourue en fonction du temps est : $X(t)=\int V(t)\,dt+X_0$.
X_0 est déterminée par la condition initiale, disant que $X(0) = 0$ [m].
2.1 : cas où $a = -2$ [m / s^2].
i) $V(t)=\int -2\,dt+V_0=-2\cdot t+V_0$. $V(0) = 50$, donc $-2\cdot 0+V_0=50$. $\boxed{V(t)=-2\cdot t+50}$
ii) La vitesse du TGV après 16 secondes est de $V(16) = -2\cdot 16 + 50 = 18$ [m/s].
iii) $X(t)=\int(-2\cdot t+50)\,dt+X_0=-t^2+50\cdot t+X_0$. $X(0) = 0$, donc $\boxed{X(t)=-t^2+50\cdot t}$
iv) Le TGV a freiné sur une distance de $X(16) = -16^2 + 50\cdot 16 = 544$ [m].
v) $V(t) = 0 \Rightarrow t = 25$ [s], donc le TGV s'est arrêté après 25 secondes.

❷ **La décélération du TGV, SUITE.** Unités : m, s, m/s et m/s^2.

La vitesse du TGV en fonction du temps est : $V(t) = \int a(t)\,dt + V_0$

V_0 est déterminée par la condition initiale, disant que la vitesse $V(0) = 50$ [m/s].

La distance parcourue en fonction du temps est : $X(t) = \int V(t)\,dt + X_0$.

X_0 est déterminée par la condition initiale, disant que $X(0) = 0$ [m].

2.2 : cas où $a(t) = -\frac{1}{4}\cdot t \left[{}^{m}\!/_{s^2} \right]$.

i) $V(t) = \int -\frac{1}{4}\cdot t\,dt + V_0 = -\frac{1}{8}\cdot t^2 + V_0$. $V(0) = 50$, donc $-\frac{1}{8}\cdot 0^2 + V_0 = 50$. $\boxed{V(t) = -\frac{1}{8}\cdot t^2 + 50}$

ii) La vitesse du TGV après 16 secondes est de $V(16) = -\frac{1}{8}\cdot 16^2 + 50 = 18$ = 18 [m/s].

iii) $X(t) = \int (-\frac{1}{8}\cdot t^2 + 50)\,dt + X_0 = -\frac{1}{24}\cdot t^3 + 50\cdot t + X_0$. $X(0) = 0$, donc $\boxed{X(t) = -\frac{1}{24}\cdot t^3 + 50\cdot t}$

iv) Le TGV a freiné sur une distance de $X(16) = -\frac{1}{24}\cdot 16^3 + 50\cdot 16 \approx 629{,}3$ [m].

v) $V(t) = 0$ => $-\frac{1}{8}\cdot t^2 + 50 = 0$, donc $t = 20$ [s], donc le TGV s'est arrêté après 20 secondes.

---

❸ **Le tuyau percé**

Soit $V(t)$ le volume d'eau gaspillée au moment t après le début de la fuite ($t = 0$: début de la fuite)

A un moment t et en h instants, il s'écoule $V(t+h) - V(t)$ litres d'eau gaspillée.

Le débit mesure la « vitesse d'écoulement » c'est-à-dire :
le taux de variation du volume d'eau gaspillée à un instant donné.

Donc :

Débit de la fuite = $D(t) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{V(t+h) - V(t)}{h}$ = fonction dérivée de V

Donc le volume est une primitive du débit $D(t) = 4 + 0{,}2t$: $V(t) = 4t + 0.1t^2 + C$
et comme $V(0) = 0$, on a $C = 0$.

Donc $V(t) = 4t + 0.1t^2$ et $V(72) = 4(72) + 0.1(72)^2 = 806.4$ litres d'eau perdus.

---

❹ La route de montagne

Notons $A(x)$ l'altitude en fonction de la distance horizontale x.
Pendant qu'un véhicule fait l mètres horizontalement, il s'élève de $A(x+l) - A(x)$.

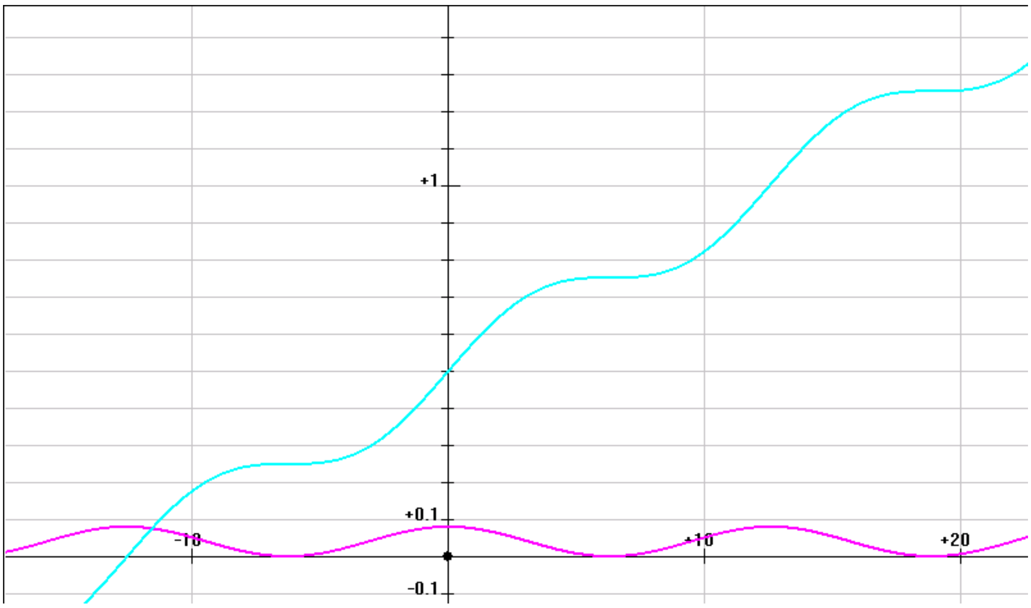
«Taux de variation de l'altitude *A(x)*» = $\lim\limits_{l \to 0} \dfrac{A(x+l)-A(x)}{l}$ = pente de la route en x = **dérivée de *A***

$= 0,04\left(1+\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$ d'après l'énoncé (unité de longueur = km)

Donc l'altitude est une primitive de la pente : $A(x) = 0,04x + 0,08\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) + C$

et comme $A(0) = 0,5$, on a $C = 0,5$.

Donc $A(x) = 0,04x + 0,08\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) + 0,5$ et $A(20) = 1,256$.



❺ Les nénuphars

Des nénuphars prolifèrent sur une mare de 100 m². Lors de la première observation ils recouvraient 40 $[m^2]$. Le taux d'accroissement de la surface recouverte peut être modélisé par la fonction:
$t \to 0,8 \cdot e^{-0,02 \cdot t}$ où t représente le nombre de jours écoulés depuis la première observation.

5.1 Surface recouverte : $S(t) = \int 0,8 \cdot e^{-0,02\cdot t}\, dt = -40 \cdot e^{-0,02\cdot t} + C$; $S(0) = 40$ alors $C = 80$.

$\boxed{S(t) = 80 - 40 \cdot e^{-0,02\cdot t}}$ $S(30) \cong 58\left[m^2\right]$ $S(60) \cong 68\left[m^2\right]$

5.2 D'après ce modèle, la surface ne dépassera pas $80\left[m^2\right]$, donc la mare ne sera pas recouverte.

5.3 $S(t) = 0 \Rightarrow t = -\dfrac{ln(2)}{0,02} \cong -34,65$ jours.

Il y a donc un peu plus de 34 jours que les premiers nénuphars sont apparus sur la mare.

❻ **L'alimentation en eau d'une ville.**

6.1 La quantité d'eau entrée dans le lac entre les temps t_0 et t_1 égale $\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt$.

6.2 La quantité d'eau sortie dans le lac entre les temps t_0 et t_1 égale $\int_{t_0}^{t_1} g(t)\,dt$.

6.3 La variation d'eau dans le lac entre les temps t_0 et t_1 égale $\int_{t_0}^{t_1} \big(f(t)-g(t)\big)\,dt$.

6.4 La variation totale d'eau dans le lac entre les temps $t_0 = 0$ jours et $t_1 = 30$ jours égale

$$\int_{t_0}^{t_1} \big(f(t)-g(t)\big)\,dt = \int_0^{30} \left(10-\frac{1}{2}t-2\cdot\sin(2\pi t)\right)dt = \left(10\cdot t-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{\pi}\cdot\cos(2\pi t)\right)\Bigg|_0^{30} = 75 \text{ méga litres.}$$

---

❼ Après 2 heures, la consommation totale de carburant sera de : $\int_0^2 \left(4-\frac{2}{1+t}\right)dt =$

$$4t+2\cdot\ln(1+t)\Big|_0^2 = 8+2\cdot\ln(3)-(0+\ln(1)) \cong 10{,}197 \text{ litres.}$$

---

❽ On connaît la dérivée de la fonction cherchée $T(t)$, donc $T(t)$ est une primitive de $T'(t) = -7\cdot e^{-\frac{t}{10}}$.

8.1 $T(t) = \int -7\cdot e^{-\frac{t}{10}}\,dt = 70\cdot e^{-\frac{t}{10}}+C$ où C est la constante d'intégration.

On sait que $T(0) = 90°C$ et que $T(0) = 70\cdot e^{-\frac{0}{10}}+C = 70+C$, donc

$90 = 70+C$. On en déduit que $C = 20°C$ et donc que $\boxed{T(t) = 70\cdot e^{-\frac{t}{10}}+20\,°C}$.

8.2 La température après 20 minutes est de $T(20) = 70\cdot e^{-\frac{20}{10}}+20\,°C \approx 29{,}47°C$.

La température après 100 minutes est de $T(100) = 70\cdot e^{-\frac{100}{10}}+20\,°C \approx 20°C$.

La température de la chambre est de 20°C, c'est celle vers laquelle la température de la tasse tend.

8.3 On cherche t tel que : $T(t) = 70\cdot e^{-\frac{t}{10}}+20\,°C = 35°C$.

Il faut donc résoudre l'équation : $70\cdot e^{-\frac{t}{10}} = 15$. Donc $e^{-\frac{t}{10}} = \frac{15}{70}$, $-\frac{t}{10} = \ln\left(\frac{15}{70}\right)$.

Le temps pour atteindre la température de 35 °C vaut donc : $t = -10\cdot\ln\left(\frac{15}{70}\right) \approx 15{,}4 \text{ minutes}$.

---

❾ On connaît la dérivée de la fonction cherchée $N(t)$, donc $N(t)$ est une primitive de $N'(t)=10\cdot e^{-0,08\cdot t}$.

9.1 $N(t)=\int 10\cdot e^{-0,08\cdot t}\,dt=-125\cdot e^{-0,08\cdot t}+C$ où C est la constante d'intégration.

On sait que $N(0)=75$ et que $N(0)=-125\cdot e^{-0,08\cdot 0}+C=-125+C$, donc

$75=-125+C$. On en déduit que $C=200$ et donc que $\boxed{N(t)=-125\cdot e^{-0,08\cdot t}+200}$.

9.2 La population après 10 années est de $N(10)=-125\cdot e^{-0,8}+200\approx 143,8$ milliers.

La population après 50 années est de $N(50)=-125\cdot e^{-4}+200\approx 197,7$ milliers.

La population tend à se stabiliser vers 200 milliers habitants.

9.3 On cherche t tel que : $N(t)=-125\cdot e^{-0,08\cdot t}+200=150$.

Il faut donc résoudre l'équation : $-125\cdot e^{-0,08\cdot t}=-50$.

Donc $e^{-0,08\cdot t}=\dfrac{50}{125}$, $-0,08\cdot t=\ln\left(\dfrac{50}{125}\right)$.

Le temps cherché vaut donc : $t=-\dfrac{1}{0,08}\cdot\ln\left(\dfrac{50}{125}\right)\approx 11,45$ années.

9.4 Lorsque t devient grand, $N(t)$ se rapproche de 200 milliers et ne dépasse jamais cette valeur. Donc le demi million d'habitants ne sera jamais atteint, selon ce modèle.