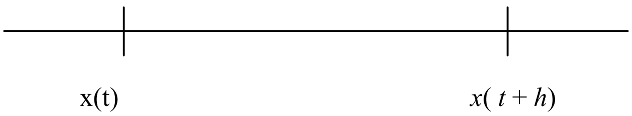
LOI HORAIRE

Soit un mobile qui met *h* secondes pour passer de la position *x(t)* à la position *x(t + h)*.



La **fonction vitesse est définie comme le taux de variation instantané de la position du mobile**, c'est-à-dire comme la **dérivée de la fonction position**, ce qui s'écrit encore :
« la fonction position est une primitive de la fonction vitesse » .

$v(t)$ est la vitesse instantanée à l'instant t

$$\boxed{v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}=x'(t)}$$

$x(t)$ est la position à l'instant t

$$\boxed{x(t)=\int v(t)\,dt}$$

où la constante d'intégration sera déterminée par une condition initiale.

De manière analogue, **l'accélération instantanée est définie comme le taux de variation de la vitesse**, ou bien, autrement formulé, la **vitesse est une primitive de l'accélération** :

$$\boxed{a(t)=\lim_{h\to 0}\frac{v(t+h)-v(t)}{h}=v'(t)}$$

$$\boxed{v(t)=\int a(t)\,dt}$$

Détermination de la constante d'intégration à l'aide d'une condition initiale.

---

❶ **Les trois objets en chute libre.**

Soit trois objets en chute dont la vitesse en [*m/s*] est donnée par les trois fonctions ci-dessous :

$v_1(t)=-9{,}8\cdot t$

$v_2(t)=-9{,}8\cdot\sqrt{t}$

$v_3(t)=-9{,}8\cdot\left(1-\dfrac{1}{(1+t)^2}\right)$

1.1 Pour chacune des fonctions vitesse trouvez sa fonction $x(t)$ correspondante sachant que l'objet touche terre après 6 secondes. La terre se trouve à une hauteur de 0 mètres.

1.2 Calculez la hauteur initiale de chaque objet.

---

❷ **La décélération du TGV.**

Un TGV lancé à 50 [m/s] doit freiner.

Dans les deux cas ci-dessous, on se pose les questions suivantes :

i) Quelle est sa vitesse en fonction du temps ? (Au temps $t = 0$, sa vitesse est de 50 [m/s]).
ii) Quelle est sa vitesse après 16 secondes ?
iii) Quelle est la distance parcourue depuis le début du freinage, en fonction du temps ?
iv) Sur quelle distance a-t-il freiné en 16 secondes ?
v) Après combien de temps s'arrête-t-il ?

2.1 : dans le cas d'une décélération constante de $a = -2$ [m / s^2].

2.2 : dans le cas d'une décélération proportionnelle au temps : $a(t)=-\dfrac{1}{4}\cdot t\left[{}^{m}\!/\!_{s^2}\right]$

❸ Le tuyau percé

Une fuite a été constatée dans le réseau de distribution d'eau d'un immeuble. L'ingénieur responsable souhaite estimer la quantité d'eau ainsi perdue. En la mesurant à des moments différents, il remarque que le **taux de variation** du volume d'eau gaspillée en *litres par heure*, appelé débit, augmente selon la fonction: $t \mapsto 4+0,2\cdot t$. (t en heures)
Si la fuite n'est réparée que 72 heures plus tard, quelle quantité d'eau aura été gaspillée durant cette période ?

---

❹ La route de montagne

La pente d'une route de montagne peut être modélisée par la fonction suivante:
$x \mapsto 0,04\cdot\left(1+\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ où x représente la distance horizontale exprimée en [km].
Sachant que le début de la route se situe à 500 [m] au-dessus du niveau de la mer, quelle est l'altitude de la route à une distance horizontale de 20 [km] ?
Esquissez graphiquement l'altitude de la route en fonction de la distance horizontale.

---

❺ Les nénuphars

Des nénuphars prolifèrent sur une mare de 100 m^2. Lors de la première observation ils recouvraient 40 [m^2]. Le taux d'accroissement de la surface recouverte peut être modélisé par la fonction :
$t \mapsto 0,8\cdot e^{-0,02\cdot t}$ où t représente le nombre de jours écoulés depuis la première observation.

5.1 Si les nénuphars continuent à croître selon ce modèle, quelle surface recouvriront-ils après 30 jours ? Après 60 jours ?

5.2 Les nénuphars recouvriront-ils un jour la totalité de la surface de la mare ?

5.3 En supposant que ce modèle décrive la croissance des nénuphars depuis leur apparition, quand celle-ci a-t-elle eu lieu, c'est-à-dire quand la surface recouverte par les nénuphars était nulle ?

---

❻ L'alimentation en eau d'une ville.

Une ville est alimentée en eau par l'intermédiaire d'un lac de rétention en amont d'un barrage.
Soit $f(t)$ le débit à l'entrée du lac et $g(t)$ le débit à la sortie (exprimés en méga litres par jour).

6.1 Trouvez une formule représentant la quantité totale d'eau entrée dans le lac entre les temps t_0 et t_1.

6.2 Même question pour la quantité totale qui sort du lac.

6.3 Même question pour exprimer la variation totale de la quantité d'eau contenue dans le lac durant la même période.

6.4 Si $f(t)=20-\frac{1}{2}t$ et $g(t)=10+2\cdot\sin(2\pi t)$, calculez la variation totale de la quantité d'eau contenue dans le lac durant les 30 premiers jours.

❼ **La consommation de carburant.**

La consommation en carburant d'un bateau à moteur s'élève à $C(t) = 4 + \dfrac{2}{1+t}$ litres par heure.

Si le moteur est mis en marche en $t = 0$, combien de carburant exactement aura-t-il consommé après 2 heures ?

---

❽ **La température de la tasse.**

On s'intéresse à la température $T(t)$ d'une tasse d'eau chaude, qui varie en fonction du temps t.

On sait qu'elle satisfait : $T'(t) = -7 \cdot e^{-\frac{t}{10}}$ où

T est exprimé en degré centigrade °C, t est exprimé en minutes et au temps $t = 0$ minutes, la température de la tasse est de 90°C.

8.1 Exprimez la température $T(t)$ de la tasse en fonction du temps.

8.2 Quelle est la température de la tasse après 20 minutes et après 100 minutes ?

(Saurez-vous en déduire la température de la chambre dans laquelle se trouve la tasse ?)

8.3 Après combien de temps, la température de la tasse est-elle de 35°C ?

❾ **L'immigration.**

Due à une immigration, le nombre d'habitants N d'une ville augmente en fonction du temps t.
On sait qu'il satisfait : $N'(t) = 10 \cdot e^{-0,08 \cdot t}$ où

N est exprimé en milliers d'habitants, t est exprimé en années, et au temps $t = 0$, le nombre d'habitants est de 75 milliers.

9.1 Exprimez le nombre d'habitants $N(t)$ en fonction du temps.

9.2 Quelle est le nombre d'habitants après 10 ans et après 50 ans ?

9.3 Après combien de temps, la population atteindra-t-elle les 150 mille habitants ?

9.4 La population de la ville atteindra-t-elle le demi million d'habitants ?