Autre manière de calculer des primitives de fonctions, où l'on cherche a posteriori le nombre α pour que $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$.

Déterminez une fonction $\boldsymbol{F}$ qui soit une primitive de la fonction $\boldsymbol{f}$,
c'est-à-dire **par définition** une fonction $\boldsymbol{F}$ telle que $\boldsymbol{F' = f}$**.**
Quatre propriétés très souvent utilisées sont : ($\boldsymbol{\lambda}$ *est une constante quelconque.*)

I) $\int \lambda \cdot g(f(x)) \cdot f'(x)\,dx = \alpha \cdot G(f(x)) + C$ où G est une primitive de g.

II) $\int \lambda \cdot f^n(x) \cdot f'(x)\,dx = \alpha \cdot f^{n+1}(x) + C$ où $n \in$ Ñ $\setminus \{-1\}$.

III) $\int \lambda \cdot f^{-1}(x) \cdot f'(x)\,dx = \alpha \cdot \ln(|f(x)|) + C$

IV) $\int \lambda \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = \alpha \cdot e^{f(x)} + C$ Dans chaque cas, **$\boldsymbol{\alpha}$ est une constante à déterminer**.

1) $f(x) = x - 3 \cdot x^{-2}$; $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{x} + C$ car $F'(x) = f(x)$

2) $f(x) = 2x + 1 - x^{-2}$; $F(x) = x^2 + x + \frac{1}{x} + C$ car $F'(x) = f(x)$

3) $f(x) = (3x+2)^6$; $F(x) = \alpha \cdot (3x+2)^7$; $F'(x) = \alpha \cdot 7 \cdot (3x+2)^6 \cdot 3$,
donc $\alpha \cdot 7 \cdot 3 = 1$; $\alpha = \frac{1}{21}$; $F(x) = \frac{1}{21} \cdot (3x+2)^7 + C$

4) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos^4(x)$; $F(x) = \alpha \cdot \cos^5(x)$; $F'(x) = \alpha \cdot 5 \cdot \cos^4(x) \cdot (-\sin(x))$,
donc $\alpha \cdot 5 \cdot (-1) = 1$; $\alpha = -\frac{1}{5}$; $F(x) = -\frac{1}{5} \cdot \cos^5(x) + C$

5) $f(x) = (x^2+x+3)^{-2} \cdot (2x+1)$; $F(x) = \alpha \cdot (x^2+x+3)^{-1}$; $F'(x) = \alpha \cdot (-1) \cdot (x^2+x+3)^{-2} \cdot (2x+1)$,
donc $\alpha \cdot (-1) = 1$; $\alpha = -1$; $F(x) = -\frac{1}{x^2+x+3} + C$

6) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+4}$; $F(x) = \alpha \cdot \ln(|x^2-2x+4|)$; $F'(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x^2-2x+4} \cdot (2x-2)$,
donc $\alpha \cdot 2 = 1$; $\alpha = \frac{1}{2}$; $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(|x^2-2x+4|) + C$

7) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-2}$; $F(x) = \alpha \cdot \ln(|x^2-x-2|)$; $F'(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x^2-x-2} \cdot (2x-1)$,
donc $\alpha = 1$; $F(x) = \ln(|x^2-x-2|) + C$

8) $f(x) = \sin(x) \cdot (1-\cos(x))$; $F(x) = \alpha \cdot (1-\cos(x))^2$; $F'(x) = \alpha \cdot 2 \cdot (1-\cos(x)) \cdot \sin(x)$,
donc $\alpha \cdot 2 = 1$; $\alpha = \frac{1}{2}$; $F(x) = \frac{1}{2} \cdot (1-\cos(x))^2 + C$

9) $f(x) = \frac{\cos(x)}{(4 \cdot \sin(x) - 1)^3}$ $f(x) = \cos(x) \cdot (4 \cdot \sin(x) - 1)^{-3}$; $F(x) = \alpha \cdot (4 \cdot \sin(x) - 1)^{-2}$; ,

$F'(x) = \alpha \cdot (-2) \cdot (4 \cdot \sin(x) - 1)^{-3} \cdot 4 \cdot \cos(x)$ donc $\alpha \cdot (-2) \cdot 4 = 1$; $\alpha = -\frac{1}{8}$;

$F(x) = -\frac{1}{8} \cdot (4 \cdot \sin(x) - 1)^{-2} = -\frac{1}{8 \cdot (4 \cdot \sin(x) - 1)^2} + C$

10) $f(x)=1+\tan^2(2x)$ $F(x)=\dfrac{\tan(2x)}{2}+C$ c.f. ex. 18 série 5

11) $f(x)=(2x+1)^3$; $F(x)=\alpha\cdot(2x+1)^4$; $F'(x)=\alpha\cdot 4\cdot(2x+1)^3\cdot 2$,

donc $\alpha\cdot 4\cdot 2=1$; $\alpha=\dfrac{1}{8}$; $F(x)=\dfrac{1}{8}\cdot(2x+1)^4+C$

12) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$; $F(x)=\alpha\cdot\ln(|x^2-4|)$; $F'(x)=\alpha\cdot\dfrac{1}{x^2-4}\cdot(2x)$,

donc $\alpha\cdot 2=1$; $\alpha=\dfrac{1}{2}$; $F(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\ln(|x^2-4|)+C$

13) $f(x)=\dfrac{1}{x\cdot\ln(x)}$; $f(x)=\dfrac{1}{x}\cdot(\ln(x))^{-1}$; $F(x)=\alpha\cdot\ln(|\ln(|x|)|)$; $F'(x)=\alpha\cdot\dfrac{1}{\ln(|x|)}\cdot\dfrac{1}{x}$,

donc $\alpha=1$; ; $F(x)=\ln(|\ln(|x|)|)+C$

14) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$; $F(x)=\alpha\cdot\ln(|x^2+x+1|)$; $F'(x)=\alpha\cdot\dfrac{1}{x^2+x+1}\cdot(2x+1)$,

donc $\alpha\cdot(2x+1)=(4x+2)$; $\alpha=2$; $F(x)=2\cdot\ln(|x^2+x+1|)+C$

15) $f(x)=\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{2x^2}$; $f(x)=2\cdot x^{-3}+\dfrac{1}{2}\cdot x^{-2}$; $F(x)=2\cdot\dfrac{1}{-2}\cdot x^{-2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{-1}\cdot x^{-1}$

$F(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{2\cdot x}$ car *F'(x) = f(x)*

16) $f(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\ln(|x|)$; $F(x)=\alpha\cdot\ln(|x|)^2$; $F'(x)=\alpha\cdot 2\cdot\ln(|x|)\cdot\dfrac{1}{x}$,

donc $\alpha\cdot 2=1$; $\alpha=\dfrac{1}{2}$; $F(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\ln(|x|)+C$

17) $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}}$; $F(x)=\alpha\cdot e^{\sqrt{2x}}$; $F'(x)=\alpha\cdot e^{\sqrt{2x}}\cdot(\sqrt{2x})'=\alpha\cdot e^{\sqrt{2x}}\cdot\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{2x}}\cdot 2$,

donc $\alpha=1$; $F(x)=e^{\sqrt{2x}}+C$

18) $f(x)=\cos(x)\cdot\sqrt{\sin(x)}$; $f(x)=(\sin(x))^{\frac{1}{2}}\cdot\cos(x)$

$F(x)=\alpha\cdot(\sin(x))^{\frac{3}{2}}$; $F'(x)=\alpha\cdot\dfrac{3}{2}\cdot(\sin(x))^{\frac{1}{2}}\cdot\cos(x)$,

donc $\alpha\cdot\dfrac{3}{2}=1$; $\alpha=\dfrac{2}{3}$; $F(x)=\dfrac{2}{3}\cdot(\sin(x))^{\frac{3}{2}}+C=\dfrac{2}{3}\cdot\sqrt{\sin^3(x)}+C$

19) $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$; $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{x^2}$; $F(x)=\alpha\cdot e^{\frac{1}{x}}$; $F'(x)=\alpha\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)'F'(x)=\alpha\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{-1}{x^2}$,

donc $\alpha\cdot(-1)=1$; $\alpha=-1$; $F(x)=-e^{\frac{1}{x}}+C$

20) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$; $f(x)=x^{-\frac{1}{3}}$; $F(x)=\alpha\cdot x^{\frac{2}{3}}$; $F'(x)=\alpha\cdot\dfrac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}$,

donc $\alpha\cdot\dfrac{2}{3}=1$; $\alpha=\dfrac{3}{2}$; $F(x)=\dfrac{3}{2}\cdot x^{\frac{2}{3}}+C=\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}+C$

21) $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x}$; $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x}$; $f(x)=x+2+\dfrac{1}{x}$ $F(x)=\dfrac{1}{2}\cdot x^2+2\cdot x+\ln(|x|)+C$

22) $f(x)=e^{x^3}\cdot x^2$; $F(x)=\alpha\cdot e^{x^3}$; $F'(x)=\alpha\cdot e^{x^3}\cdot(x^3)'=\alpha\cdot e^{x^3}\cdot 3\cdot x^2$,

donc $\alpha\cdot 3=1$; $\alpha=\dfrac{1}{3}$; $F(x)=\dfrac{1}{3}\cdot e^{x^3}+C$

23) $f(x)=\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$; $f(x)=x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}$; $F(x)=\alpha_1\cdot x^{\frac{4}{3}}+\alpha_2\cdot x^{\frac{2}{3}}$; $F'(x)=\alpha_1\cdot\dfrac{4}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}}+\alpha_2\cdot\dfrac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}$

donc $\alpha_1=\dfrac{3}{4}$; $\alpha_2=\dfrac{3}{2}$; $F(x)=\dfrac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}+\dfrac{3}{2}\cdot x^{\frac{2}{3}}+C=\dfrac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{x^4}+\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}+C$

24) $f(x)=2\cdot\sqrt{x}+\sqrt{2x}$; $f(x)=2\cdot x^{\frac{1}{2}}+(2x)^{\frac{1}{2}}$;

$F(x)=\alpha_1\cdot x^{\frac{3}{2}}+\alpha_2\cdot(2x)^{\frac{3}{2}}$; $F'(x)=\alpha_1\cdot\dfrac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}+\alpha_2\cdot\dfrac{3}{2}\cdot(2x)^{\frac{1}{2}}\cdot 2$

donc $\alpha_1=\dfrac{4}{3}$; $\alpha_2=\dfrac{1}{3}$; $F(x)=\dfrac{4}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{3}\cdot(2x)^{\frac{3}{2}}+C=\dfrac{4}{3}\cdot\sqrt{x^3}+\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{(2x)^3}+C$

24) Méthode plus simple en traitant l'expression avant d'intégrer.

$f(x)=2\cdot\sqrt{x}+\sqrt{2x}$; $f(x)=2\cdot\sqrt{x}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}$; $f(x)=(2+\sqrt{2})\cdot\sqrt{x}$;

$F(x)=(2+\sqrt{2})\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\sqrt{(x)^3}+C$ Cette expression est plus simple que celle obtenu ci-dessus.

25) $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{ax^2+b}$; $f(x)=(ax^2+b)^{\frac{1}{3}}\cdot x$;

$F(x)=\alpha\cdot(ax^2+b)^{\frac{4}{3}}$; $F'(x)=\alpha\cdot\dfrac{4}{3}\cdot(ax^2+b)^{\frac{1}{3}}\cdot(a\cdot 2\cdot x)$

donc $\alpha\cdot\dfrac{4}{3}\cdot a\cdot 2=1$; $\alpha=\dfrac{3}{8a}$; $F(x)=\dfrac{3}{8a}\cdot(ax^2+b)^{\frac{4}{3}}+C=\dfrac{3}{8a}\cdot\sqrt[3]{(ax^2+b)^4}+C$

26) $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$; $f(x)=(x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+1)$;

$F(x)=\alpha\cdot(x^2+x+1)^{\frac{1}{2}}$; $F'(x)=\alpha\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+1)$

donc $\alpha=2$; $F(x)=2\cdot(x^2+x+1)^{\frac{1}{2}}+C=2\cdot\sqrt{x^2+x+1}+C$

27) $f(x)=\dfrac{3x^2}{\sqrt{9+x^3}}$; $f(x)=(9+x^3)^{-\frac{1}{2}}\cdot(3x^2)$;

$F(x)=\alpha\cdot(9+x^3)^{\frac{1}{2}}$; $F'(x)=\alpha\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(9+x^3)^{-\frac{1}{2}}\cdot(3x^2)$

donc $\alpha=2$; $F(x)=2\cdot(9+x^3)^{\frac{1}{2}}+C=2\cdot\sqrt{9+x^3}+C$

28) $f(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{5x^3+8}}$; $f(x) = (5x^3+8)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2)$; $F(x) = \alpha \cdot (5x^3+8)^{\frac{1}{2}}$; $F'(x) = \alpha \cdot \dfrac{1}{2} \cdot (5x^3+8)^{-\frac{1}{2}} \cdot (5 \cdot 3 \cdot x^2)$ donc $\alpha = \dfrac{2}{5}$; $F(x) = \dfrac{2}{5} \cdot (5x^3+8)^{\frac{1}{2}} + C = \dfrac{2}{5} \cdot \sqrt{5x^3+8} + C$
29) $f(x) = (3x^2+1) \cdot \sqrt{x^3+x+2}$; $f(x) = (x^3+x+2)^{\frac{1}{2}} \cdot (3x^2+1)$; $F(x) = \alpha \cdot (x^3+x+2)^{\frac{3}{2}}$; $F'(x) = \alpha \cdot \dfrac{3}{2} \cdot (x^3+x+2)^{\frac{1}{2}} \cdot (3x^2+1)$ donc $\alpha = \dfrac{2}{3}$; $F(x) = \dfrac{2}{3} \cdot (x^3+x+2)^{\frac{3}{2}} + C = \dfrac{2}{3} \cdot \sqrt{(x^3+x+2)^3} + C$
30) $f(x) = \left(x + 2 \cdot \sqrt{x}\right)^2$; $f(x) = x^2 + 4 \cdot x \cdot \sqrt{x} + 4 \cdot x = x^2 + 4 \cdot x^{\frac{3}{2}} + 4 \cdot x$ Le pré-traitement est indispensable ici ! $F(x) = \dfrac{1}{3} x^3 + 4 \cdot \dfrac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} + 2x^2 + C = \dfrac{1}{3} \cdot x^3 + \dfrac{8}{5} \cdot \sqrt{x^5} + 2x^2 + C$