❶ Réponses :

1. $I_1 = \int_{-2}^{2} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{16}{3}$

2. $I_2 = \int_{0}^{3} x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{0}^{3} = \frac{3^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{81}{4}$

3. $I_3 = \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) dx = \left.\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\right|_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1^3}{3}\right) - \left((-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right) = \frac{4}{3}$

4. $I_4 = \int_{1}^{2} \left(x^2 - x\right) dx = \left.\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\right|_{1}^{2} = \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2}\right) = \frac{5}{6}$

5. $I_5 = \int_{-1}^{3} \left(9 - x^2\right) dx = \left.\left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\right|_{-1}^{3} = \left(9 \cdot 3 - \frac{3^3}{3}\right) - \left(9 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right) = \frac{80}{3}$

6. $I_6 = \int_{0}^{2} \left(8 - x^3\right) dx = \left.\left(8x - \frac{x^4}{4}\right)\right|_{0}^{2} = \left(8 \cdot 2 - \frac{2^4}{4}\right) - \left(8 \cdot 0 - \frac{0^4}{4}\right) = 12$

7. $I_7 = \int_{1}^{3} \left(x^3 - x^2\right) dx = \left.\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\right|_{1}^{3} = \left(\frac{3^4}{4} - \frac{3^3}{3}\right) - \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3}\right) = \frac{34}{3}$

8. $I_8 = \int_{-1}^{2} 3 \cdot \left(x - 2\right)^2 dx = \left.\left(x - 2\right)^3\right|_{-1}^{2} = \left(2 - 2\right)^3 - \left(-1 - 2\right)^3 = 27$

9. $I_9 = \int_{0}^{1} \left(1 + x - x^2\right) dx = \left.\left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\right|_{0}^{1} = \left(1 + \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right) - \left(0 + \frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{7}{6}$

10. $I_{10} = \int_{0}^{\pi} \left(1 + \sin\left(x\right)\right) dx = \left.\left(x - \cos(x)\right)\right|_{0}^{\pi} = \left(\pi - \cos(\pi)\right) - \left(0 - \cos(0)\right) = \pi + 2$

11. $I_{11} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(x\right) dx = \left.\sin(x)\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$

12. $I_{12} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(2x\right) dx = \left.-\frac{1}{2} \cdot \cos(2x)\right|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2} \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot 0)\right) = \frac{1}{2}$

❷ Aires algébriques et géométriques grisées :

Pour les aires au-dessus de l'axe des abscisses, l'aire géométrique est égale à l'aire algébrique, qui peut se calculer à l'aide d'une **intégrale définie**.

$y = 2 \cdot x$: l'aire est celle d'un trapèze, $A = \frac{4+10}{2} \cdot (5-2) = \underline{\underline{21}}$

On peut aussi calculer l'aire à l'aide d'une intégrale : $A = \int_{2}^{5} 2 \cdot x \, dx = \left. x^2 \right|_{2}^{5} = 5^2 - 4^2 = \underline{\underline{21}}$

$y = 0,5 \cdot x^2$: L'aire égale : $A = \int_{2}^{5} 0,5 \cdot x^2 \, dx = \left. \frac{0,5}{3} \cdot x^3 \right|_{2}^{5} = \frac{1}{6} \cdot (5^3 - 2^3) = \underline{\underline{19,5}}$

$y = 1 / x$: L'aire égale : $A_{1;2} = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = \ln(x) \Big|_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \underline{\underline{\ln(2)}}$

$y = 1 / x$: L'aire égale : $A_{2;4} = \int_2^4 \frac{1}{x}\, dx = \ln(x) \Big|_2^4 = \ln(2^2) - \ln(2) = 2\cdot\ln(2) - \ln(2) = \underline{\underline{\ln(2)}}$

$y = 1 / x$: L'aire égale : $A_{4;8} = \int_4^8 \frac{1}{x}\, dx = \ln(x) \Big|_4^8 = \ln(2^3) - \ln(2^2) = 3\cdot\ln(2) - 2\cdot\ln(2) = \underline{\underline{\ln(2)}}$

Les trois aires calculées précédemment sont de même grandeur.

À partir d'ici, les aires géométriques et algébriques diffèrent, car une partie se trouve sous l'axe des abscisses. Le calcul de l'aire algébrique est plus simple que celui de l'aire géométrique.

$y = 2 \cdot x - 6$: L'aire algébrique égale : $A = \int_2^5 2\cdot x - 6\, dx = x^2 - 6\cdot x \Big|_2^5 = 25 - 30 - (4 - 12) = \underline{\underline{3}}$

$y = 2 \cdot x - 6$: L'aire géométrique égale : $A = \left| \int_2^3 2\cdot x - 6\, dx \right| + \int_3^5 2\cdot x - 6\, dx$

$$A = \left| x^2 - 6\cdot x \Big|_2^3 \right| + (x^2 - 6\cdot x) \Big|_3^5 = |9 - 18 - (4 - 12)| + (25 - 30 - (9 - 18)) = |-1| + 4 = \underline{\underline{5}}$$

$y = 0{,}5 \cdot x^2 - 6$: L'aire algébrique égale :

$$A = \int_2^5 0{,}5\cdot x^2 - 8\, dx = \frac{0{,}5}{3}\cdot x^3 - 8\cdot x \Big|_2^5 = \frac{1}{6}\cdot 5^3 - 40 - \left(\frac{1}{6}\cdot 2^3 - 16\right) = \underline{\underline{-4{,}5}}$$

Une manière plus simple est de faire :

$$A = \int_2^5 0{,}5\cdot x^2 - 8\, dx = \int_2^5 0{,}5\cdot x^2\, dx - \int_2^5 8\, dx = 19{,}5 - 8\cdot 3 = \underline{\underline{-4{,}5}}$$

L'intégrale de $0{,}5 \cdot x^2$ a été calculée précédemment. L'intégrale de "8" est l'aire d'un rectangle.

L'aire géométrique suivante devient long à calculer !

$y = 0{,}5 \cdot x^2 - 6$: L'aire géométrique égale : $A = \left| \int_2^4 0{,}5\cdot x^2 - 8\, dx \right| + \int_4^5 0{,}5\cdot x^2 - 8\, dx$

$$A = \left| \int_2^4 0{,}5\cdot x^2 - 8\, dx \right| + \int_4^5 0{,}5\cdot x^2 - 8\, dx = \left| \frac{0{,}5}{3}\cdot x^3 - 8\cdot x \Big|_2^4 \right| + \left(\frac{0{,}5}{3}\cdot x^3 - 8\cdot x\right) \Big|_4^5$$

$$A = \left| \frac{64}{6} - 32 - \left(\frac{8}{6} - 16\right) \right| + \frac{125}{6} - 40 - \left(\frac{64}{6} - 32\right)$$

$$A = \left| -\frac{20}{3} \right| + \frac{13}{6} = \frac{20 + 13}{6} = \frac{33}{\underline{\underline{6}}} = \underline{\underline{5{,}5}}$$

Il faut être soigneux pour arriver jusqu'au bout sans faire d'erreur !
Il est conseillé d'écrire toutes les étapes intermédiaires !

❸ Solutions :

1. $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x)\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{2}\cdot\left(\cos(2\pi)-\cos(-2\pi)\right) = -\frac{1}{2}\cdot(1-1) = 0$$

2. $$\int_{-11}^{2} \sqrt[3]{5-2x}\,dx = \int_{-11}^{2} (5-2x)^{\frac{1}{3}}\,dx = \left[\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{-2}(5-2x)^{\frac{4}{3}}\right]_{-11}^{2} = \frac{-3}{8}\cdot\left\{(5-4)^{\frac{4}{3}}-(5+22)^{\frac{4}{3}}\right\} = \frac{-3}{8}\cdot\{1-81\} = 30$$

3. $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\sin(4x)-5\cos(x)\right)dx = \left[-\frac{1}{4}\cos(4x)-5\sin(x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$
$$\left\{\left[-\frac{1}{4}\cos(4\pi)-5\sin(\pi)\right]-\left[-\frac{1}{4}\cos\left(\frac{-4\pi}{2}\right)-5\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right]\right\} = \left\{\left[-\frac{1}{4}-0\right]-\left[-\frac{1}{4}-(-5)\right]\right\} = -5$$

4. $$\int_0^1 \frac{x^3+1}{\left(x^4+4x+1\right)^2}\,dx = \left.\frac{-\left(x^4+4x+1\right)^{-1}}{4}\right|_0^1 = \left.\frac{-1}{4\cdot\left(x^4+4x+1\right)}\right|_0^1 = \frac{-1}{4\cdot\left(1^4+4\cdot1+1\right)}-\frac{-1}{4\cdot\left(0^4+4\cdot0+1\right)} =$$
$$\frac{1}{4}-\frac{1}{4\cdot 6} = \frac{5}{24}$$

5. $$\int_1^3 \left(8-x^3\right)dx = \left[8x-\frac{1}{4}x^4\right]_1^3 = \left[24-\frac{81}{4}\right]-\left[8-\frac{1}{4}\right] = 24-8-\frac{81}{4}+\frac{1}{4} = 16-\frac{80}{4} = -4$$

6. $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos(x)\cdot\sin^2(x)\,dx = \left[\frac{1}{3}\cdot\sin^3(x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi} = \frac{1}{3}\cdot\left\{\left[\sin^3(2\pi)\right]-\left[\sin^3\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} = \frac{1}{3}\cdot\{[0]-[-1]\} = \frac{1}{3}$$

7. $$\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \int_{-1}^{0} x\cdot\left(x^2+4\right)^{\frac{-1}{2}}\,dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}\cdot\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{2}}\right]_{-1}^{0} = (0+4)^{\frac{1}{2}}-(1+4)^{\frac{1}{2}} == 2-\sqrt{5}$$

8. $$\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{7}{5}} 2\left(3-5x\right)^3\,dx = \left[2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{-5}\cdot\left(3-5x\right)^4\right]_{\frac{1}{5}}^{\frac{7}{5}} = \frac{-1}{10}\cdot\left\{\left[(3-7)^4\right]-\left[(3-1)^4\right]\right\} = \frac{-1}{10}\cdot\{[256]-[16]\} = -24$$

9. $$\int_0^1 \left(x^2-1\right)\left(x^3-3x\right)^4\,dx = \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(x^3-3x\right)^5\right]_0^1 = \frac{1}{15}\cdot\left\{\left[\left(1^3-3\right)^5\right]-\left[\left(0^3-0\right)^5\right]\right\} = \frac{1}{15}\cdot\{[-32]-[0]\} = \frac{-32}{15}$$

10. $$\int_1^8 \left(\frac{1}{\sqrt{2x}}-3\sqrt{x}\right)dx = \int_1^8 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x^{\frac{-1}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{1}\cdot x^{\frac{1}{2}}-3\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_1^8 = \left[\sqrt{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}-2\cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_1^8 =$$
$$\left[2^{\frac{1}{2}}\cdot 8^{\frac{1}{2}}-2\cdot 8^{\frac{3}{2}}\right]-\left[\sqrt{2}\cdot 1^{\frac{1}{2}}-2\cdot 1^{\frac{3}{2}}\right] = \left[4-2\cdot 8\cdot 2\cdot\sqrt{2}\right]-\left[\sqrt{2}-2\right] = 4-32\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}+2 = 6-33\cdot\sqrt{2}$$

11. $$\int_{-2}^{1} \frac{3x^2-5x}{2x}\,dx = \int_{-2}^{1} (1{,}5x-2{,}5)\,dx = \left[1{,}5\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2-2{,}5x\right]_{-2}^{1} = \left[0{,}75\cdot 1^2-2{,}5\right]-\left[0{,}75\cdot 4+5\right] =$$
$$0{,}75-2{,}5-3-5 = -9{,}75$$

12. $$\int_{-\pi/2}^{\pi} -\sin(x)\cdot\cos(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\cos^2(x)\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{2}\cdot\left\{\cos^2(\pi)-\cos^2\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right\} = \frac{1}{2}\cdot\left\{(-1)^2-0^2\right\} = 0{,}5$$

13.	$\int_2^4 e^{x/2}\,dx = \left[2\cdot e^{\frac{x}{2}}\right]_2^4 = 2\cdot\left\{e^{\frac{4}{2}} - e^{\frac{2}{2}}\right\} = 2\cdot\left(e^2 - e\right)$
14.	$\int_1^5 \frac{1}{3x}\,dx = \int_1^5 \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\left[\ln\lvert x\rvert\right]_1^5 = \frac{1}{3}\cdot\{\ln(5)-\ln(1)\} = \frac{\ln(5)}{3}$
15.	$\int_{-3}^2 x\cdot e^{-2x^2}\,dx = \left[\frac{-1}{4}\cdot e^{-2x^2}\right]_{-3}^2 = \frac{-1}{4}\cdot\left\{e^{-2\cdot 4} - e^{-2\cdot 9}\right\} = \frac{e^{-18}-e^{-8}}{4}$
16.	$\int_{-2}^0 \frac{x}{x^2+3}\,dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+3)\right]_{-2}^0 = \underline{\underline{\frac{1}{2}\cdot\{\ln(3)-\ln(7)\} = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{3}{7}\right) = \ln\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \ln\sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)}}}$ Réponses au choix !
17.	$\int_2^4 \frac{4x+4}{x^2+2x+3}\,dx = \int_2^4 2\cdot(2x+2)\cdot\left(x^2+2x+3\right)^{-1}dx = 2\cdot\left[\ln\left(x^2+2x+3\right)\right]_2^4 =$ $2\cdot\left\{\left[\ln(16+8+3)\right] - \left[\ln(4+4+3)\right]\right\} =$ $\underline{\underline{2\cdot\{\ln(27)-\ln(11)\} = 2\cdot\ln\left(\frac{27}{11}\right)}}$
18.	$\int_{-2}^0 \left(x+\frac{1}{2}\right)e^{x^2+x}\,dx = \int_{-2}^0 \frac{1}{2}\cdot(2x+1)\,e^{x^2+x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left[e^{x^2+x}\right]_{-2}^0 = \frac{1}{2}\cdot\left\{\left[e^0\right] - \left[e^{4-2}\right]\right\} = \frac{1-e^2}{2}$

❹ $\int_{-2}^{k} (-2x+3)\,dx = \left(-x^2+3x\right)\Big|_{-2}^{k} = -k^2+3k+10 = -8$

$\Rightarrow\quad -k^2+3k+18=0 \quad\Rightarrow\quad (k-6)(k+3)=0 \qquad\Rightarrow\qquad k=-3 \quad \text{ou} \quad k=6$

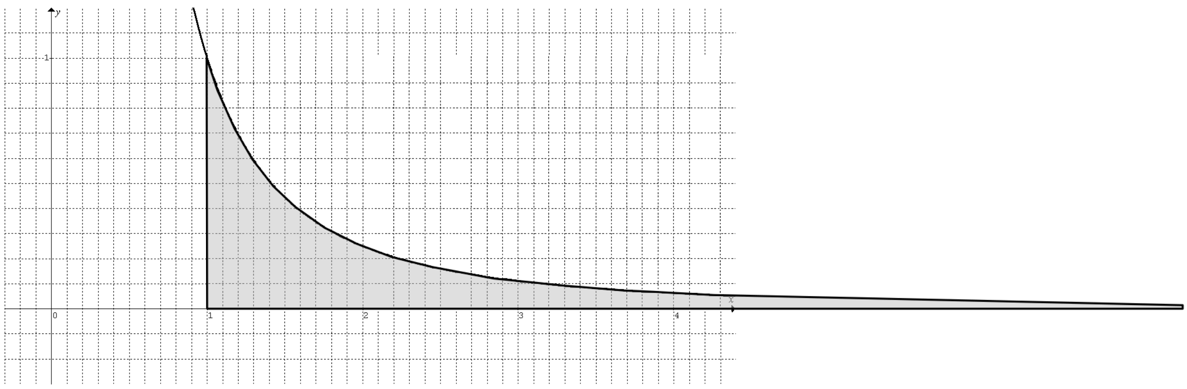
❺ 1. La résolution : $\int_{-2}^{2} \frac{-1}{x^2}\,dx = \int_{-2}^{2} -x^{-2}\,dx = x^{-1}\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{x}\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{-2} = 1$ est fausse, car la fonction $y = \frac{-1}{x^2}$ s'annule en $x = 0$. Elle n'est donc pas continue et le théorème fondamental ne s'applique pas. Cette intégrale n'est pas définie !

2. La résolution : $\int_{1}^{3} -\frac{2x-1}{\left(x^2-x-2\right)^2}\,dx = \left(x^2-x-2\right)^{-1}\Big|_{1}^{3} = \cdots$ est fausse, car la fonction à intégrer s'annule en $x = 2$ qui se trouve dans l'intervalle [1 ; 3]. Elle n'est donc pas continue et le théorème fondamental ne s'applique pas. Cette intégrale n'est pas définie !

3. La fonction à intégrer tend vers l'infini lorsque x tend vers 0, et elle n'est pas continue en 0. Malgré cela, l'intégration sans réfléchir donne un résultat qui a un sens.

$\int_{0}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{3}{2}\cdot x^{\frac{2}{3}}\Big|_{0}^{8} = \frac{3}{2}\cdot 8^{\frac{2}{3}} - 0 = 6$ est un résultat correct.

4. Malgré que la borne supérieure ne soit pas un nombre, cette intégrale peut se faire sans difficultés particulières : $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{1}^{\infty} = -\frac{1}{\infty} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1$. L'interprétation géométrique est jolie : le périmètre de la surface est infinie, mais l'aire de la surface est finie et d'aire égale à 1 !



5. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{x}\Big|_{1}^{\infty} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\infty} - \frac{1}{2} = \infty$. Cette fois-ci, l'aire est infinie

6. $\int_{0}^{\infty} \sin(x)\,dx$ Cette intégrale n'a pas une valeur définie, car la fonction sinus oscille périodiquement. L'aire "sous la courbe" oscille aussi en fonction de la borne supérieure de l'intégrale.

❻ Les abscisses des intersections sont : $x = 0$ et $x = 1$. $A_1 = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2\, dx = \left[\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\cdot x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

Pour A_2 :

Les abscisses des intersections sont : $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{4}$, car $\cos(x) = \sin(x)$ en ces deux valeurs.

$$A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) - \sin(x)\, dx = \left[\sin(x) + \cos(x)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(0) - \cos(0) =$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 \underline{\underline{= \sqrt{2} - 1}}$$

<u>Pour A_3 :</u> calculons les abscisses des intersections.

Il faut que $x^2 = 3 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1{,}2247$ en accord avec le graphique.

$$A_3 = \int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} (3 - x^2) - x^2\, dx = \int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} 3 - 2x^2\, dx = \left[3x - \frac{2}{3}x^3\right]\Bigg|_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \left[3\cdot\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\cdot\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3\right]\cdot 2 =$$

$$A_3 = 2\cdot\left[3\cdot\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right] = 2\cdot\left[2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\right] \underline{\underline{= 2\cdot\sqrt{6} \approx 4{,}898979}}$$

On peut vérifier sur le graphique que la réponse est plausible !

<u>Pour A_4 :</u> calculons les abscisses des intersections.

Il faut que $1 - x^2 = x^2 - 2 \Leftrightarrow 2x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} = \pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}}} \approx \pm 1{,}2247$

C'est exactement le même problème que le précédent, avec un décalage vers le bas de 2 unités.
Les graphiques diffèrent en apparence, car l'échelle de l'axe des abscisses diffère.
Donc $A_4 = A_3 \approx 4{,}898979$

<u>Pour A_5 :</u> les abscisses des intersections sont $x = -1$ et $x = 1$, c'est facile à voir.

$$A_5 = \int_{-1}^{1}\left(1 - x^a - (x^a - 1)\right) dx = 2\cdot\int_{-1}^{1}\left(1 - x^a\right) dx = 2\cdot\left[x - \frac{1}{a+1}\cdot x^{a+1}\right]\Bigg|_{-1}^{1} \underline{\underline{= 4\cdot\left[1 - \frac{1}{a+1}\right]}}$$

Pour $a = 10$; $a = 100$ et $a = 1'000$, il suffit de remplacer a par sa valeur dans l'expression ci–dessus.
Si a est pair et tend vers l'infini, la surface tend vers un carré de côtés 2, l'aire A_5 tend vers 4.
Si a est impair, la surface est différente.
Si a est non entier, la discussion est plus compliquée, car pour une infinité de ces valeurs, la fonction $f(x) = x^a$ n'est pas définie sur $[-1 ; 0]$.

<u>Pour A_6 :</u> On veux que $f(x) = g(x)$, $x^3 - 3x = 3x - x^2$, $x^3 + x^2 - 6x = 0$, $x\cdot(x - 2)\cdot(x + 3) = 0$, les abscisses des intersections sont $x = -3$; $x = 0$ et $x = 2$.

$$A_6 = \int_{-3}^{0} f(x) - g(x)\, dx + \int_0^2 g(x) - f(x)\, dx = \int_{-3}^{0} x^3 + x^2 - 6x\, dx + \int_0^2 -x^3 - x^2 + 6x\, dx =$$

$$A_6 = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 3x^2\right]\Bigg|_{-3}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 3x^2\right]\Bigg|_0^2 = 0 - \left(\frac{81}{4} - 9 - 27\right) - 4 - \frac{8}{3} + 12 = \frac{63}{4} + \frac{16}{3} = \underline{\underline{\frac{253}{12}}}$$

Sur le premier intervalle, f est au-dessus de g, ensuite, c'est g qui est au-dessus.